Eng

DE LA CONSTRUCTION

ET

DE LA MANŒUVRE DES VAISSEAUX.

TOME PREMIER.

DE LA CONSTRUCTION

ET

DE LA MANOEUVRE DES VAISSEAUX

ET AUTRES BÂTIMENTS,

OU

EXAMEN MARITIME

THÉORIQUE ET PRATIQUE;

PAR Don GEORGE JUAN, Commandeur d'Aliaga dans l'Ordre de Malte, Chef d'Escadre des Armées Navales de Sa Majesté Catholique, Commandant des Gardes de sa Marine, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale de Berlin, et Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris :

TRADUIT DE L'ESPAGNOL, AVEC DES ADDITIONS,

Par M. LEVÊQUE, Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris et de celle de Marine, Membre des Académies des Sciences de Bordeaux, Marseille et Rouen, Examinateur Hydrographe et ancien Professeur en Hydrographie et Mathématiques à Nantes.

Qui descendunt mare in navibus, facientes operationem in aquis multis: ipsi viderunt opera Domini, et mirabilia ejus in profundo. *Ps.* 106.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine et l'Architecture.

M. DCC. XCII.



A MONSEIGNEUR

CHARLES-EUGENE-GABRIEL

DE LA CROIX,

MARQUIS DE CASTRIES,

COMTE D'ALAIS,

Lieutenant-Général des Armées du Roi, Chevalier de ſes Ordres, Lieutenant-Général de la Ville de Lyon, Lyonnois & Forès, Gouverneur des Ville & Citadelle de Montpellier, Ville & Port de Cette, Meſtre-de-Camp Général de la Cavalerie Françaiſe & Étrangere, Commandant Général du Corps de la Gendarmerie, MINISTRE & SECRÉTAIRE D'ÉTAT, ayant le Département de la MARINE & des Colonies.

MONSEIGNEUR,

PERSONNE ne met en doute aujourd'hui l'importance de la Marine, ſon influence ſur le bonheur des hommes, &

combien elle contribue à la gloire des Nations qui, comme la NÔTRE, *la cultivent avec succès. Pénétré comme vous l'êtes,* MONSEIGNEUR, *de ces grandes vérités, votre unique sollicitude est de vivifier toutes les parties de la Science Navale; aucune n'échappe à vos lumieres & à votre vigilance. Vous avez inspiré à tous les Membres de ce Corps illustre, l'amour de l'étude & de la gloire, par les honneurs que vous avez attachés aux succès. C'est sous votre administration,* MONSEIGNEUR, *que le génie a déployé toute sa puissance; & la France voit avec admiration la Marine s'élever, dans son sein, à un degré de splendeur inconnu aux siecles précédents.*

En même temps que vous avez été occupé à soutenir l'honneur du nom Français, & à faire rendre la paix à l'Europe, on vous a vu chérir & protéger les Arts de paix, allier la gloire des Armes avec la culture des Sciences & des Lettres. Et c'est d'après cela, MONSEIGNEUR, *que j'ai pris la liberté de vous présenter la traduction de l'Ouvrage de* DON GEORGES JUAN, *l'un des plus célebres Géometres & des plus grands hommes de mer de l'Europe.*

La protection dont vous m'avez honoré, en permettant que cet Ouvrage parût sous vos auspices, & les secours que vous m'avez accordés au nom du Roi, pour en faciliter la publication, m'ont pénétré de la plus vive reconnoissance. Si mon travail, joint à celui de DON GEORGES JUAN, *étoit digne de passer à la postérité, le sentiment le plus glorieux pour moi, & le plus cher à mon cœur, seroit d'avoir fait parvenir jusqu'à elle le seul & unique témoignage que je puisse vous donner de mon zele, & du très-profond respect avec lequel je suis,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant serviteur,
LEVÊQUE.

EXTRAIT

Des Régistres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 26 Février 1783.

MEssieurs DE LA LANDE, BÉZOUT & DE BORY, ayant été nommés par l'Académie pour examiner la Traduction de l'*Examen Maritime* de D. GEORGES JUAN, faite par M. LEVÊQUE, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne d'être approuvé & imprimé sous le Privilege de l'Académie. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, le 26 Février 1783.

Signé, LE MARQUIS DE CONDORCET,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: à nos Amés féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prévôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés les Membres de l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilege pour l'impression de leurs Ouvrages. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement les Exposants, Nous leur avons permis, & permettons par ces présentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les recherches & observations journalieres, ou relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils seront dignes de l'impression, en tels volumes, formes, marges, caracteres, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque pré-

texte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposants, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposants, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur HUE DE MIROMÉNIL; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit Sieur HUE DE MIROMÉNIL: le tout à peine de nullité desdites présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposants & leurs ayant-causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le premier jour de Juillet, l'an de grace mil sept cent soixante-dix-huit, & de notre regne, le cinquieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Imprimeurs & Libraires de Paris, N°. 1477, folio 582, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article 4, à toutes personnes, de quelques qualités qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la susdite Chambre, huit Exemplaires prescrits par l'article 108 du même Réglement. A Paris, ce 20 Août 1778.

Signé, A. M. LOTTIN, *l'aîné*, *Syndic.*



PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

L'Ouvrage de *D. Georges Juan*, que nous présentons au Public, quoiqu'imprimé dès 1771, n'est cependant pas encore connu en France, qui est la partie de l'Europe, où l'on s'est le plus occupé de la théorie & de la pratique de la Construction & de la Manœuvre des Vaisseaux. Il y a peu d'ouvrage aussi intéressant pour la Marine que celui dont il s'agit ici. L'Auteur avoit le rare avantage d'être un des plus profonds Géometres, & un des plus grands Navigateurs. Il avoit accompagné M. Bouguer au Pérou en 1735, pour la mesure de la Terre, entreprise à jamais célebre dans l'histoire des sciences, & a publié plusieurs ouvrages sur la Marine, où l'on trouve le génie d'observation, & la sagacité qui devoient produire l'EXAMEN MARITIME.

Vers la fin du dernier siecle l'Europe n'avoit aucun ouvrage théorique sur la Navigation, si ce n'est sur le Pilotage. La Construction des Vaisseaux étoit abandonnée à de simples Charpentiers, & l'on ne pensoit pas que l'ARCHITECTURE NAVALE fût fondée sur une application continuelle de la Méchanique & de la Géométrie, qui sont les branches les plus difficiles des Mathématiques. Ceux qui exerçoient cette profession étoient seulement guidés par leurs lumieres naturelles, & par leur propre expérience ; ils varioient la forme des Vaisseaux selon qu'il leur paroissoit convenable ; ils se fondoient sur le récit des Navigateurs, & en adoptoient très-souvent les préjugés : flottant ainsi dans les espaces immenses de l'erreur, ce n'étoit que par un hasard singulier qu'ils pouvoient parvenir à faire des Vaisseaux qui eussent de bonnes qualités. Dans un très-grand nombre de Ports, tant en France qu'ailleurs, les choses sont encore dans le même état ; peut-être même n'y en a-t-il pas un seul qui n'en fournisse quelque exemple.

Le concours de la théorie & de l'expérience est absolument nécessaire à la perfection de la Marine ; & on ne peut disconvenir des difficultés que cette réunion présente. *D. Georges Juan* jouissoit de ce rare avantage au plus haut dégré ; aussi a-t-il découvert des regles très-importantes, & a-t-il rejetté un grand nombre de celles qui étoient admises, presque sans la moindre répugnance, par les hommes les plus éclairés. C'est sous ce regne qui fera à jamais la gloire des siecles, & l'honneur du nom Français, qu'on peut légitimement espérer de faire les derniers pas vers la perfection. Nous touchons à cette époque : elle doit nécessairement résulter des Réglements du feu Roi Louis XV, pour les études des Officiers de la Marine, & de la protection que notre Monarque lui accorde ; protection d'autant plus grande, que ce Prince, dont toutes les actions sont des leçons de sagesse pour les Rois, sçait combien la Marine influe sur le bonheur de ses peuples. Il y a maintenant en France un grand nombre d'Officiers dans ce Corps illustre, qui, outre la pratique la plus consommée de la Navigation, ont des connoissances dans les Mathématiques & la Physique, qui les mettent au rang des plus grands Géometres, & au dessus des Marins de toutes les autres Nations.

L'Architecture Navale, ne peut manquer de gagner beaucoup à la publication de l'Examen Maritime, & les Marins en tireront le plus grand parti, pour connoître les causes des différentes actions & des mouvements du Navire, & par conséquent pour éclairer leur pratique. Nous croyons cependant devoir recommander aux Constructeurs d'agir avec la plus grande prudence dans les changements que l'étude de cet ouvrage pourroit les porter à faire à leurs Navires. Il n'y a point d'art dont la pratique soit plus délicate, & où il soit si aisé d'outrer même les défauts qu'on veut corriger, ou de tomber dans le vice opposé à celui qu'on veut éviter. Les nouvelles inventions pour ce qui concerne la Construction des Vais-

ſeaux doivent être ſoumiſes à l'examen le plus ſcrupuleux avant d'être miſes en pratique : & nous voyons tous les jours que les plus petites erreurs dans l'application de regles très-certaines & très-connues, produiſent des défauts de la plus grande conſéquence : c'eſt pourquoi la prudence & le calcul doivent toujours ici guider & même corriger les efforts du génie.

Cette remarque regarde ſur-tout les Conſtructeurs qui ne ſeroient pas ſuffiſamment verſés dans la théorie pour appliquer directement le calcul aux Vaiſſeaux qu'ils veulent conſtruire : ce qui eſt cependant d'une néceſſité abſolue pour connoître la ſituation de leurs centres, leur force pour porter la voile, les réſiſtances tant directes que latérales qu'ils doivent éprouver dans le fluide, en un mot pour avoir une idée juſte de leurs qualités. Nos connoiſſances phyſiques ne ſeront portées au degré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles, que lorſque nous ſerons aſſez avancés, non-ſeulement, pour pénétrer les cauſes des *phénomenes*, mais encore pour calculer leurs effets. Dans l'ARCHITECTURE NAVALE, nous croyons qu'on doit ſe défier beaucoup des changements qu'on peut être porté à faire à un Vaiſſeau d'après la ſeule inſpection de ſon plan, ſans les avoir préalablement ſoumis au calcul : il n'eſt donné qu'aux Artiſtes d'une expérience conſommée & éclairée par une bonne théorie préliminaire, de ſe diriger ainſi d'après le ſimple coup d'œil : & encore a-t-on vu fort ſouvent des Vaiſſeaux fort mauvais ſortir des mains d'Ingenieurs dont on devoit attendre des ouvrages de la plus grande perfection, & cela pour avoir exécuté leurs Vaiſſeaux d'après leur ſeule ſpéculation, ſans ſoumettre leur plan à un calcul rigoureux.

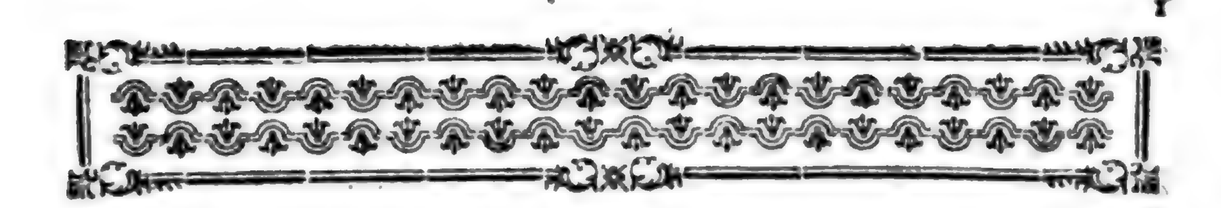
On trouvera dans cet Ouvrage tous les ſecours qu'on peut deſirer pour la connoiſſance parfaite des grands objets que préſentent la Conſtruction & la Manœuvre des Vaiſſeaux. Aucune des théories données juſqu'ici n'a fourni des réſultats auſſi conformes à l'expérience : & on peut même dire, que dans un

très-grand nombre de cas elles en ſont tout à fait éloignées.

Ceux des Géometres qui ne prennent pas un intérêt direct aux progrès de la Science Navale, trouveront cependant dans cet Ouvrage une foule d'objets qui aſſurément les intéreſſeront. La Science du mouvement des corps ſolides & des fluides y eſt préſentée d'une maniere abſolument nouvelle : la théorie du frottement & de la percuſſion des corps n'avoit point encore été enviſagée ſous ce point de vue, du moins cela n'eſt pas venu à notre connoiſſance. Ainſi l'Examen Maritime peut être regardé comme un Ouvrage qui contient une foule d'objets de Méchanique générale tout à fait nouveaux.

Quant aux Lecteurs qui par état ſont obligés d'avoir recours à ces ſortes d'ouvrages, ſans cependant avoir les connoiſſances de Géometrie & de Calcul que ces lectures exigent, nous leur conſeillons de ſe contenter de la lecture du Livre cinquieme du ſecond Volume : parce que ce Livre contient en abrégé, & ſans aucun calcul, tous les réſultats du reſte de l'Ouvrage, les maximes ou regles de pratique qui en découlent, & l'on a eu ſoin d'indiquer par des renvois les endroits où la théorie rigoureuſe a été traitée.

C'eſt dans la vue d'être de quelque utilité aux progrès d'une Science que nous cultivons encore plus par goût que par état, que nous avons entrepris l'Ouvrage que nous publions aujourd'hui, & pour payer à la Société le tribut que tout Citoyen lui doit dans l'état où il eſt placé. Afin de rendre cet Ouvrage plus utile, nous nous ſommes permis d'y faire quelques corrections & quelques additions : nous avons développé les idées qui ne nous ont pas paru préſentées avec aſſez de clarté : nous avons corrigé quelques calculs, & en avons ſouvent indiqué l'eſprit. Mais pour éviter tout reproche, nous avons preſque toujours indiqué nos changements dans les notes, afin de conſerver le Texte dans l'état où l'Auteur l'a jugé digne de l'impreſſion.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

L'INSTRUCTION du Navigateur, ſi nous en exceptons le petit nombre de principes ſimples & élémentaires ſur leſquels la Science du Pilotage eſt fondée, a toujours conſiſté, juſqu'à ces derniers temps, dans les ſeules connoiſſances que la pratique & l'expérience peuvent fournir. La Conſtruction des Vaiſſeaux & des autres Bâtiments a toujours été confiée à des hommes qui n'étoient gueres que de ſimples Charpentiers; & la Manœuvre, qui eſt l'art de donner au Vaiſſeau tous les mouvements néceſſaires, & de lui faire exécuter toutes les évolutions dont on peut avoir beſoin, a été pareillement abandonnée à la routine la plus deſtituée de principes. On ne croyoit pas même que ces deux branches de la Science du Marin euſſent quelque rapport avec les Mathématiques, bien loin de penſer qu'elles dépendoient uniquement de la Méchanique, qui eſt peut-être la plus difficile & la plus compliquée de toutes les Sciences. Mais il n'y a rien dans tout ceci qui doive étonner; l'Homme de Mer, environné de dangers, occupé tout entier de la pratique, excédé des travaux & des fatigues que ſon état exige, ne trouve point le repos ni la diſpoſition d'eſprit néceſſaires pour une étude auſſi étendue & auſſi pénible; le Sçavant, qui a beſoin d'une grande tranquillité pour ſes méditations, ne cherche point à s'expoſer aux fatigues extrêmes, aux inquiétudes & aux riſques dans leſquels l'autre paſſe ſa vie. L'expérience eſt cependant un grand maître dont on apprend avec facilité des choſes qu'il eût été preſque impoſſible de découvrir par la ſeule théorie. La difficulté de réunir les lumieres de la théorie à celles de l'expérience, en quoi conſiſte cependant

la perfection d'une Science si importante, est cause qu'elle est restée pendant tant de siecles dans les ténebres : mais comme, dans le siecle présent, les Mathématiques ont fait des progrès étonnants, & ont été introduites, avec un avantage singulier, dans presque tous les Arts & dans toutes les Sciences, il eût été contre l'ordre que la Marine n'eût pas joui du même avantage, ou au moins qu'on n'eût pas donné naissance à la perfection dont elle est susceptible, & dont elle jouira sans doute par la suite.

Dès l'année 1673, le *Pere Pardies* avoit donné son Traité de Statique, ou de la Science des Forces Mouvantes, dans lequel on trouve, sous forme d'exemple, une détermination de la route que doit suivre un Vaisseau poussé par un vent latéral. Ce premier essai auroit pu servir de guide pour s'avancer davantage dans une matiere si abondante; néanmoins cette Science ne fit aucun progrès jusqu'à l'année 1689, où le *Chevalier Renau* donna un Ouvrage *in-8°.* intitulé, *de la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* Il suivit le sentier que lui avoit ouvert le *P. Pardies*; tous deux conviennent en ce que le chemin direct du Vaisseau est moindre que celui qu'il feroit, s'il divisoit le fluide avec la même facilité par toutes ses parties, dans la raison du rayon au sinus de l'angle que forme la voile avec la quille; & que le chemin latéral est aussi moindre que ce même chemin, dans la raison composée de celle du rayon au cosinus du même angle, & de celle de la résistance du côté à celle de la proue. Mais, par malheur, le *Chevalier Renau* admettoit que les résistances étoient comme les quarrés des vîtesses des fluides, & comme les quarrés des sinus de leur incidence sur les surfaces qu'ils choquent : principe qui alors étoit reçu, presque sans la moindre répugnance, par les Géometres les plus célebres, & qui n'a pas même cessé de l'être jusqu'à présent. Ceci donna lieu au célebre Hollandais *Chrétien Huygens* d'exposer dans la *Bibliotheque universelle & historique*, (année 1693.) les contradictions dans lesquelles étoit tombé le *Chevalier Renau.* Il lui fit voir que, selon ses principes, les vîtesses directes du

Vaisseau devoient être beaucoup plus grandes, & que l'angle qu'il assignoit aux voiles, comme le plus avantageux pour gagner au vent, n'étoit pas tel qu'on le déduisoit légitimement. M. *Renau* défendit son opinion, (*Journal des Sçavants*, 1695) fondé sur le principe incontestable de la décomposition des forces; & comme *Huygens* ne répondit pas d'une maniere satisfaisante à ses arguments, il y eut, de part & d'autre, différentes répliques, sans qu'il fût possible d'arriver à une conclusion, & de connoître de quel côté étoit la vérité. Cependant la dispute cessa; & lorsque, par cette raison, M. *Renau* se croyoit plus assuré de son opinion, il parut un Mémoire dans les *Actes de Leipsic* du mois de Juillet 1696, par *Jacques Bernoulli*, Professeur de Mathématiques à *Groningue*, dans lequel ce Sçavant admettoit l'opinion de *Huygens*, à quelques modifications près. Le point où il s'en écarta, fut en ne supposant pas la vîtesse du vent comme infinie à l'égard de celle du Vaisseau; erreur dans laquelle étoient tombés les deux autres; & c'est pour cela que ses résultats sont en partie différents de ceux de *Huygens*. Le Chevalier, provoqué par cette nouvelle attaque, mit au jour un Ouvrage intitulé, *Mémoire où est démontré un principe de la Méchanique des liqueurs, dont on s'est servi dans la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux, & qui a été contesté par M. Huygens*; mais il se réduit à soutenir sa proposition sur la décomposition du mouvement, sans satisfaire à la tâche que lui avoit imposée *Huygens*. *Jean Bernoulli*, frere de celui dont nous venons de parler, Professeur de Mathématiques à *Basle*, se déclara d'abord pour l'opinion du Chevalier; mais ensuite, ayant apporté plus d'attention à cet objet, il adopta le sentiment de *Huygens*, & publia en 1714 un Livre intitulé, *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, après l'avoir soumis à la censure de l'Académie Royale des Sciences de *Paris*. La sublime Géométrie de l'Auteur, fit qu'il étendit ses calculs beaucoup plus loin qu'on ne l'avoit fait jusqu'alors; & la dispute, entre MM. *Renau* & *Huygens*, demeura décidée, suivant l'avis général des Sçavants,

parce que non-seulement il se déclara en faveur des vitesses trouvées par *Huygens*, mais encore, parce qu'ayant tracé la *courbe déterminatrice des vîtesses*, il ajouta à ce sujet : *Elle décide par conséquent la controverse en sa faveur, contre la prétention de M. Renau. Jean Bernoulli* ne voulut cependant pas limiter les vîtesses du vent, comme l'avoit fait son frere, d'après des réflexions très-fondées : c'est pour cela qu'il ne put déterminer celles des Vaisseaux avec la même exactitude. Il fit cependant attention à l'obliquité avec laquelle le vent frappe la voile, ce que son frere avoit omis ; & en examinant l'équation donnée par *Huygens*, pour trouver l'angle que doit former la voile avec la direction du vent, pour gagner au vent le plus qu'il est possible, étant donné celui qu'elle forme avec la quille, il parvient non-seulement à la même formule que *Huygens*, mais il le blâme d'avoir, pour ainsi dire, fait mystere du calcul. Il cherche ensuite l'angle que doit former la voile avec la quille, pour se procurer le même avantage, celui qu'elle forme avec le vent, étant supposé connu ; & l'ayant trouvé, il traite de la maniere de réunir les plus avantageux de ces deux angles, qui est un objet encore plus intéressant ; car puisque pour chaque angle donné de la quille avec la voile, il y en a un de la voile avec le vent qui est le plus avantageux, on peut chercher le cas, dans lequel tous les deux seront en même-temps les plus avantageux, & donneront par conséquent la plus grande marche. Il résout cette question avec la même adresse ; mais cette solution, ainsi que toutes les autres, est fondée sur la supposition, que la vitesse du vent est infinie & la dérive nulle : supposition bien éloignée de ce qui arrive réellement dans la pratique.

Les trois premiers Auteurs établirent leurs calculs sur l'hypothese, que le Navire est un rectangle dont les moindres côtés représentent la poupe & la proue ; mais *Jean Bernoulli* s'avança jusqu'à le supposer formé d'un rhombe, d'un rhomboïde, & même de segments circulaires. En effet ayant remarqué que tout le calcul

dépendoit des ſuppoſitions rélatives aux réſiſtances, & que les reſiſtances dépendoient de la figure de la carêne du Navire, il ne put s'empêcher d'entrer dans ces détails, & il blâma *Huygens* d'être convenu que la dérive aſſignée par le *Chevalier Renau*, ſeroit effectivement la véritable, ſi les réſiſtances des fluides étoient comme les ſimples vîteſſes, & non comme leurs quarrés. Il s'occupa auſſi de l'examen des différentes réſiſtances, particuliérement de celles des ſegments circulaires; & il donna le nom d'axe des réſiſtances à la ligne qui diviſe en deux parties égales les efforts des eaux dans toute la longueur du Navire, de la proue à la poupe. Ceci lui donna lieu de penſer que le mât étant poſé dans cette ligne, la force de la voile s'oppoſeroit directement à celle des eaux, & qu'on obtiendroit un manege parfait. Cette idée lui parut ſi importante, qu'il dit à ſon ſujet : *Je m'étonne que ni M. Renau, ni M. Huygens, n'aient point ſongé à cette queſtion, qui paroît pourtant aſſez eſſentielle à la Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux.* En effet, cette détermination & toutes les autres que produiſit ce grand homme, auroient été, ſans doute, de la plus grande utilité, ſi les profondes connoiſſances qu'il poſſédoit en Géométrie avoient été accompagnées de quelque pratique.

Un Ouvrage auſſi étendu, & auſſi rigoureuſement calculé que celui dont nous venons de parler, dans lequel l'Auteur, outre ce que nous avons dit, ſe livra encore à l'examen de la courbure des Voiles, de leurs forces, & de l'axe où l'on peut ſuppoſer ces forces reunies, qu'il nomma *Ligne de la Force Mouvante*; un tel Ouvrage, dis-je, paroiſſoit devoir mettre fin à toute diſpute : cependant le *Chevalier Renau* ne voulut pas ſe donner pour vaincu. Il répliqua de nouveau, s'appuyant toujours ſur le principe de la décompoſition des forces, & argumenta de maniere que *Bernoulli*, malgré ſa ſublime Géométrie, ne put le ſatisfaire qu'en lui diſant, que les loix de la décompoſition des mouvements, ne ſont pas les mêmes, lorſqu'ils ſe font dans les fluides,

que lorsqu'ils se font dans le vuide. Ces absurdités sont la suite nécessaire des principes erronnés qu'on avoit aveuglément adoptés ; mais enfin, le *Chevalier* céda, plus par prudence, ou par le respect dû à l'autorité de *Bernoulli*, que par une conviction parfaite sur ces objets.

Pendant tous ces débats, M. *Parent*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, donna au Public, (année 1713,) son Ouvrage intitulé, *Essais & Recherches de Mathématiques, & de Physique*, dans lequel, (*Tom.* 2, pag. 741,) on trouve cette proposition : *De la situation, route & vîtesse d'une figure plane quelconque tirée dans un fluide.* Les principes sur lesquels cet Auteur fonde son calcul ne different pas de ceux de *Jacques Bernoulli* ; mais cependant, faute d'avoir fait l'attention convenable à d'autres principes de méchanique très-nécessaires, il n'obtint pas les mêmes résultats que ce célebre Auteur.

Avant tout ceci, (année 1697), avoit paru un Ouvrage *in-folio* beaucoup plus étendu, par le Pere *Paul Hoste*, Jésuite, Professeur de Mathématiques dans le Séminaire Royal de *Toulon*, intitulé, *Théorie de la Construction des Vaisseaux* ; cet Ouvrage est très-connu dans la Marine, parce qu'il accompagne, & sert de suite à un autre Ouvrage du même Auteur, intitulé, *l'Art des Armées Navales*, qui a beaucoup de célebrité : c'est pour cela que nous ne pouvons nous dispenser d'en dire un mot. Le *P. Hoste* s'efforce, dans ce livre, d'établir en principe, que les résistances des fluides sur les superficies qu'ils choquent, ne sont que comme les simples vîtesses, & comme les simples sinus des angles d'incidence. Quoique ceci soit la premiere chose que plusieurs Géometres lui reprochent, on verra cependant dans la suite de cet Ouvrage, que les erreurs dans lesquelles cet Auteur est tombé, tant sur les résistances, que sur la force du Navire pour porter la voile, les roulis, les tangages, & autres mouvements, viennent plutôt de ce qu'il ignoroit plusieurs principes essentiels de Méchanique, que de ce qu'il admettoit ce principe prétendu faux. Nous pourrions citer ici plusieurs passages de cet Ouvrage, pour

prouver ce que nous venons de dire : mais ce seroit nous arrêter sans utilité, ce que nous avons dit étant suffisant, pour que le Lecteur sçache le mérite qu'il doit lui assigner.

Après les Ouvrages dont nous venons de parler, on ne vit paroître, pendant un certain temps, que quelques productions de pure pratique. Aucun principe fondamental ne précede & dirige les regles que ces Auteurs exposent; un jugement sain & droit, mais sans culture, est leur seul guide, pour perfectionner, ou corriger; aussi il leur arrive très-souvent de tomber dans des erreurs plus préjudiciables que celles qu'ils veulent éviter. La sublime théorie des *Bernoulli*, peu, ou même point du tout, appliquable à la pratique, ne produisit que l'Ouvrage de M. *Pitot*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, publié l'année 1731, intitulé, *la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux, réduite en Pratique*. Cet Auteur rappelle les principes établis dans la théorie des *Bernoulli*, & d'après ces principes il donne des tables des angles que doivent former les voiles; mais outre les erreurs théoriques que contient cet Ouvrage, M. *Pitot* manquoit entiérement de pratique, ce qui lui fit porter des jugements purement arbitraires, sur les effets de la mer, & les opérations des marins, en leur attribuant des faits qui n'ont jamais eu lieu.

Quatre années auparavant, M. *Bouguer*, alors Professeur d'Hydrographie au *Havre de Grace*, avoit donné un Ouvrage intitulé, *de la Mâture des Vaisseaux*, qui mérita le prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1727. Cet Ouvrage dans lequel brillent particuliérement la Géométrie & le calcul, se termine par des regles très-peu conformes aux vues de son Auteur, & qui sont absolument impraticables. Ses idées étoient de pouvoir appliquer aux Vaisseaux des voiles beaucoup plus grandes que celles qu'ils portent actuellement, afin d'augmenter leur marche, sans qu'ils risquent de subir de grandes inclinaisons; mais malheureusement cet avantage ne s'obtient que dans le cas unique, où l'on a vent en poupe : dans tous les autres cas, encore que

l'Auteur reconnoisse, lui-même, l'impossibilité de faire usage de ce qu'il propose, il exige pourtant que les voiles s'abaissent & s'élargissent, de maniere qu'elles aient deux ou deux fois & demi la largeur quelles ont aujourd'hui. Par cette pratique, les voiles & les vergues seroient continuellement noyées sous l'eau, puisque cela arrive même, quelquefois, dans l'état actuel des choses. Outre plusieurs inconvénients qui tiennent à la maniere d'assujettir & d'orienter une voilure aussi étendue, on verra dans la suite de cet Ouvrage, qu'il seroit presque, pour ne pas dire absolument, impossible, que le Vaisseau gouvernât avec un tel appareil. Cette considération est échappée à l'Auteur, malgré l'étendue de ses connoissances, & la sagacité qui lui étoit si naturelle, parce que ce sont des choses que la pratique seule peut apprendre, & qu'on trouveroit très-difficilement sans elle.

Dans l'Ouvrage célebre intitulé, *A Treatise of Fluxions*, que publia en 1742 le sçavant *Colin MacLaurin*, Professeur de Mathématiques dans l'Université d'Edimbourg, & Membre de la Société Royale de *Londres*, on trouve (*Tome II*, §. 922) la solution du problême concernant les angles que doivent former les voiles avec la quille & avec le vent. Cette solution est vraiment digne du grand homme qui l'a produite; elle est d'accord avec celle donnée par *Jean Bernoulli*; mais les principes sur lesquels elle est fondée, sont que la vîtesse du vent est infinie à l'égard de celle du vaisseau, & que la dérive est nulle, comme l'avoit supposé ce dernier. Sans cela, & sans les faux principes qu'il admet sur les résistances, comme on le verra par la suite, nous aurions eu la solution rigoureuse de ce problême, qui est tant desirée.

Tous ces Ouvrages se réduisent cependant à un nombre limité de propositions détachées; il nous en manquoit la récapitulation, la correction de celles qui étoient erronnées, & l'addition de beaucoup d'autres absolument nouvelles. Cet Ouvrage resta pour M. *Bouguer*, le même qui nous donna, dans l'année 1727, le Traité *de la Mâture des Vaisseaux*. Il publia donc, en 1746, son second

Ouvrage

Ouvrage sur la Marine, intitulé, *Traité du Navire, de sa Construction & de ses Mouvements.* L'étendue de cet Ouvrage, l'examen particulier & détaillé de tous les objets qui concernent le grand Art qu'il traite, & la simplicité élégante des solutions géométriques qui y sont très-heureusement appliquées, & rendues, pour ainsi dire, à la portée des commençants, lui donnerent dans l'Europe toute la célébrité qu'il méritoit. Il est certain que cet Auteur, si justement célebre, ne nous auroit rien laissé à desirer, s'il avoit joint à ses connoissances la pratique nécessaire pour découvrir la fausseté des suppositions que fait la théorie. Son zele & sa constance infatigables dans une tâche aussi pénible, étoient précisément ce qui nous auroit produit un Ouvrage parfait. Nous ne nous arrêterons pas à rappeller ici ce qui sera toujours essentiel dans l'Ouvrage de M. *Bouguer*, ni ce qu'il contient d'évidemment défectueux, parce que nous citons, dans le cours de cet Ouvrage, les endroits les plus remarquables, omettant ceux qui paroissent d'une moindre importance, pour ne pas trop retarder notre marche.

Enfin, dans l'année 1749, *Léonard Euler*, Directeur de l'Académie Royale de *Berlin*, donna son grand Ouvrage intitulé, *Scientia Navalis, seu Tractatus de construendis ac dirigendis Navibus.* L'ordre singulier & la sublime géométrie avec lesquels ce grand homme traite toutes les matieres qu'il embrasse, sont vraiment dignes d'admiration. Cet Ouvrage eût été véritablement un trésor pour les Sciences en général, & pour la Marine en particulier, si des connoissances aussi profondes eussent été accompagnées de la pratique & de l'expérience que nous aurions également desirées dans M. *Bouguer.* Quoi qu'il en soit, ses solutions sont les meilleurs guides pour tout ce qu'on peut proposer & offrir de nouveau, ce qui n'est pas un foible avantage. Depuis ces grands Ouvrages, on a vu paroître de temps en temps quelques productions peu considérables, les unes sur la théorie, & les autres sur la pratique; mais nous pouvons assurer que ce qui ne se trouve pas dans ces deux célebres Auteurs, n'est pas des principaux objets que présente la théorie de la Marine.

Ce font ces Ouvrages qui nous ont fervi de bouffole dans la partie fcientifique de la Marine: d'un autre côté la pratique ne nous a pas été un maître moins fecourable, particuliérement lorfqu'après avoir bien obfervé les faits qu'elle préfente, & les avoir dégagés des accidents qui peuvent les modifier & les rendre variables, ils ne fe trouvent pas conformes à ceux qu'exige la théorie. Dans ce cas, il n'y a perfonne qui ne penfe qu'il ne fe foit gliffé quelques fuppofitions erronnées dans les principes de la théorie, défaut qu'il eft néceffaire de chercher & de corriger: car la pratique & la théorie ne doivent jamais différer dans leurs réfultats; lorfqu'elles ne font pas d'accord, une des deux au moins eft vicieufe, c'eft-à-dire, que la théorie porte fur quelque principe faux ou mal entendu, ou bien que les faits de la pratique n'ont pas été examinés avec toute l'attention & le difcernement néceffaires. On rencontre plufieurs exemples de cette efpece parmi les principaux objets de la Science Nautique, malgré tous les travaux des Sçavants qui l'ont cultivée, non par le défaut de la Science en elle-même, mais pour n'en avoir pas comparé les réfultats avec ceux de l'expérience.

Un des premiers doutes qui fe préfenterent à moi dans mes recherches & un des plus intéreffants, fut fur la marche du Vaiffeau. Selon la théorie, (1) le Vaiffeau, en le fuppofant même des meilleurs voiliers, ne peut prendre plus que les $\frac{100}{136}$ de la vîteffe du vent, & cela en naviguant toutes voiles dehors, vent arriere, ou vent largue, deux cas qui paroiffent indifférents à l'Auteur. (2) La vîteffe du vent eft tout au plus, felon M. *Mariotte*, (*Traité du Mouvement des Eaux*, part. 1, difc. 3) de 24 pieds par fecondes; *c'eft, dit-il, la vîteffe ordinaire des vents incommodes, & contre lefquels on a peine d'aller.* M. *Clare*, de

(1) M. *Bouguer*, *Traité du Navire*, liv. 3 fect. 2, chap. 1.

(2) On verra que le Navire marche beaucoup plus vîte vent largue, que vent arriere, & cela en fe fervant des mêmes voiles dans les deux cas.

la Société Royale de *Londres*, dit la même chose, dans son Traité du *Mouvement des Fluides*, page 261 : & d'après les expériences que j'ai faites moi-même, je suis demeuré convaincu que ce vent est précisément celui qui ne permet qu'avec beaucoup de difficultés de porter toute la voilure. En effet lorsque le vent parvient à avoir seulement 18 ou 20 pieds de vîtesse par seconde, on voit déjà les Vaisseaux, orientés vent largue, obligés de prendre des ris, même de serrer les voiles, dans la crainte de rompre les vergues & les mâts. M. *Mariotte* répete la même chose dans ledit Ouvrage, (part. 2, disc. 3,) *supposant, dit-il, que le vent fasse 24 pieds en une seconde, comme il fait quand il est assez violent à l'ordinaire, mais pourtant bien moins que dans les grandes tempêtes & ouragans.* M. *Guillaume Derham*, de la Société Royale de *Londres*, rapporte, d'après des expériences réitérées, (*Transact. Philos.* N°. 313,) que dans les plus violentes tempêtes, le vent ne parcourt que 66 pieds anglais par seconde, & tout au plus de 70 à 90; il ajoute que quelques-uns ont une vîtesse de 22 pieds par seconde, d'autres en ont une de 44, & d'autres plus, & enfin qu'il y a des vents qui ne parcourent pas un mille par heure : ce qui fait 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde. J'ai trouvé par mes propres expériences que j'ai déjà citées, que les brises d'été qui regnent presque journellement à *Cadix*, parcourent en général 12 pieds par seconde, un peu plus ou un peu moins, ce qui s'accorde très-bien avec les Auteurs que nous venons de nommer : ainsi supposer qu'un Vaisseau puisse porter toute sa voilure, le vent parcourant 24 pieds par seconde, c'est assurément tout ce qu'on peut supposer de plus fort, encore doit-on beaucoup douter que cela soit possible. D'après cette supposition, le Vaisseau ne pouvant prendre, selon la théorie admise jusqu'ici, plus que les $\frac{100}{336}$ de la vîtesse du vent, cela correspondra, dans le cas présent, aux $\frac{100}{336}$ de 24 pieds, ou à 7 pieds $\frac{48}{336}$ par seconde, ce qui répond à 4 milles $\frac{1}{2}$ par heure : je laisse aux Marins à considérer combien ce résultat est éloigné de 9, 10, & 11 milles, qu'un Vaisseau a coutume de faire dans de pareilles circonstances.

Prenons le calcul en ſens contraire: ſuppoſons que le Vaiſſeau parcoure 11 milles par heure, comme il les parcourt effectivement, ce qui correſpond à une vîteſſe de 17 pieds $\frac{1}{4}$ par ſeconde, & nous trouverons que pour cela le Vaiſſeau doit parcourir les $\frac{336}{100}$ de 17 pieds $\frac{1}{4}$, ou à-peu-près 58 pieds français, qui équivalent à 62 pieds anglais : enſorte que pour que les Vaiſſeaux parcourent 11 milles par heure, comme ils les parcourent en effet avec tout leur appareil, il eſt preſque néceſſaire d'un ouragan tel que celui obſervé par *Derham*. M. *Bouguer* ſuppoſe dans le calcul dont toutes ces conſéquences ſont tirées, que la denſité de l'air eſt $\frac{1}{576}$ de celle de l'eau ; en la prenant de $\frac{1}{1100}$, il ajoute que la vîteſſe du Navire ne ſeroit que les $\frac{100}{419}$ de celle du vent ; enſorte que les 4 milles $\frac{1}{2}$ de ſa marche par heure ſe réduiroient alors à 3 milles $\frac{4}{5}$; & le Navire courant en effet 11 milles par heure, la vîteſſe du vent devroit être de 77 pieds anglais, ce qui forme une tempête des plus violentes qu'il ſoit poſſible de voir.

Il me parut d'abord que ce défaut de correſpondance entre la théorie & la pratique, pouvoit venir de quelque erreur de calcul ; mais ayant calculé de nouvelles formules, comme on le verra dans le Tom. II, Liv. IV, Chap. 1 de cet Ouvrage ; elles me ſervirent ſeulement à le confirmer. On trouve de même qu'au plus près du vent, le Vaiſſeau, naviguant avec toutes ſes voiles, ne peut prendre que les $\frac{111}{1000}$ de la vîteſſe du vent ; & par conſequent que celui-ci devroit parcourir 77 pieds $\frac{1}{3}$ anglais par ſeconde, pour que le Vaiſſeau parcourût ſeulement 6 milles par heure, comme le font beaucoup de Vaiſſeaux. On voit que ce réſultat eſt encore plus impoſſible que tout ce qu'on a vu ci-deſſus ; puiſque, par beaucoup de raiſons, le vaiſſeau ne pourroit pas porter tout ſon appareil avec un vent auſſi violent.

Malgré tout ce qu'on vient de voir, il nous reſtoit encore un autre examen à faire ; car toutes les déterminations ci-deſſus ſont fondées ſur la ſuppoſition que le Vaiſſeau, faiſant 11 milles par

heure ; il les fait par la ſeule action d'un vent dont la vîteſſe n'excede pas 24 pieds par ſeconde ; quantité aſſignée ſeulement ſur la foi que nous avons donnée aux obſervations de *Mariotte* & de *Derham*. Il étoit donc néceſſaire de voir ſi cette vîteſſe ne ſeroit pas plus grande, ce qui nous approcheroit davantage des déterminations fournies par le calcul. Or l'expérience ſeule pouvoit éclaircir ce doute ; c'étoit donc elle qu'il falloit conſulter.

Pour que le Navire parcoure 11 milles par heure, il faut qu'il ait 17 pieds $\frac{3}{4}$ de vîteſſe par ſeconde ; & ſi le vent qui produit cet effet, n'avoit que 24 pieds de vîteſſe par ſeconde, la vîteſſe du Vaiſſeau devroit être à-peu-près les $\frac{3}{4}$ de celle du vent, & non le $\frac{1}{7}$, comme on l'a déduit du calcul. C'eſt donc le rapport de ces deux vîteſſes, celle du vent & celle du Vaiſſeau, qu'il eſt queſtion de connoître avec exactitude. Pour cela je choiſis un Canot, & tandis qu'en y naviguant vent largue, on meſuroit ſon ſillage, on meſuroit à terre la vîteſſe du vent, en lui abandonnant de petites plumes très-légeres, & en obſervant, avec une montre à ſecondes, le chemin qu'elles parcouroient dans un temps donné. Après avoir répété pluſieurs fois cette expérience, je reconnus, à mon grand étonnement, que non-ſeulement on ne peut augmenter les 24 pieds de la vîteſſe du vent, mais qu'au contraire il faut les diminuer beaucoup. Finalement je trouvai que le Canot alloit preſque auſſi vîte que le vent ; de ſorte que le vent parcourant 10 à 11 pieds par ſeconde, le Canot en parcouroit à-peu-près 10. Ce phénomene paroîtra, ſans doute, bien étrange à ceux qui ont cru que la vîteſſe du vent étoit preſque infinie à l'égard de celle du Vaiſſeau ; mais il n'en eſt pas moins vrai. On peut répéter journellement cette expérience dans tous les Ports où l'on a la commodité de paſſer à la voile d'un côté à l'autre, comme dans la Baye de *Cadix*. De cette Ville au *Port-Sainte-Marie*, il y a cinq milles, ou 30400 pieds anglais : le vent étant frais, ou ayant une vîteſſe de 42 pieds par ſeconde, les Barques font ce trajet, en courant

vent largue, en trois quarts d'heure, ou 2700 secondes; ce qui, en divisant les 30400 pieds par les 2700 secondes, donne 11 pieds $\frac{7}{27}$ pour la vîtesse de la Barque dans une seconde. Delà on voit clairement qu'il ne convient point de supposer plus de 24 pieds de vîtesse au vent, pour que le Vaisseau parcoure 17 pieds $\frac{1}{2}$, particuliérement si on le suppose bon voilier.

D'après tout ce que nous venons de dire, il n'y a plus moyen d'être arrêté dans les conséquences qui se présentent d'elles-mêmes; il faut nécessairement que la théorie enseignée jusqu'ici soit fausse, ou, pour mieux dire, que les principes ou suppositions sur lesquels elle est fondée, soient erronnés. Ces principes sont que les forces que le vent exerce sur les voiles, de même que celles des eaux sur la carene du Navire, sont comme les surfaces choquées, comme les quarrés des vîtesses, comme les quarrés des sinus des angles d'incidence sous lesquels elles sont choquées, & comme les densités des fluides : à quoi on peut ajouter la supposition des voiles planes, tandis qu'elles ne le sont pas, particuliérement dans le cas d'un vent frais. Cette derniere supposition, bien loin d'être préjudiciable à la théorie, la favorise au contraire, puisque par elle on donne plus de force aux voiles qu'elles n'en ont effectivement, d'où il doit resulter plus de vîtesse pour le Vaisseau, comme on le desire.

Que la force soit comme les densités des fluides, c'est un principe si évident par lui-même, que je ne crois pas qu'il ait jamais été mis en doute par personne. Il paroît qu'il en doit être de même de cet autre principe, qui est que (toutes choses égales d'ailleurs) les forces des fluides doivent suivre la raison des surfaces qu'ils choquent, comme on l'a cru jusqu'ici. Toute l'erreur doit donc tomber sur la supposition que les forces, ou, ce qui est la même chose, que les résistances des fluides sont dans le rapport des quarrés de leurs vîtesses, & des quarrés des sinus d'incidence. Ce principe, tout suspect qu'il est, est cependant reçu par les premiers Géometres, & par les premiers Physiciens de

l'Europe, & généralement adopté par toutes les Académies qui y sont instituées, & qui sont si justement célebres. Cette considération devoit imprimer le plus grand respect, & peut-être même porter à abandonner tout examen de ce principe, si nous ne nous voyions pas autorisés à douter par l'exemple des mêmes Géometres. *Newton* est un de ceux qui firent le plus d'efforts pour s'assurer d'un principe si essentiel pour procéder avec certitude dans sa Théorie des Projectiles. Après beaucoup d'examens théoriques, (*Philosophia naturalis*, lib. 2.) qui ne sont, à la vérité, que de pure spéculation, & qu'on ne peut regarder comme des demonstrations géométriques, il crut pouvoir conclure que les résistances des fluides suivent la raison du quarré des vîtesses. Mais cependant, avant de s'en tenir absolument à ce principe, & de l'admettre dans ses démonstrations, il voulut le confirmer par l'expérience; & pour cela il fit osciller, dans les fluides, des pendules de différentes matieres & de différentes grandeurs. (1) Le résultat de ces expériences est si éloigné de ce qu'il avoit d'abord imaginé, qu'on en concluroit avec plus de précision, que les résistances sont comme les simples vîtesses : aussi ajoute-t-il que ses expériences méritent peu de confiance, & qu'il seroit à desirer qu'on les répétât.

Léonard Euler, dans sa *Science Navale*, que nous avons déjà citée, (Chap. 5, Propos. 49.) donne un raisonnement géométrique sur ce sujet, dans lequel on trouve toute l'adresse & le sçavoir éminent de ce grand Géometre : sa conclusion est, (2) que la force ou la résistance des fluides est égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la base est la surface choquée, & la hauteur, celle d'où il faudroit qu'un corps tombât librement pour acquérir la vîtesse avec laquelle le fluide se meut; hauteur qui, comme on le sçait, est comme les quarrés des vîtesses. Mais quelle imperfection l'Auteur n'apperçut-il pas dans cette solution, & quel

(1) Voyez le Scolie de la Propos. 17, Livre 2, Tome I de cet Ouvrage.
(2) Voyez le même Scolie.

embarras ne lui causa-t-elle pas, puisqu'il avoue lui-même que la force ne peut être égale qu'au simple poids de la colonne ci-dessus, & non au double de ce poids? Toute sa démonstration est fondée sur la supposition que lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il frappe seulement la partie du fluide qu'il déplace, sans faire attention que le fluide déplacé pousse celui qui est devant lui; que ce dernier pousse aussi celui qui le précede, & ainsi de suite, sans qu'il y ait de terme, ou sans que nous sçachions quelle est la quantité de fluide qui se meut réellement, comme le confesse *Newton* lui-même, (*Philosophia Naturalis*, Liv. II, Scolie de la Propos. 35.)

Daniel Bernoulli, dont le nom est si connu dans la République des Lettres, étend encore davantage ses calculs, (1) en manifestant la différence qui résulte de ce que les corps sont ou ne sont pas élastiques. Mais, quoi qu'il en soit, la solution est la même, à cette différence près que la résistance est double dans le premier cas de ce qu'elle est dans le second: ainsi l'incertitude subsiste toujours. Tout ceci, au reste, paroîtra moins étrange, si on considere que dans les théories que nous venons de citer, on suppose le fluide destitué de toute gravité, & par conséquent que les particules n'exercent aucune pression les unes sur les autres; ce qui n'a lieu ni dans notre air, ni dans nos eaux. Lorsque la vitesse des corps qui se meuvent dans ces fluides n'est pas trop grande, leur partie postérieure est frappée par les particules du fluide, avec la force qui leur demeure de leur gravité; ce que *Newton* avoit aussi remarqué, & par conséquent la résistance doit être diminuée. Au contraire, si la vitesse du corps en mouvement est très-grande, la gravitation du fluide n'a pas tant lieu, & les particules du fluide n'en peuvent acquérir assez de vitesse pour atteindre & frapper la partie postérieure du corps, & la résistance doit être par-là à proportion plus grande. Plusieurs ont bien reconnu, depuis, cet effet, &

(1) Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, mois de Juin & d'Octobre 1727.

ont

ont été forcés de convenir que les résistances des fluides que nous connoissons, (1) ne peuvent suivre réguliérement les loix que nos théories leur assignent.

Nous ne devons donc pas être étonnés si la vîtesse calculée pour celle que devroient prendre les Vaisseaux, est si éloignée de celle qu'ils prennent effectivement : cela devoit arriver nécessairement, puisque les suppositions sur lesquelles on s'est fondé, sont fausses. Mais cette conséquence n'est pas encore la plus fâcheuse : si le résultat du calcul pour déterminer la vîtesse du Navire, est si considérablement éloigné de la vérité, quelle confiance pouvons-nous avoir dans aucun des autres résultats fournis par cette théorie, dans les angles que doivent faire les voiles avec le vent, dans ceux du gouvernail & de la dérive, dans les forces des voiles, & les autres actions du Vaisseau ? Tout doit être vicieux, ou du moins nous avons tout lieu de le croire. Le sujet est, on ne peut pas plus, intéressant, & demande l'examen le plus sérieux : c'est précisément cet examen que nous nous sommes proposés de faire avec tout le soin & toute l'attention dont nous sommes capables, sans épargner ni travail ni fatigues.

Il étoit nécessaire de commencer par des expériences certaines qui confirmassent nos doutes sur les résistances, & de chercher ensuite, par des voies différentes, ou en suivant celles par lesquelles la nature agit, une autre théorie des mêmes résistances; & il falloit enfin examiner si cette nouvelle théorie étoit d'accord, non-seulement avec ce que l'expérience nous apprend sur la marche du Vaisseau, mais encore avec ce qu'elle nous fait voir de tous ses autres mouvements, & même avec tous les phénomenes qu'on observe dans la nature. L'entreprise, quoique difficile, a eu beaucoup plus de succès que je ne l'avois moi-même espéré. J'ai trouvé que l'action exercée par l'eau courante contre une surface que

(1) Benjamin Robins, de la Société Royale de Londres, *New Principles of Gunnery*, Chap. 2, Prop. 1.

je lui ai exposée, est non-seulement, dans certains cas, quatre fois plus grande que ne l'assigne M. *Mariotte*, (*Traité du Mouvement des Eaux*, Part. 2, Disc. 3.) mais qu'elle est même, dans d'autres circonstances, jusqu'à huit fois plus grande. Ceci ne paroîtra point étonnant, si on considere que l'action du fluide dépend non-seulement de la grandeur de la surface choquée, comme on l'a cru jusqu'ici, mais aussi de la plus grande profondeur à laquelle elle est submergée dans le fluide : ensorte que la même table, ou surface, étant supposée avoir la forme d'un parallélogramme rectangle, éprouvera beaucoup moins de résistance, ayant son plus grand côté horisontal, que lorsque le même côté est vertical. C'est une observation très-importante pour la Marine, & qui jusqu'à présent ne s'est offerte à personne, quoiqu'elle soit une conséquence évidente de la gravitation. En effet, la gravitation agissant dans les résistances, ainsi que nous venons de le dire, comme elle est plus grande à de plus grandes profondeurs, attendu que les colonnes qui agissent sur les particules du fluide, sont plus longues, & par conséquent d'un plus grand poids, il s'ensuit que les résistances doivent aussi être plus grandes à de plus grandes profondeurs. Les différences qui résultent de ce seul fait sont si grandes, que tout ce qu'on a calculé jusqu'à présent, ne pouvoit pas manquer de différer considérablement de la vérité. J'ai observé que lorsque la table avoit une longueur quadruple de sa largeur, la résistance qu'elle éprouvoit, son plus grand côté étant vertical, étoit à-peu-près deux fois plus grande que lorsque le même côté étoit horisontal ; c'est-à-dire, que, dans ce cas, les résistances sont à-peu-près comme les racines quarrées des hauteurs ou profondeurs de la surface dans le fluide. Ainsi, supposant qu'un Navire ait ses dimensions linéaires doubles de celles d'un autre qui lui est semblable, les surfaces choquées du premier seront quadruples de celles du second ; & d'après ce qu'on a enseigné jusqu'à présent, les résistances du premier de ces Navires devroient être à celles du second, comme 4 est à 1 ; mais, selon les

obſervations dont nous venons de parler, ces réſiſtances ſont en effet à-peu-près comme $5\frac{1}{7}$ eſt à 1; différence qui, comme on le voit, mérite bien d'être conſidérée.

Nos expériences ont encore prouvé clairement que les réſiſtances ne ſuivent pas la loi des quarrés des vîteſſes, & des quarrés des ſinus des angles d'incidence, mais à-peu-près celle des ſimples vîteſſes & des ſimples ſinus d'incidence. C'eſt auſſi ce que les expériences de *Newton* ont manifeſté.

Nous étions donc déjà aſſurés, d'après tout ceci, des défauts de la loi des réſiſtances établie par la théorie; quoique cette loi ait été généralement reçue, malgré les doutes qu'elle devoit ſuggérer, & qui devoient la rendre ſuſpecte, & malgré la fauſſeté des réſultats que nous avons vus en être la ſuite. Mais cela ne ſuffiſoit pas encore, il falloit trouver une nouvelle théorie, dont les conſéquences fuſſent conformes à l'expérience & à la vérité: ſans cela on ne pouvoit pas l'introduire dans le calcul; & il paroiſſoit, à la premiere vue, que nous devions avoir des réſultats encore plus éloignés de l'obſervation des faits. Car puiſque les réſiſtances ſont effectivement plus grandes qu'on ne l'avoit penſé, comment peut-il en réſulter de plus grandes vîteſſes dans les Vaiſſeaux, ſelon que l'exige la pratique? Cependant cette objection ſi naturelle s'évanouit bientôt, en conſidérant que ſi les réſiſtances des eaux ſur la proue augmentent, les forces du vent ſur les voiles doivent auſſi augmenter, par la même raiſon: ainſi il n'y a plus lieu d'être arrêté. Ayant tenté de prendre pour fondement de la théorie le rapport entre la vîteſſe avec laquelle un fluide jaillit hors d'un vaſe par un orifice, & le poids que ſupporteroit la ſuperficie qui boucheroit cet orifice, tant dans le cas où le fluide ſeroit en repos, que dans celui où il ſeroit en mouvement, comme on le verra très en détail dans le Livre II de ce Volume, on a trouvé la conformité la plus exacte entre les formules déduites de ce rapport, & les réſultats de l'expérience, au moins pour la relation qui regne entre les forces, ſinon dans leur meſure abſolue. Suivant

cette nouvelle théorie, les résistances sont comme les densités des fluides, comme les surfaces choquées, comme les racines quarrées des profondeurs auxquelles elles sont submergées dans les mêmes fluides; comme les simples vîtesses, & comme les simples sinus des angles d'incidence sous lesquels elles sont choquées. Cependant ce n'est pas encore tout; les résistances ne suivent cette loi que dans le cas où la superficie est entiérement submergée dans le fluide, & où la partie antérieure du corps est semblable à sa partie postérieure. Lorsqu'une partie de la surface est hors du fluide, il y a une nouvelle quantité à considérer dans les résistances, qui ne dépend nullement de la surface choquée, mais qui provient seulement de la vîtesse; & cette quantité n'est ni comme les simples vîtesses, ni comme leurs quarrés, mais comme leurs quatriemes puissances. Dans certains cas il doit encore entrer une troisieme quantité dans l'expression de la résistance, qui est comme les quarrés des vîtesses, & comme les surfaces choquées. Cette quantité répond précisément au cas qu'on a considéré jusqu'à présent. Enfin, il y a d'autres circonstances où il faut avoir égard à une quatrieme quantité qui ne dépend aucunement des vîtesses, mais seulement des surfaces choquées. Suivant cette théorie, les résistances dépendent donc de quatre quantités distinctes, dont quelques-unes s'évanouissent dans certains cas; & heureusement, dans les recherches qui regardent la Marine, qui sont celles que nous nous proposons, elles se réduisent ordinairement à une seule, qui est la premiere de celles que nous venons d'énoncer; cependant, dans le cas d'une très-grande vîtesse, on ne peut se dispenser d'avoir égard à la seconde : quant à la troisieme, qui est la seule dont on ait tenu compte jusqu'ici, il est ordinairement inutile d'y avoir égard.

Ce parfait accord de l'expérience avec la théorie nous établissoit, comme on vient de le voir, les fondements de l'édifice; mais il nous restoit une inquiétude : la plupart des expériences faites en petit, ne donnent pas, à beaucoup près, les mêmes

résultats que lorsqu'elles sont faites en grand, parce que dans celles-ci les effets des différents accidents deviennent beaucoup plus sensibles ; & c'est précisément ce qui arrivoit dans la comparaison des expériences faites jusqu'à présent, avec les mouvements & les actions du Vaisseau. Mais il n'en a pas été de même dans notre théorie ; elle n'a fait que gagner à cette épreuve : car lorsque nous avions tout lieu de craindre de très-grandes différences, à cause de l'augmentation que nous avons trouvée dans les résistances ; nous avons eu les résultats les plus satisfaisants. Cette théorie donne la vîtesse des Navires précisément telle qu'on l'observe journellement, soit qu'ils naviguent vent arriere, soit qu'ils naviguent vent largue, ou à la bouline. Mais ce qui est beaucoup plus fort, c'est que cette théorie apprend que non-seulement quelques Navires doivent aller vent largue, presque aussi vîte que le vent, mais encore que quelques-uns ont une vîtesse qui surpasse celle du vent : paradoxe que beaucoup de gens trouveront étrange, mais dont cependant on verra la démonstration, non dans le sens que l'entendoit *Jean Bernoulli*, (1) c'est-à-dire, qu'on pourroit déployer une voilure d'une étendue presque infinie ; supposition tout-à-fait chimérique, & qui ne peut s'appliquer à la pratique ; mais en n'employant que ce qui est consacré par les faits, & ce qui arrive journellement dans plusieurs Bâtiments, tels que les Galeres, les Chebecs, &c. *

---

(1) Œuvres de *Jean Bernoulli*, Tom. II, N. XCIII.

* Nous ferons observer, en passant, que cette idée, toute étrange qu'elle puisse paroître au premier aspect, n'est pas particuliere à notre Auteur. Plusieurs Marins ont saisi la possibilité qu'un Vaisseau pût avoir une vîtesse aussi grande, & même plus grande que celle du vent. Le celebre Amiral Anson, dont l'autorité seroit ici d'un si grand poids, si ces matieres pouvoient en admettre, étoit de cette opinion. (Voyez son Voyage autour du Monde, *Liv. III Chap. 5.*) On peut même concevoir la vérité de cette proposition par un raisonnement fort simple. Lorsqu'un Vaisseau navigue vent arriere, il est clair qu'il se soustrait continuellement à l'action du vent, ce qui fait que l'impulsion du vent sur les voiles, est d'autant moindre que le Vaisseau a plus de vîtesse : mais si le Vaisseau est orienté vent largue, la route faisant alors un angle avec la direction du vent, les voiles ne se dérobent pas autant à son impulsion, puisque le Vaisseau ne la fuit pas directe-

Ayant ainsi trouvé les résistances fournies par notre théorie, parfaitement d'accord avec la pratique, non seulement dans les petites surfaces, mais encore dans les plus grandes que puissent avoir les Vaisseaux, nous avons jugé à propos de la soumettre à une autre épreuve, en l'appliquant à deux autres cas très-différents. Le premier de ces cas consiste à déduire des mêmes principes une nouvelle théorie des *Cerf-volants*, autrement nommés *Cometes*, que les enfants prennent tant de plaisir à élever dans l'air; car, quoique ces machines soient uniquement destinées à leur amusement, elles ont été très-propres, dans ce cas, pour servir de vérification à un objet aussi important. C'est pour cela qu'on trouvera dans un Appendice, à la fin de ce Volume, tout le calcul relatif à cette théorie. On le compare à celui qui résulte de l'ancien systême, afin qu'on connoisse la vérité, avec cette évidence qui ne peut laisser de doutes.

Le second cas auquel nous avons encore appliqué la théorie,

---

ment. Lorsque la route est perpendiculaire à la direction du vent, les voiles & les autres parties du Vaisseau qui éprouvent l'impulsion du vent, la reçoivent à-peu-près toute entiere, quelque vitesse qu'ait le Vaisseau. Il est donc aisé de sentir que puisque, dans ce cas, l'impulsion du vent sur les voiles n'est presque pas diminuée par la vitesse du sillage, ce choc répeté sans cesse, avec la même énergie, doit imprimer au Vaisseau (toutes choses égales d'ailleurs) une vitesse beaucoup plus grande que lorsqu'on cingle vent arriere. On doit concevoir, en même temps, que dans certaines dispositions, il est possible que le Vaisseau acquiere une vitesse égale, ou même plus grande que celle du vent. Nous avons pris, pour exemple, le cas de la perpendicularité de la route avec la direction du vent, afin de rendre notre raisonnement plus facile à saisir: mais on doit concevoir que cet effet doit dépendre de plusieurs causes dont l'influence doit être très-variable suivant l'espece des Navires; comme du rapport des résistances du côté, & de la proue, de la quantité de voiles deferlées, de leur situation, de leur courbure &c. C'est au calcul à combiner tous ces éléments: les bornes étroites de l'esprit humain ne peuvent permettre d'en apprécier l'influence, avec précision, par le seul raisonnement. On verra cette question traitée à fond dans le Tom. II, Liv. 4, Chap. 1 & 2 de cet Ouvrage: il nous suffit ici d'avoir fait concevoir d'avance la possibilité du cas avancé par *D. Georges Juan*. Nous observerons encore que notre raisonnement explique ce qui est dit dans la note 2 de la page 10 de ce Discours, & doit faire sentir en même-temps, combien les moulins à vent ordinaires dont les ailes se meuvent dans un plan vertical, sont supérieurs à ceux qu'on a imaginés, ou qu'on pourra imaginer par la suite, qui se mouveroient horisontalement.

eft aux expériences faites par M. *J. Smeaton*, avec une machine de fon invention, pour déterminer la force avec laquelle l'eau agit fur les roues qu'elle fait tourner, telles que les roues des Moulins. On compare les réfultats de vingt-fept expériences avec les deux théories, fçavoir, celle qu'on a fuivie jufqu'ici, & la nouvelle que nous propofons. On trouve que toutes les expériences correfpondent exactement avec notre théorie, tandis qu'elles s'écartent entiérement de l'ancienne. Ces réfultats nous font d'autant plus favorables, qu'on ne peut avoir aucun doute fur des expériences qui ne nous appartiennent pas, & qui ont été faites, fi long-temps auparavant, dans des vues très-différentes, comme on vient de le dire.

Ayant déterminé & corrigé l'erreur du principe, il nous falloit entrer dans l'examen d'une matiere extrêmement étendue, & qui étoit peut-être plus difficile que fi elle n'avoit été envifagée par perfonne auparavant; parce qu'ordinairement il faut plus de travail pour corriger un défaut, que pour édifier premiérement l'ouvrage. L'erreur que nous avons vue exifter dans la détermination des viteffes, ne fe bornoit pas là; de toute néceffité il devoit y en avoir dans la dérive, dans les angles que les voiles doivent former avec la quille & avec le vent, dans la force des voiles à l'égard de la ftabilité; parce que tous ces éléments dépendent de la relation des réfiftances, qui eft fufceptible de beaucoup de variations, principalement dans le dernier point, où il eft queftion d'équilibrer de plus grands efforts du vent fur les voiles, avec la réfiftance qu'éprouve le côté du vaiffeau, qui eft la même. La maniere de calculer les réfiftances devoit auffi être très-différente, & les corps fufceptibles d'éprouver la moindre réfiftance, très-différents; car une portion de la carene du vaiffeau, placée proche de la furface de l'eau, n'éprouve pas la même réfiftance qu'une autre portion égale & femblablement choquée, placée à une plus grande profondeur.

Mais les articles fpécifiés ci-deffus, ne font pas encore les feuls dans lefquels on fe trompoit: on trouve également quel-

ques erreurs dans ce que l'ancienne théorie nous enſeigne ſur le manege du Vaiſſeau. D'après elle, l'axe des réſiſtances, & celui de la force motrice, doivent coïncider pour équilibrer le Vaiſſeau, & obtenir un manege parfait; cependant dans la pratique, lorſque le Vaiſſeau marche, toutes voiles dehors, l'axe des réſiſtances eſt à-peu-près d'un ſeptieme de toute la longueur du Vaiſſeau, plus à la poupe que celui de la force motrice; & par conſéquent, d'après ce qui a été enſeigné, le Vaiſſeau devroit arriver continuellement, & avec une grande force : mais on voit le contraire, les Vaiſſeaux ont plus de propenſion à venir au vent, ſur-tout lorſqu'il vente bon frais. Il eſt donc néceſſaire qu'il y ait encore, à cet égard, quelque vice dans la théorie, ou qu'on ait omis quelques conſidérations très-eſſentielles. En effet, on en rencontre deux de cette nature, qui ont été entiérement négligées; on n'a eu aucun égard à la courbure de la voile qui porte l'axe de la force motrice beaucoup plus vers la poupe, & on n'a point conſidéré l'inclinaiſon du Vaiſſeau qui porte encore cet axe beaucoup davantage du même côté. Si ces changements dans la ſituation de l'axe de la force motrice étoient conſtants, il n'y auroit cependant pas beaucoup à corriger dans ce qu'on a enſeigné, on pourroit même s'y arrêter ſans beaucoup d'inconvenients; mais ces changements ſont variables, ils dépendent de la force du vent, de la figure des voiles, & de la ſtabilité du Navire, ou de ſa force pour porter la voile. Si on avoit placé la mâture conformément à ce qui nous a été enſeigné; il eut été impoſſible que le Vaiſſeau gouvernât, & l'inconvénient eût été beaucoup plus grand encore, ſi on avoit employé les proportions que M. *Bouguer* à prétendu qu'on devoit donner à la mâture.

Les roulis & les tangages ne ſont pas les points où l'ancienne théorie eſt le moins fautive; dans cette théorie le Vaiſſeau eſt conſidéré comme un pendule qui n'a pas d'autre action que celle qui réſulte d'un mouvement d'oſcillation: & d'après cette idée, on

on conclut que tous les roulis & les tangages doivent se faire dans le même temps. On ne voit pas dans cette hypothese, que les roulis aient aucune relation avec l'action de la lame, qui en est cependant la véritable cause : & quoiqu'on puisse croire que la théorie se rapporte seulement aux seconds ou troisiemes roulis, qu'on peut regarder comme n'étant plus soumis à l'action de la lame, peut-on douter que les premiers ne soient d'un plus grand effet, & qu'il ne soit, par cette raison, plus important d'en connoître la nature ? Il est évident que cette théorie n'est nullement d'accord avec les faits, pour ce qui concerne les premiers roulis, parce que tous ces balancements s'exécutent nécessairement dans le temps que la lame emploie à faire son passage sous le Vaisseau ; & la durée de ce passage est, on ne peut pas plus, inconstante, puisqu'elle dépend de la grandeur des lames. Il faut convenir qu'on ne peut être trop étonné qu'on ait pu admettre, aussi long-temps & aussi généralement, de semblables erreurs. On n'a nullement considéré, dans ces mouvements, les effets des lames, ou des coups de mer, & il paroît que ces calculs n'ont été proposés que pour des mers enchantées, & non pour celles qui passent par-dessus les Vaisseaux, qui les inondent, & qui les font périr. Un Bâtiment s'éleve avec plus de facilité sur la lame qu'un autre : qui est-ce qui doutera que celui-ci ne soit plus exposé à être inondé, & que le premier ne coure plus le risque de rompre sa mâture ? Il n'est donc pas seulement nécessaire de considérer le temps dans lequel le roulis s'exécute, mais il faut encore examiner sa grandeur, & l'élevation des eaux sur le côté du Vaisseau. Les proues aiguës, ou de moindre résistance, que les Géometres ont tant desirées, seroient exposées à ces accidents ; elles seroient continuellement submergées, & non-seulement elles feroient courir les risques d'un naufrage, mais encore elles ne produiroient aucun gain pour la marche qui est l'unique objet qu'on a eu ordinairement en vue ; car les résistances croîtroient à mesure que ces proues se submergeroient & s'inonderoient davantage, par le choc répété des lames.

Nous avons fait enforte que notre théorie fût exempte de toutes les erreurs que nous avons rapportées ci-dessus, & de quelques-autres que nous nous dispenserons d'indiquer, pour ne pas trop nous arrêter; mais pour l'exposer avec clarté, nous avions besoin de beaucoup de principes sur la Méchanique, particuliérement sur l'action & le mouvement des fluides. Nous avons donc pensé qu'il convenoit de les exposer dès le commencement de notre Ouvrage, & d'y renfermer également ce qui conduit à la théorie des machines simples & composées, à celle de leurs frottements, & à la connoissance des loix du choc des corps, & de leurs autres actions. Tous ces objets conviennent à la Marine, & conduisent directement à la résolution de toutes les questions embarrassantes que cette Science présente, & qu'on verra traitées dans cet Ouvrage, que nous avons distribué dans l'ordre qui suit.

Le premier Volume est divisé en deux Livres, dont le premier contient neuf Chapitres. Le Chapitre premier traite des définitions, axiomes, ou loix du mouvement, avec les principes déduits de l'expérience sur l'action de la gravité. Le Chapitre II traite de la composition & décomposition du mouvement & des forces agissantes. Le Chapitre III contient tout ce qui a rapport au centre de gravité, ou des masses, & à celui des puissances, ou des forces : on donne les formules de leurs vîtesses, des espaces qu'ils parcourent, & des temps qu'ils emploient à les parcourir. Le Chapitre IV traite de la rotation d'un système quelconque de corps libres, ou liés entre eux; de l'angle giratoire ou de rotation qu'ils prennent en vertu de puissances quelconques qui agiroient sur le système. On y démontre que la rotation du système se fera de la même maniere, soit qu'on suppose son centre de gravité fixe, soit qu'on le suppose libre; & on fait voir, en même temps, que ce centre doit se tenir le plus bas qu'il est possible, dans quelque corps, ou machine que ce soit. On ajoute comme une conséquence de cette théorie, celle des pendules, & des leviers des trois genres, en ne les considérant pas seulement dans l'état de repos, comme on

l'a toujours fait, mais dans celui de mouvement; & on examine leurs forces & les résistances qu'ils doivent avoir dans leurs fibres & dans toutes leurs parties. On traite, dans le Chapitre V, de l'axe & du rayon de rotation, ou du point sur lequel tourne un corps ou un système de corps; on y fait voir que ce point ne peut être fixe, à moins qu'il ne soit le centre de gravité. Le Chapitre VI renferme toute la théorie de la percussion des corps: nous nous sommes un peu étendus sur cette matiere, tant à cause qu'elle est le principe des Chapitres suivants, que parce qu'il étoit intéressant d'éclaircir un sujet qui a fait naître tant de disputes parmi les Auteurs les plus respectables; & particuliérement la question des forces vives & des forces mortes. On donne des formules pour trouver les temps, les vitesses, les actions & les espaces parcourus par les corps dans l'acte du choc, & pour trouver de même les forces avec lesquelles ils agissent dans un instant quelconque. On applique les solutions à la pratique, & aux expériences faites par les Auteurs de Physique Expérimentale, afin de faire voir l'accord de la théorie avec l'expérience, & les effets surprenants du choc. On termine ce Chapitre en mettant dans le plus grand jour l'erreur où sont tombés plusieurs Auteurs célebres, en confondant les centres d'oscillation & de percussion; car quoique ces centres coïncident en certains cas, ils ne sont cependant pas toujours les mêmes.

Le Chapitre VII contient le mouvement des corps sur des plans inclinés, ou sur des surfaces courbes: on détermine le temps de leur chûte par la cycloïde, & on en fait l'application aux pendules. On calcule la durée de leurs oscillations, & l'espace que parcourent les corps, qui tombent librement, pendant la durée d'une oscillation. On termine ce Chapitre par l'examen du mouvement des corps, dans les cas où ils tombent en roulant le long d'un plan incliné, ou d'une surface courbe.

On trouve, dans le Chapitre VIII, une nouvelle théorie sur le frottement; c'est un objet sur lequel on n'a encore point vu

la théorie d'accord avec l'expérience, quoiqu'il ait été traité par les Géometres du premier ordre. On démontre que la force du frottement n'eſt pas ſeulement proportionelle au poids, ou à la preſſion qui le produit, comme l'ont cru MM. *Amontons* & *Bilfinger*. On manifeſte les erreurs qui réſultent de la théorie donnée par le célebre *Léonard Euler*; & on fait voir comment tous les faits ſe concilient avec la nôtre.

Enfin on termine le premier Livre par le Chapitre IX, qui traite des Machines ſimples, ſçavoir, du Plan incliné, du Coin, de la Hache, de la Vis, du Treuil ou Cabeſtan, de la Poulie, & des Mouffles. On donne en détail la théorie de toutes ces Machines, en ayant égard au frottement qu'elles éprouvent, attention qui eſt abſolument néceſſaire pour en déduire leurs véritables forces. On détermine les plus grandes & les petites forces qu'elles puiſſent produire, & on applique le tout à quelques faits de pratique.

Le Livre ſecond eſt un Traité des Fluides. Dans le Chapitre premier on détermine l'action & la force, avec laquelle ils agiſſent ſur les corps dans le cas du repos, & les conditions qui doivent concourir pour que cet état ſubſiſte. Le Chapitre II traite de la force avec laquelle les fluides en mouvement, agiſſent contre une différencielle de ſuperficie, ou contre une ſurface extrêmement petite. On determine cette force dans tous les cas de mouvement, ſoit horiſontal, vertical, ou oblique, de même que pour toutes les différentes directions & angles d'incidence; & on finit ce Chapitre par l'expoſition des différentes théories que les Géometres les plus célebres ont données ſur cet objet, en faiſant voir les erreurs auxquelles elles ont conduit, étant appliquées aux fluides peſants. Le Chapitre III traite de l'action des mêmes forces ſur les ſuperficies planes: on fait voir les différentes variations qui ont lieu, ſelon que la ſurface ſur laquelle elles agiſſent, eſt entiérement ſubmergée dans le fluide, ou ne l'eſt qu'en partie, à cauſe de la dénivellation du fluide qui a lieu dans ce cas, & d'où réſultent

ces variations. On termine ce Chapitre en expliquant une différence qui se trouve entre notre théorie, & ce qui est exposé dans une proposition de la *Philosophie Naturelle* de *Newton*; & on détermine ensuite, dans le Chapitre IV, l'action des mêmes forces des fluides contre des superficies quelconques.

Le Chapitre V traite des résistances horisontales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & de celles qu'ils éprouvent lorsqu'étant en répos, les fluides se meuvent contre eux; car ces deux cas ne sont point du tout le même, comme on l'a cru jusqu'ici. On combine des expériences pour faire voir combien elles s'accordent avec la relation que la théorie fournit. Il est question, dans le Chapitre VI, des résistances verticales qu'éprouvent également les corps, soit qu'ils se meuvent dans les fluides, soit que les fluides se meuvent contre eux: & l'on fait voir la grande différence qu'il y a entre ces deux cas. On démontre, dans le Chapitre VII, l'altération des résistances occasionnée par les dénivellations des fluides, produites par le mouvement des corps: & on fait voir en quoi les résistances dépendent de la longueur des corps. On traite, dans le Chapitre VIII, des lignes & des surfaces qui éprouvent la plus grande ou la moindre résistance, de même que de celles qui, jouissant de la même propriété, doivent terminer des bases données, ou qui doivent renfermer un corps déterminé; on donne, à la fin de ce Chapitre, une table des abscisses & des ordonnées de la courbe, qui éprouvera la moindre résistance, en comprenant le plus grand espace.

Le Chapitre IX donne les formules qui expriment le rapport entre les temps, les espaces parcourus, & les vitesses des corps qui se meuvent d'un mouvement progressif dans les fluides: on démontre qu'ils ne peuvent parvenir à leur plus grande vitesse, qu'après un temps infini, & après avoir parcouru un espace infini; mais que cependant, après un temps très-court, ils acquierent une vitesse qui ne differe que fort peu de la plus grande; & ce Cha-

pitre eſt terminé par la théorie des lames, dont on aſſigne les vîteſſes, & les grandeurs. Le Chapitre X traite des moments dont les corps éprouvent l'action dans leur mouvement progreſſif horiſontal, & de la ſtabilité qui réſulte de ces moments, tant dans le cas du repos que dans celui du mouvement. Il eſt queſtion, dans le Chapitre XI, de l'inclinaiſon que prennent les corps, par l'impulſion de puiſſances quelconques : on rapporte les différentes ſolutions que ce même cas préſente, ſelon les figures des mêmes corps ; & l'on indique les précautions qu'il eſt eſſentiel de prendre pour éviter les erreurs auxquelles peuvent conduire les formules données juſqu'ici, ſi on ne les conſidere pas dans les ſuppoſitions qu'elles exigent. On éclaircit le tout par des exemples.

Le Chapitre XII contient les formules qui expriment les moments que ſubiſſent les corps dans leur rotation dans les fluides, ſur un axe qui paſſe par leur centre de gravité. Le Chapitre XIII donne les formules des vîteſſes angulaires des mêmes corps, & les longueurs des pendules dont les oſcillations ſont iſochrones avec les leurs, ainſi que celles des plus grandes & des plus petites vîteſſes qu'ils puiſſent acquérir dans leurs oſcillations. Enfin on termine ce premier Volume par deux Appendices, le premier ſur la théorie des Cometes ou Cerf-volants que les enfants élevent dans l'air ; & le ſecond ſur la réſiſtance des fluides dans les machines, afin de confirmer notre théorie des réſiſtanees, ſelon que nous l'avons déjà dit.

Le ſecond Volume traite entiérement de la Marine, & eſt diſtribué en cinq Livres. Le premier Livre contient tout ce qui appartient à la connoiſſance & à la conſtruction du Navire. Ce Livre eſt diviſé en ſept Chapitres, dont le premier donne une idée générale des Bâtiments de mer, des propriétés qui leur conviennent, de leur figure, de la maniere de les gouverner, de la diſpoſition & du nombre de leurs mâts & voiles. Le Chapitre II traite de la variété infinie qu'il peut y avoir dans les Bâtiments, & de leur conſtruction, ſelon la pratique la plus ancienne. On expoſe, dans

le Chapitre III, la maniere de tracer les plans de ces anciennes constructions, suivant l'usage des différentes nations. Le Chapitre IV enseigne à tracer les plans, selon la pratique actuelle des Constructeurs Français & Anglais les plus instruits par la théorie & l'expérience. On donne, dans le Chapitre V, une méthode nouvelle & géométrique pour décrire ces plans, en formant tous les couples d'une extrémité du navire à l'autre, par des arcs de cercle; on évite, par ce moyen, le grand nombre de tâtonnements qui sont inévitables par les autres méthodes. Le Chapitre VI donne la maniere de décrire le plan des œuvres mortes, suivant les différentes méthodes; & dans le Chapitre VII, qui termine ce Livre, on donne, dans le même détail, la description des ponts.

On examine, dans le Livre II, le corps du Navire, & ses différents centres, ses forces, ses résistances, & ses moments. Le Chapitre premier traite de la flotaison, & de la ligne d'eau du Vaisseau, de son poids total, & de celui de sa coque; on donne un exemple de la pratique du calcul; on enseigne la maniere de faire varier la ligne d'eau, en faisant un changement dans la forme du Navire. On donne les volumes déplacés par les Vaisseaux de différents rangs, & la relation qu'ont ces volumes avec les dimensions linéaires des capacités, & on fait voir l'erreur où tombent les Constructeurs en négligeant de régler l'échantillon des pieces de bois, d'après les proportions réquises. On donne aussi des regles faciles pour déterminer la grandeur des Vaisseaux, relativement à l'artillerie & à la variété des autres poids dont ils doivent être chargés, en ayant égard que le tout, même les équipages & les vivres, suive, à-peu-près, la raison des cubes des dimensions linéaires; & on finit ce Chapitre, en donnant le rapport que les capacités ont, & doivent avoir, avec le poids total des Vaisseaux, y compris leurs munitions, & les autres choses nécessaires qui composent le total de l'armement. Le Chapitre II traite de la maniere de trouver le centre du volume que le Navire occupe dans le fluide, & la regle qu'on

donne eſt éclaircie par un exemple. On explique comment il peut arriver que ce centre varie, non-ſeulement par la variation de la ligne d'eau ou de flotaiſon, mais encore en variant le volume de la carene, dans quelqu'une de ſes parties; & on termine ce Chapitre, en donnant la méthode pour trouver facilement le même centre, dans des Vaiſſeaux ſemblables par leur fond, ayant déterminé d'avance celui d'un ſeul; & cette méthode peut s'appliquer aux cas où il y auroit quelques légeres différences entre ces Vaiſſeaux.

Le Chapitre III enſeigne à trouver la hauteur du Métacentre au-deſſus du centre de volume, & contient un exemple pour faciliter l'intelligence de la méthode. On donne de plus une regle facile pour trouver ce point dans les Vaiſſeaux ſemblables, ou dont la différence eſt petite; & on termine ce Chapitre, en faiſant, pour les inclinaiſons de poupe à proue, le même examen & les mêmes recherches que celles qu'on a faites d'abord pour les inclinaiſons latérales.

Dans le Chapitre IV on enſeigne la maniere de trouver le centre de gravité de la coque, & même du vaiſſeau entier, par le moyen du poids de toutes ſes parties, & de la place qu'elles occupent; & on éclaircit la regle par un exemple. On donne également la maniere de trouver le même centre, par le moyen d'une expérience facile, faite ſur un autre Vaiſſeau, ayant égard enſuite à la différence qu'il pourroit y avoir entre eux; ce qui fournit une petite formule, de laquelle on déduit différents Corollaires, non-ſeulement ſur la variation en hauteur du centre de gravité, mais encore ſur la ſtabilité du Vaiſſeau, ou ſur les inclinaiſons différentes qu'il prend toutes les fois qu'on fait varier ſon volume & ſon poids dans quelques-unes de ſes parties. On applique tout ceci à differents exemples pris ſur d'autres Vaiſſeaux; & l'on démontre finalement l'erreur dans laquelle eſt tombé M. *Bouguer*, en aſſurant que dans les Vaiſſeaux à trois ponts, le Métacentre ne s'éleve que d'un ou deux pieds au-deſſus du centre de gravité.

Le

Le Chapitre V enseigne la maniere de calculer les résistances horisontales qu'éprouve un Vaisseau, tant celles qui sont directes, ou par la proue, que celles qui sont latérales, ou par le côté; & on fait voir l'ordre qu'il faut suivre dans le calcul pour éviter l'embarras & la confusion. Ce calcul fournit seulement deux quantités pour l'expression des résistances, dont l'une suit le rapport des simples vîtesses, & dont l'autre, qui provient de la dénivellation du fluide à la poupe & à la proue, suit le rapport de leurs quatriemes puissances. Les deux autres quantités qui se trouvent dans la formule des résistances, sont négligeables dans le calcul des actions du Vaisseau. On donne ensuite la maniere de calculer le changement qui arrive dans ces résistances, selon que le Vaisseau est un peu plus ou un peu moins calé. Enfin on termine ce Chapitre, en donnant des formules faciles pour trouver les mêmes résistances pour d'autres Navires dont les fonds seroient *semblables* à ceux du premier, par le moyen de celles déjà calculées pour celui-ci; & on fait observer que la quantité qui est comme les quatriemes puissances des vîtesses, est susceptible d'être négligée dans les Vaisseaux d'une grande capacité, tandis qu'au contraire, on ne peut se dispenser d'y avoir égard dans ceux dont la capacité est petite.

Le Chapitre VI enseigne la maniere de calculer les moments qu'éprouve le vaisseau dans ses inclinaisons qui proviennent de l'action du vent sur les voiles, * tant dans le cas où le vaisseau seroit en repos que dans celui où il seroit en mouvement; parce que ces moments peuvent être fort différents dans ces deux cas. On enseigne également à calculer la variation qui arrive dans ces moments, quand le Vaisseau est plus ou moins calé dans le fluide; & l'on donne des formules pour trouver facilement, par le moyen des moments déjà trouvés pour un Navire, ceux qui correspondent à tout autre Navire semblable au premier par ses fonds. On

* Ce sont ces moments que les Marins Espagnols appellent *Aguante de Vela*; c'est comme si on disoit en Français, la force, ou l'énergie, de la voile.

finit ce Chapitre, en faisant voir combien il importe, pour que le Navire porte bien la voile, que le centre des résistances horisontales soit le plus élevé qu'il est possible, & que les côtés du Navire, à partir de l'horisontale qui passe par le centre de gravité, & en allant vers le haut, soient verticaux autant qu'il se peut; car cette qualité de porter la voile ne dépend pas seulement de la section horisontale du Navire faite à fleur d'eau, comme on l'a cru & enseigné jusqu'ici.

Dans le Chapitre VII on traite des moments qui agissent sur le Navire dans son mouvement de rotation horisontal, lorsqu'il *vire*, comme disent les Marins, ou lorsqu'il vient au lof, ou qu'il arrive. On voit, par ces moments, la propension que le Navire auroit pour arriver, s'il n'en étoit pas empêché par d'autres forces. On explique la variation qui arrive dans les mêmes moments, lorsque le vaisseau est plus ou moins calé; & on donne des formules pour trouver ceux qui correspondent à un Navire quelconque, semblable au premier par ses fonds.

Le Chapitre VIII traite des moments que subit le Vaisseau dans son mouvement de rotation, que les Marins appellent *Tangage*, avec la même étendue & les mêmes circonstances qu'on a considéré ceux qui ont lieu dans les roulis. On termine le Livre II par le Chapitre IX, où l'on traite des moments qui, par leur action sur le Vaisseau, occasionnent ce que les Marins appellent *Arquer*: on fait voir la cause d'où provient cet effet, & l'on démontre que la force d'un seul côté du Navire seroit capable de le prévenir presque entiérement, si ce n'étoit la désunion ou le jeu qu'il y a ordinairement dans la charpente & les ferrures du Vaisseau; ce qui fait voir la nécessité de veiller davantage à la liaison des pieces, quoique la principale attention à avoir pour éviter cet accident, consiste dans la figure des fonds du Navire, & dans l'attention de rassembler le plus qu'il est possible les différents poids vers son centre de gravité. On considere encore les mêmes moments dans le cas où le Navire est vuide; & on fait voir évidemment que

dans cet état, il est encore plus exposé à s'arquer. Après cela on examine l'arc produit par les efforts qui tendent à désunir le Navire dans le sens de sa largeur, lequel n'a point encore été considéré, quoiqu'il soit très-considérable, & en même temps très-préjudiciable, sur-tout dans les Vaisseaux de guerre, lorsque leurs batteries sont fort élevées au-dessus du centre de gravité. On fait voir le mauvais ordre avec lequel on distribue l'artillerie dans les Navires, & l'on donne les regles qu'on devroit suivre pour éviter les inconvénients qui résultent très-souvent de ce qui se pratique aujourd'hui.

Le Livre III traite des machines qui servent à mouvoir & à gouverner le Vaisseau. Le Chapitre premier a pour objet les voiles; on y considere la figure qu'elles prennent, la force avec laquelle le vent agit sur elles, & la direction de cette force. On trouve que la courbe qu'elles forment est très-différente de la *Chaînette*, qu'on a cru jusqu'à présent qu'elles formoient; & l'on donne les abscisses & les ordonnées qui doivent servir à la décrire. On détermine la force absolue avec laquelle les voiles agissent, & l'on fait voir qu'elle ne dépend pas seulement de l'angle que le vent forme avec les vergues, mais aussi de la courbure plus ou moins grande que la voile prend vers ses extrémités; courbure qui varie selon la vitesse du vent, la qualité de la voile & sa grandeur. On détermine encore la direction de l'action des voiles, & le centre de leurs forces, lequel tombe toujours plus vers la poupe que le centre même des voiles, selon la courbure qu'elles prennent, & selon leur largeur; ce qui est une des causes qui obligent le Navire à venir au vent. On applique ensuite cette théorie à différents exemples de pratique, & on en conclut la grande dérive que doivent éprouver les vaisseaux, par la seule augmentation du vent, indépendamment des lames & des coups de mer, que les Marins regardent, en ce cas, comme la seule cause de cette dérive. Enfin on donne des tables, où l'on trouve la surface de chaque voile

exprimée en pieds quarrés, l'élevation du centre de gravité de chacune d'elles, & la valeur de leurs moments tant verticaux qu'horisontaux, avec une application à tous les cas qui se présentent le plus généralement dans la pratique.

Le Chapitre II traite du gouvernail, de ses forces relativement aux différents augles qu'il forme avec la quille, tant du côté du vent que du côté de sous le vent, & relativement à sa figure qui contribue beaucoup à ses effets; quoique jusqu'ici on n'ait pas fait attention à cette circonstance intéressante. On trouve l'angle sous lequel le gouvernail doit faire le plus grand effet; mais en comparant l'effet qui résulte de cette disposition, avec ce qu'on obtient dans la pratique ordinaire, on fait voir que l'avantage se réduit à bien peu de chose; & l'on donne les raisons qui doivent porter à donner la préférence aux angles que les Marins emploient communément, sur ceux que la Géométrie détermine.

On donne, dans le Chapitre III, la théorie de la rame, machine bien simple dans la pratique; mais si compliquée pour sa théorie, qu'il n'y a que le célebre *Léonard Euler*, qui nous en ait pu donner l'analyse d'une maniere satisfaisante. Ce Géometre nous auroit donné également le calcul légitime des véritables forces, & des vrais effets de cette machine, s'il ne se fût pas fondé sur la loi des résistances qui est communément reçue, & dont nous avons fait connoître la fausseté. On donne fort en détail tout le calcul, en y faisant entrer le moment le plus petit, & on en conclut la vîtesse que doit prendre l'embarcation. L'accord des résultats du calcul avec les faits que présente la pratique, est une nouvelle confirmation de notre théorie des résistances. On fait observer combien il est essentiel de rendre la partie extérieure de la rame aussi légere qu'il se peut; & l'on trouve la force & la vîtesse les plus avantageuses, avec lesquelles le rameur doit agir, pour que l'embarcation prenne la plus grande vîtesse possible. Enfin on cherche quel est le rapport le plus avantageux qu'il

doit y avoir entre les longueurs des parties extérieures & intérieures de la rame. On fait voir que ce rapport n'eſt pas conſtant, quoique dans la même embarcation & avec les mêmes rameurs, parce qu'il dépend de la force qu'ils emploient, & du rapport entre le temps qui s'écoule entre un coup de rame & l'autre, & le temps que la rame eſt maintenue dans l'eau: de ſorte que plus ces quantités ſont grandes, plus auſſi la partie extérieure de la rame doit être grande à l'égard de l'intérieure. La même choſe auroit lieu, quand le nombre des rameurs ſeroit plus grand; & c'eſt tout le contraire, lorſque la réſiſtance de la proue devient plus conſidérable : de façon que les grandes embarcations exigent une moindre longueur dans la partie extérieure de la rame. On conſidere auſſi dans tout ce calcul la force des rameurs; & d'après différentes remarques qu'on expoſe enſuite, on conclut que la meilleure diſpoſition de la rame eſt à *fort-peu-près* celle dont les Marins font uſage, en prenant cependant quelques précautions qui ſont indiquées par la différence des embarcations. On termine ce Livre par l'application de la théorie à un exemple tiré d'une Galere, & on fait voir le peu d'effet que produiſent quelques moments.

Le Livre IV traite des actions & des mouvements du Navire. Le Chapitre premier eſt employé à l'examen de la marche, ou du mouvement progreſſif imprimé au Vaiſſeau par l'impulſion du vent ſur les voiles, & du rhumb de vent qu'elle l'oblige de ſuivre. On donne quatre formules qui expriment les quatre vîteſſes que nous diſtinguons dans le Vaiſſeau, qui ſont, la vîteſſe directe, ou dans la direction de la quille de poupe à proue; la vîteſſe latérale, ou perpendiculaire au côté; la vîteſſe oblique, ou celle dans le ſens de la route que le Vaiſſeau ſuit effectivement, & qui réſulte des deux premieres; enfin la vîteſſe avec laquelle le Vaiſſeau s'éleve dans le vent, ou celle avec laquelle il gagne, directement en oppoſition au vent, ſelon la ligne même de ſa direction. A quoi on ajoute l'expreſſion ou la valeur de l'angle de la dérive,

On analyse ensuite ces formules, & on en déduit les conséquences qu'elles présentent. On voit, au premier coup d'œil, que les quatre vîtesses seroient exactement proportionnelles à celles du vent, sans la courbure des voiles qui altére un peu cette proportion. On voit également, que plus le rapport entre la résistance du côté & celle de la proue sera grand, plus la vîtesse directe ou par la proue sera grande, & plus la vîtesse latérale sera petite; & pour que le Vaisseau gagne au vent, on voit qu'il est nécessaire que ce rapport soit plus grand que celui de la tangente de l'angle que le vent forme avec la quille, à la tangente de l'angle que la perpendiculaire à la quille forme avec la direction suivant laquelle se fait la force des voiles. Ces formules manifestent également, que les quatre vîtesses augmentent à mesure qu'on augmente la voilure, & que les vîtesses directes & obliques augmentent à un tel point, quand on navigue vent largue avec tout son appareil, qu'elles arrivent enfin à être plus grandes que celles du vent. On indique les cas où cela arrive; & quoiqu'ils n'aient pas lieu dans les Navires, ils se rencontrent dans les Galeres & les Chebecs. On applique ensuite ces formules à différents exemples de pratique, c'est-à-dire à des exemples relatifs à la disposition ordinaire des appareils qu'emploient les Marins, tant vent en poupe, que vent largue, & à la bouline; & on trouve la pratique entiérement d'accord avec les solutions qui résultent des formules. Il n'en est pas la même chose des solutions que donne l'ancien systême des résistances; les vîtesses qu'on en déduit pour les Navires sont bien éloignées de celles que la pratique manifeste. On fait voir encore que l'augmentation de la vîtesse directe provenant de la plus grande raison, dans laquelle peuvent être les résistances latérales & par la proue, ne s'étend pas aux cas où cette raison augmenteroit, en allégeant ou en faisant caler d'avantage le Vaisseau; car quoique effectivement on trouve, dans ce cas, quelque différence, elle est si petite qu'elle ne mérite pas la moindre atten-

tion. L'expreſſion totale de la même vîteſſe réduite en ſérie, facilite la maniere de combiner les dimenſions principales qu'on doit donner aux Vaiſſeaux pour qu'ils prennent la plus grande marche poſſible. En augmentant leur longueur, & en diminuant à proportion leur profondeur, on augmente la vîteſſe; mais on verra que cela n'eſt pas ſans inconvénient. La vîteſſe augmente pareillement lorſqu'on augmente la longueur, & qu'on diminue à proportion la largeur. Mais dans le cas où l'on ſe donneroit une longueur conſtante, & qu'on feroit varier ſeulement la largeur & la profondeur, on trouve qu'il eſt avantageux, pour naviguer vent arriere, ou avec un vent très-largue, d'augmenter la largeur, & de diminuer la profondeur : c'eſt tout le contraire en naviguant à la bouline, ou avec des vents près. C'eſt auſſi ce qu'on obſerve journellement dans la pratique, & ce qu'on ne peut déduire de l'ancien ſyſtême des réſiſtances. On termine ce *Chapitre* en démontrant par les mêmes formules, qu'avec des vents modérés, les petits bâtiments doivent mieux marcher que les grands qui leur feroient ſemblables; & qu'au contraire, les grands bâtiments ont l'avantage avec un vent violent.

Le Chapitre II traite des angles que les voiles & le vent doivent former avec la quille, pour que le Navire puiſſe prendre la plus grande marche qu'il eſt poſſible. On a jugé à propos de ſéparer cet objet du Chapitre précédent, auquel il appartenoit naturellement, à cauſe de ſon étendue, des attentions qu'il exige, & des circonſtances particulieres auxquelles il faut avoir égard. On donne premiérement une formule qui exprime la valeur de l'angle que doit former la voile avec la quille, pour que le Vaiſſeau marche avec le plus de vîteſſe qu'il eſt poſſible, en ſuppoſant conſtant l'angle que forme le vent avec la même quille. Cette formule fait voir que cet angle de la voile n'eſt pas conſtant, quoique dans un même Vaiſſeau, comme les Géometres l'ont cru généralement juſqu'ici; parce que non-ſeulement il dépend de la relation entre les réſiſtances du côté & de la proue, mais encore de la quantité de

voiles que porte le vaiſſeau, & de la courbure des mêmes voiles: enſorte que cet angle doit être d'autant plus petit, que le rapport des réſiſtances ſera plus grand, que la quantité de voiles déferlées ſera plus grande, & que leur courbure ſera plus petite. On en apporte pluſieurs exemples; en ſuppoſant un vaiſſeau de 60 canons, allant à la bouline, avec tout ſon appareil, on a trouvé cet angle de 28° 47′, & ſi on ſuppoſe qu'il navigue ſeulement avec les deux voiles majeures, on le trouve de 40° 42′; angle qui eſt à-très-peu-près le même que celui qu'emploient les Marins dans tous les cas. On cherche enſuite quel eſt le vent qui fait marcher un Vaiſſeau avec le plus de viteſſe qu'il eſt poſſible, & on démontre que ce n'eſt pas toujours le même vent qui produit cet effet, ni même le vent arriere; quoiqu'on ait cru généralement juſqu'ici que le vent arriere étoit, ſans contredit, le plus avantageux, toutes les fois que la quantité de voiles déferlées demeuroit la même. Perſonne ne s'eſt perſuadé que le vent largue pouvoit être plus avantageux; & lorſque l'expérience a forcé de reconnoître cet effet, on l'a ſeulement attribué à ce qu'en naviguant vent arriere, les voiles ſe couvrent mutuellement, & ſe dérobent le vent les unes aux autres. On trouve la formule qui exprime la valeur de cet angle le plus avantageux que doit former le vent, & par cette formule on fait voir que cet angle eſt variable, parce qu'il dépend du rapport dans lequel ſeront les réſiſtances du côté & de la proue, de la quantité de voiles que le Vaiſſeau porte, & de la courbure des mêmes voiles : enſorte que, plus cette raiſon des réſiſtances ſera grande, qu'il y aura une plus grande quantité de voiles déferlées, & que la courbure des voiles ſera moindre, ou que le vent ſera moins violent, plus l'angle du vent qui eſt néceſſaire pour faire marcher le vaiſſeau le plus vîte qu'il eſt poſſible, ſera ouvert. On trouve que pour un Vaiſſeau de 60 canons, lorſqu'il ne porte pas plus de 8934 pieds quarrés de voilure, c'eſt le vent arriere qui de tous les vents le fera marcher avec le plus de vîteſſe; qu'auſſi-tôt qu'on augmente la quantité

quantité des voiles, ce n'eſt plus le vent arriere qui a cet avantage, mais un autre vent plus ouvert; & enfin ce Vaiſſeau portant une voilure de 17680 pieds quarrés, c'eſt le vent qui formera avec la quille un angle ouvert de 41° 56′, qui lui donnera le plus de vîteſſe. On ſubſtitue enſuite les angles les plus avantageux dans la formule qui donne la vîteſſe, & on trouve le *maximum maximorum* de la vîteſſe, ou la plus grande vîteſſe qui puiſſe réſulter dans les cas innombrables qui peuvent avoir lieu. Dans le Vaiſſeau de 60 canons on trouve cette plus grande vîteſſe de $\frac{74}{100}$ de celle du vent; & dans un Chébec elle eſt de $\frac{163}{100}$ de la même vîteſſe: enſorte que la vîteſſe de ce dernier eſt de $\frac{63}{100}$ plus grande que celle du vent. Pour trouver la plus grande vîteſſe avec laquelle un Vaiſſeau puiſſe gagner dans le vent, & la relation entre les angles qui doivent la produire, on parvient à une formule très-compliquée. Cette formule fait voir que les angles qui donnent cette plus grande vîteſſe, ne peuvent pas être les mêmes que ceux qui procurent au Vaiſſeau le plus grand ſillage qu'il eſt poſſible; mais qu'ils en different beaucoup, & qu'ils dépendent, comme dans les autres cas, non-ſeulement de la relation qui regne entre la réſiſtance du côté & celle de la proue, mais encore de la quantité de voiles que le Vaiſſeau porte, & de la courbure des voiles, ou de l'impétuoſité du vent: de façon que plus le Vaiſſeau porte de voiles, & moins le vent a de force, plus les angles que doivent former le vent & les voiles avec la quille, pour gagner au vent le plus qu'il eſt poſſible, doivent être aigus. Finalement, ayant trouvé les valeurs de ces angles, & les ayant ſubſtituées dans la formule qui donne la vîteſſe avec laquelle le Vaiſſeau s'éleve dans le vent, on trouve l'expreſſion de la plus grande de ces vîteſſes. Dans le Vaiſſeau de 60 canons, on la trouve des $\frac{164}{1000}$ de la vîteſſe du vent, tandis qu'en ſuivant la méthode qu'empioient les Marins, elle eſt ſeulement de $\frac{125}{1000}$; d'où l'on voit qu'il eſt poſſible de gagner au vent un tiers de plus qu'on ne l'a fait juſqu'ici.

Le Chapitre III s'étend sur l'inclinaison que doivent prendre les Vaisseaux en vertu de l'impulsion du vent sur les voiles : car ayant déjà examiné, dans le Chapitre VI du Livre II, les moments avec lesquels les côtés résistent à l'inclinaison ; & dans le Chapitre premier du Livre III, ceux que le vent produit dans les voiles, il n'est question que d'égaler ces moments pour avoir l'inclinaison qui doit en résulter. On obtient, par ce moyen, la formule qui en exprime la valeur ; & quoiqu'on remarque dans cette formule différentes quantités relatives à différentes especes de Bâtiments, on peut les réduire à une seule, les autres pouvant être négligées, sans crainte d'erreur sensible. On applique ensuite cette formule à différents exemples, & on en conclut les inclinaisons mêmes qu'on observe journellement dans la pratique. Il n'en est pas de même dans l'ancien systême des résistances : les inclinaisons qu'on en conclut sont fort éloignées de la réalité, & font voir à découvert les absurdités qui résultent des fausses suppositions de cette théorie, & même des expériences reçues. On explique encore ce qu'on a entendu par *Point vélique*, point dont on a cherché la position, afin d'obtenir que le navire n'éprouvât aucune inclinaison ; & l'on fait voir l'impossibilité de ce projet. On donne aussi le calcul & un exemple du cas que les Marins appellent *coëffer*, * & qui, par le défaut d'une connoissance parfaite, n'est pas encore suffisamment redouté : on démontre le grand risque qu'il y a de périr en pareil cas. Les formules qui expriment l'inclinaison qu'un Vaisseau doit prendre, s'appliquent ensuite aux cas

* Ce cas, que les Espagnols appellent *Tomar por alúa*, arrive, lorsque naviguant avec un vent violent, le vent vient à prendre les voiles en face, c'est-à-dire, par la proue, ou sous le vent, soit par le défaut de soin du Timonier, soit par un changement subit dans la direction du vent ; alors le Vaisseau vire, ou fait *chapelle*, comme disent les Marins, malgré le manœuvrier, à moins qu'il ne soit très-prompt à faire contrebrasser devant ; l'inclinaison se fait subitement du côté opposé, & devient très-considérable. Ce qui peut arriver de plus heureux dans ce terrible accident, qui a fait perir un grand nombre de Bâtiments, c'est que les voiles soient mises en pieces par la violence du vent, ou que la mâture vienne à se rompre

où l'on feroit quelques changements à la coque, soit dans son poids, soit dans son volume submergé; & l'on en conclut que le Vaisseau portera mieux la voile, si le poids additionnel est placé plus bas que la superficie de l'eau; & ce sera le contraire, si ce poids est placé plus haut : l'augmentation ou la diminution de de la force du Vaisseau pour porter la voile, étant proportionnelle à la distance du poids ajouté à la surface de l'eau. Pareillement, le Vaisseau portera mieux la voile, si le volume qu'on lui ajoute est plus élevé que celui qu'on supprime, & réciproquement; & si on ajoute en même temps un poids & un volume, la force du Vaisseau, pour porter la voile, augmentera, si le volume ajouté est plus haut que le poids. Enfin on démontre que dans les Vaisseaux entiérement semblables, les forces pour porter la voile sont en raison inverse de leurs dimensions linéaires, & que dans les inclinaisons de poupe à proue, les Vaisseaux étant construits comme ils le sont aujourd'hui, bien loin que les proues soient submergées par l'action ou la force du vent sur les voiles, elles s'élevent davantage sur le fluide.

Le manege du Vaisseau, c'est-à-dire, la combinaison des forces qui agissent continuellement pour le faire tourner, fait le sujet du Chapitre IV. Le gouvernail est seulement une de ces forces, & en bien des cas elle n'est pas la plus efficace. On démontre que l'axe de la force motrice, en supposant les voiles planes, & le Vaisseau sans inclinaison, ne concourt pas avec l'axe des résistances, & que ces deux axes ne coïncident qu'en conséquence de la courbure que prennent les voiles, & de l'inclinaison que prend le Vaisseau. Comme ces deux choses dépendent de la force plus ou moins grande du vent, de la plus ou moins grande quantité de voiles, & de leur hauteur; il s'ensuit que l'une quelconque de ces quantités venant à varier, l'axe de la force motrice doit aussi varier, & que l'équilibre dans le manege sera détruit; le manege sera par conséquent très-inconstant, quelque chose qu'on nous ait enseigné de contraire jusqu'ici. On met en évidence tous les cas

où le Vaisseau doit venir au vent, ou arriver, soit parce que le vent éprouve quelque altération, soit parce qu'on augmente ou qu'on diminue la hauteur ou l'amplitude des voiles, soit enfin par une variation quelconque dans l'état de la charge, ou dans les dimensions mêmes du corps du Vaisseau, particuliérement dans ses élancements & quêtes, qui sont une des principales causes d'où dépend la perfection du manege, quoique quelques Constructeurs très-célebres ne l'aient pas cru jusqu'ici. Enfin, on traite de l'emplacement des mâts, dont dépend encore la qualité de bien gouverner, dans tous les cas qu'on peut supposer pour les variations des voiles, & des efforts du vent, lesquels sont tous vérifiés par des exemples de pratique. On finit ce Chapitre, en donnant une formule générale qui renferme tous les cas.

Le Chapitre V traite du roulis & du tangage, objets dans lesquels, encore plus que dans tous les autres, on a commis jusqu'à présent de grandes erreurs; car on les a considérés seulement comme dépendants de l'état & de la disposition du corps du Vaisseau, & en aucune maniere du volume & de la vîtesse des lames, ce qui en est cependant la principale cause. On donne d'abord les formules, ou les valeurs, non-seulement du temps dans lequel le Vaisseau acheve son roulis, considéré comme un pendule simple, ainsi que l'ont fait jusqu'ici tous les Auteurs, mais encore de la vîtesse avec laquelle il le fait, & de l'action que les mâts & le corps du Navire éprouvent dans ce balancement. On fait voir que cette action, qui est l'unique à laquelle on doive faire attention, n'est pas précisément en raison inverse des temps; car elle dépend aussi de la grandeur du roulis, & celle-ci, le Vaisseau toujours considéré comme un pendule, ne dépend en aucune maniere du temps. Mais ce qui est plus, on fait voir évidemment que l'action qui agit sur les mâts & sur le Vaisseau, est si éloignée de dépendre du temps dans lequel le Vaisseau acheve le roulis, qu'au contraire, la plus grande action qu'ils éprouvent est précisément dans l'instant où

le Vaiſſeau ceſſant de ſe mouvoir, eſt ſur le point de ſe remettre en mouvement pour ſe redreſſer.

On examine enſuite le roulis qu'occaſionne la lame, & le temps qu'elle doit employer à paſſer par-deſſous le Navire. On fait voir combien la vîteſſe de la lame influe ſur ce balancement, & le peu dont les voiles alterent ſes effets. On démontre que ce temps eſt grand dans les petites lames, qu'il diminue juſqu'à être parvenu au *minimum*, & qu'enſuite il augmente de nouveau dans les plus grandes lames : de ſorte que, dans le Vaiſſeau de 60 canons, la lame qui paſſe le plus promptement par-deſſous ſa carene eſt celle qui a un peu plus de trois pieds de hauteur ; toutes les autres, ſoit qu'elles ſoient d'une plus grande, ou d'une moindre hauteur, emploient plus de temps. On fait voir auſſi la différence qu'il y a entre les lames agitées par un vent conſtant, & celles qui ſubſiſtent après que le vent qui les a produites s'eſt calmé ; * & on met en évidence l'erreur à laquelle ces dernieres ont conduit, en faiſant croire à M. *Bouguer* que les roulis de la Frégate *le Triton*, duroient toujours 4 ſecondes $\frac{1}{2}$. On démontre enſuite tous les inconvénients qu'il y auroit à éloigner beaucoup du centre de gravité les différents poids qui compoſent la charge du Navire, dans la vue d'augmenter la durée du roulis, parce qu'en rendant cette durée plus longue, on augmente la vîteſſe & la grandeur du balancement. Pareillement, quoiqu'il paroiſſe convenable pour le même objet, de diminuer la diſtance du centre de gravité au métacentre, on fait voir qu'en prenant ce parti il en réſulteroit de très-grand inconvénients, parce qu'alors les lames paſſeroient par-deſſus le Vaiſſeau & l'inonderoient : c'eſt un point qu'on n'a pas eu en vue juſqu'à préſent, quoiqu'il ſoit cependant un des plus importants, & qu'il mérite d'être conſidéré avec le plus grand ſoin. On donne enſuite la vraie théorie du roulis ; on en déduit la véritable durée, en combinant celle dans laquelle le Vaiſſeau

* Ce ſont ces lames que les Eſpagnols appellent *Olas de Leba*.

acheveroit un roulis, étant considéré comme un pendule, & celle dans laquelle il l'acheveroit, si la lame agissoit seule. On trouve par ce moyen que la véritable durée d'un roulis tient un milieu entre les durées des deux autres. Le Vaisseau de 60 canons, par exemple, considéré comme un pendule, acheveroit son roulis en 2 secondes $\frac{1}{4}$; & par l'action seule d'une lame de 9 pieds de hauteur, il l'acheveroit en 3 secondes; d'où on déduit que la vraie durée du roulis de ce Vaisseau avec la même lame est de 2 secondes $\frac{1}{3}$. Supposant que dans le même Vaisseau on écarte les poids du centre, ou de l'axe sur lequel il tourne des $\frac{2}{7}$ de plus qu'on ne le supposoit, la durée du roulis augmentera seulement d'une demi-seconde; & en diminuant la distance du métacentre au centre de gravité, de maniere à la réduire aux $\frac{2}{3}$, de ce qu'elle étoit, la même durée n'augmentera par-là que d'un tiers de seconde.

On détermine ensuite la grandeur du roulis, & l'on trouve que dans le second cas, où l'on éloignoit les poids de l'axe de rotation, la grandeur du roulis augmentera des $\frac{2}{7}$ de ce qu'elle étoit dans le premier cas; & dans le troisieme cas, où l'on suppose diminuée la distance du métacentre au centre de gravité, la grandeur du roulis augmentera aussi de $\frac{1}{7}$ de ce qu'elle étoit auparavant. Or il est clair que ces deux augmentations dans la grandeur du roulis produiroient beaucoup plus d'inconvénients qu'on ne retireroit d'avantages, en augmentant la durée du roulis d'une aussi petite quantité. En effet, ayant trouvé la formule qui exprime les moments dont la mâture éprouve l'action dans les roulis, & en ayant conclu la moindre action qu'elle puisse éprouver en faisant varier le temps dans lequel le Vaisseau acheve son roulis, étant considéré comme un pendule; on trouve que ce temps doit être égal à celui qu'emploie la lame à passer par-dessous le Vaisseau, ou à celui qu'il emploîroit à faire un roulis par la seule action de la lame : de-là on infere que pour gagner cet avantage, il feroit

nécessaire de changer l'arrimage pour chaque espece de lame; ce qui seroit très-embarrassant, pour ne pas dire tout-à-fait impossible, dans la pratique. On voit par-là qu'il faut s'en tenir à conclure qu'il convient de disposer l'arrimage du Navire pour un cas moyen des lames, qui, par leur grandeur, peuvent faire craindre pour la mâture.

De même qu'on a cherché la moindre action que puisse éprouver la mâture en faisant varier le temps dans lequel le Vaisseau acheve un roulis, étant considéré comme un pendule; on cherche également cette moindre action en faisant varier la distance du métacentre au centre de gravité: mais on trouve que dans ce cas il n'y a point de limite, & que plus cette distance sera grande, plus la mâture sera exposée. Ceci paroîtroit devoir nous induire à diminuer cette distance autant qu'il est possible; mais, outre que cela préjudicieroit à la qualité de porter la voile, il y a encore un autre inconvenient non moins essentiel à considérer, qui est que la mer passeroit par-dessus le corps du Navire avec plus de facilité. En effet, cherchant ensuite la hauteur à laquelle les eaux s'éleveroient sur les côtés du Navire, on trouve par la formule qui exprime cette hauteur, qu'elle sera d'autant plus grande que la distance du métacentre au centre de gravité sera plus petite. En un mot, on trouve que ces hauteurs sont entre elles comme les quarrés des temps que les Vaisseaux emploient à achever leurs roulis: nouveau motif pour ne pas augmenter démesurément ce temps.

En supposant le Vaisseau de 60 canons, arrimé réguliérement, on trouve qu'une lame de 36 pieds de hauteur s'élevera sur son côté de 15 pieds $\frac{1}{2}$; qu'en éloignant les poids de l'axe de rotations de $\frac{2}{7}$ de plus, elle s'élevera de 21 pieds $\frac{1}{5}$; & qu'en diminuant la distance du centre de gravité au métacentre, de maniere à la reduire aux $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle étoit, elle s'éleveroit de 19 pieds: par conséquent le côté du Navire n'ayant seulement que 16 à

17 pieds de hauteur au-dessus du niveau de l'eau, on voit clairement que, dans ces deux derniers cas, les eaux passeroient par-dessus le corps du Navire, & que chaque lame l'inonderoit; inconvénient très-fâcheux, & qu'on est forcé de prévenir, en renonçant un peu à la plus grande sûreté des mâts. Si la plus grande sûreté de la mâture exige que les roulis durent 4 ou 5 secondes, l'élévation des eaux sur le côté ne permet pas cette durée; elle en permet tout au plus une de 3 secondes.

On fait voir encore que les frégates sont beaucoup plus exposées à ces inondations, & que, par cette raison, elles exigent qu'on tienne à proportion la distance du centre de gravité au métacentre, un peu plus grande. On apporte des exemples du peu d'attention qu'on donne à ce point important; & l'on finit l'article du roulis, en donnant des regles pour se conduire avec sûreté dans une matiere aussi essentielle, & en spécifiant les cas où les roulis peuvent devenir encore plus extraordinaires, & par conséquent plus redoutables.

La suite de ce Chapitre traite du Tangage. On trouve, par les mêmes principes, le temps que le vaisseau, considéré comme un pendule, emploie à produire ce balancement; & on trouve qu'il est presque le même que celui dans lequel il acheve le roulis. Il paroît, par ce résultat, qu'on devroit tirer ici les mêmes conséquences que pour les roulis; mais, dans ceux-ci, il n'étoit pas nécessaire de faire attention à la vitesse du Vaisseau, comme il est maintenant nécessaire de le faire. C'est donc en considérant cet élément de plus, qu'on cherche la vraie durée du tangage, & on trouve qu'elle est d'autant plus petite, que la vitesse du Navire sera plus grande: en sorte que le Vaisseau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de vitesse par seconde, la lame ayant 9 pieds de hauteur, achevera son tangage dans un tiers moins de temps qu'il ne l'acheveroit étant considéré comme un pendule, lequel seroit en 2 secondes $\frac{1}{4}$. On examine ensuite la grandeur du tangage, sa plus grande vitesse, & enfin l'action qui en résulte

sur

ſur la mâture. Cette action eſt la plus petite qu'elle puiſſe être, dans le cas où la durée du tangage, le navire étant conſidéré comme un pendule, eſt égale à celle du même tangage ſuppoſé produit par l'action ſeule de la lame : ce qui eſt la même choſe que ce que nous avons trouvé pour les roulis. Mais dans les roulis, la durée de l'oſcillation du Vaiſſeau, conſidéré comme un pendule, eſt moindre que celle de l'oſcillation qui ſeroit ſeulement produite par l'action de la lame; c'eſt tout le contraire dans les tangages. Par cette raiſon, ſi dans les roulis il eſt néceſſaire d'éloigner les poids de l'axe de rotation pour ſoulager la mâture, dans les tangages, au contraire, on a beſoin qu'ils ſoient rapprochés, en allégeant ainſi, le plus qu'il eſt poſſible, le poids des extrémités du Vaiſſeau. On démontre également que l'action qu'éprouve la mâture dans les tangages, eſt comme les quarrés des longueurs des Navires; d'où l'on voit évidemment qu'il eſt néceſſaire de ne pas les allonger beaucoup, dans la vue ſeule de leur procurer une marche un peu plus avantageuſe. La diminution de la diſtance du métacentre au centre de gravité conduit encore ici à diminuer le travail de la mâture ; mais, de même que dans les roulis, les élevations des eaux à la proue ſeroient, dans ce cas, plus conſidérables; & d'autant plus que dans les tangages la viteſſe du Vaiſſeau contribue beaucoup à produire un plus grand effet. On trouve, pour le Vaiſſeau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de vîteſſe par ſeconde, qu'une lame de 9 pieds de hauteur s'éleve de plus de 9 pieds à la proue, tandis qu'elle ne s'éleveroit pas même à 6 pieds, ſi le Vaiſſeau ne marchoit pas. Dans le même Vaiſſeau, avec une lame de 36 pieds de hauteur, l'eau s'éleveroit à 16 pieds $\frac{1}{4}$, en ſuppoſant le Navire arrêté; & en lui ſuppoſant une viteſſe de 15 pieds par ſeconde, elle s'éleveroit juſqu'à 20 pieds $\frac{4}{35}$; c'eſt-à-dire, qu'elle ſurpaſſeroit de plus de 3 pieds toute la hauteur du corps du Vaiſſeau. Ceci fait voir la néceſſité de diminuer la voilure dans les vents forcés, comme le pratiquent les Marins, & démontre l'impoſſibilité de porter toute

la voilure, comme l'a prétendu M. *Bouguer*. Lorsque les lames choquent par la poupe, la vîtesse du Vaisseau produit un effet tout contraire; elle diminue l'élevation des eaux. Dans le cas ci-dessus du Navire de 60 canons, cinglant avec une vîtesse de 15 pieds par seconde, les lames ayant 36 pieds de hauteur, on trouve que les eaux doivent seulement s'élever à la poupe de 10 pieds $\frac{1}{2}$, tandis qu'on vient de voir qu'elles s'élevoient à la proue de 20 pieds $\frac{4}{25}$. Cinq pieds de plus de vîtesse dans le même Vaisseau ne diminueroient l'élevation des eaux que d'un demi-pied seulement; ce qui fait voir le peu de nécessité qu'il y a, naviguant vent arriere, de forcer de voiles, dans la vue seule de fuir les lames : il suffit d'en porter une quantité suffisante, pour donner au Vaisseau une vîtesse de 15 pieds par seconde, ou un peu plus.

De la plus grande élevation des eaux qui, par ces motifs, doit avoir lieu à la proue, on déduit clairement que la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité qui correspond à la partie de l'avant du Navire, doit être plus grande que celle qui correspond à la partie de l'arriere; ou, comme ces hauteurs dépendent des largeurs du Navire à ses extrémités, on voit conséquemment la nécessité absolue que l'avant soit plus renflé, ou plus volumineux que l'arriere. Les Marins ont toujours pratiqué ceci, contre le vœu général des Géometres, qui n'ont cessé de demander des proues aiguës pour faire marcher le Vaisseau avec plus de vîtesse; sans réfléchir que ces proues pouvoient occasionner la ruine des Bâtiments, sans peut-être leur donner la supériorité de marche qu'ils cherchoient à leur procurer. Enfin on termine ce Livre, en traitant de l'endroit où il convient de mettre le fort, ou la plus grande largeur du Vaisseau, & de la figure que doivent avoir ses couples, pour obtenir également la plus grande perfection possible dans les mouvements de tangage.

Le cinquieme & dernier Livre de l'Ouvrage, contient une récapitulation de tout ce qui a été dit dans les Livres précédents, mais sans y employer aucun calcul analytique, afin de rendre notre

Ouvrage d'une utilité plus générale, en le mettant, autant qu'il est possible, à la portée des Marins. Le Chapitre premier traite de la force des Vaisseaux, de l'échantillon des bois qui entrent dans leur construction, & des dimensions principales avec lesquelles ils doivent être construits. On y fait voir la foiblesse avec laquelle les Vaisseaux sont construits, & la force démesurée qu'on donne aux Frégates, sans faire attention que les Vaisseaux sont à proportion beaucoup plus surchargés d'artillerie. On donne des regles pour une construction bien proportionnée ; & on finit en donnant la méthode pour régler les épaisseurs, le poids & les forces des bois, lors même qu'ils seroient de différentes qualités ou especes.

Le Chapitre II traite de la grandeur des Vaisseaux : on fait voir qu'on les a augmentés, depuis quelque temps, sans une grande nécessité ; & on expose les avantages qui peuvent résulter de l'une & l'autre proportion. On enseigne la maniere de leur donner les dimensions convenables à l'artillerie qu'ils doivent porter. Delà on infere combien il seroit à souhaiter que les pieces d'artillerie fussent courtes & légeres, non-seulement pour que le service en fût plus prompt & plus commode ; mais encore pour soulager les Navires, pour leur plus grande solidité & leur plus grande durée.

Le Chapitre III s'étend sur la qualité de porter la voile, & l'on y rappelle ce qu'on a dit précédemment. On met en évidence l'erreur dans laquelle on tomberoit, en augmentant les appareils des grands Vaisseaux, comme l'ont prétendu quelques Marins spéculatifs, par la seule raison que leur stabilité est plus grande pour porter la voile. On recherche aussi la variation qui doit arriver dans cette même qualité, lorsqu'on fait varier quelqu'une des dimensions, le poids ou la coque du Vaisseau ; & on éclaircit le tout par les exemples nécessaires.

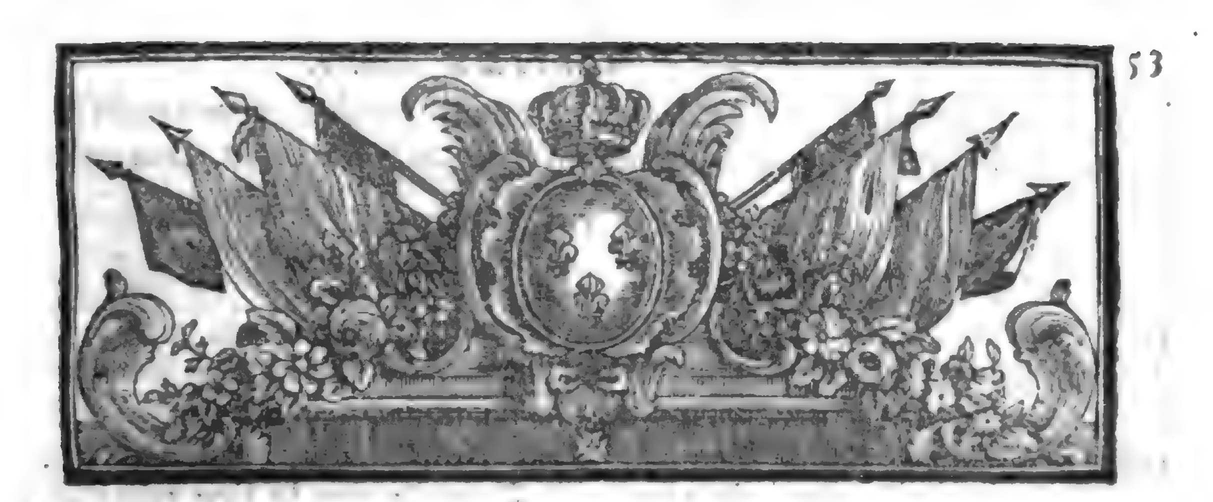
Le Chapitre IV traite de la marche & du rhumb de vent que suivent les Vaisseaux ; mais, comme les formules dont on a déduit les démonstrations sont très-compliquées, on tâche d'expliquer le

tout par des constructions géométriques, qui sont d'une intelligence très-facile. Le Chapitre V s'étend sur le manege du Vaisseau; on explique toutes les forces dont l'action contribue à cet effet, & les avantages qui résultent de placer les mâts convenablement. Enfin le Chapitre VI traite du roulis & du tangage : on apporte différents exemples, & l'on indique de nouveau les attentions nécessaires pour adoucir ces balancements.

Si sur le tout on a soin de consulter la pratique, on verra clairement, dans tous les cas, sa correspondance parfaite avec notre théorie. C'est l'unique moyen d'en juger sainement, & de s'assurer de la vérité des principes sur lesquels elle est fondée.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parentheses, dans plusieurs endroits de cet Ouvrage, sont destinés à indiquer à quel numéro du Livre il faut aller chercher la proposition dont le Lecteur doit se rappeller la démonstration dans cet endroit. On indique aussi le Volume, lorsque le renvoi n'appartient pas à celui où se fait la citation. A l'égard des numéros, ils sont au commencement des propositions dans le premier Volume, & au commencement des à-linéa *dans le second.*



EXAMEN MARITIME,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

OU

TRAITÉ DE MÉCHANIQUE,

Appliqué à la Construction & à la Manœuvre des Vaisseaux & autres Bâtiments.

LIVRE PREMIER.

DE LA MÉCHANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions, Axiomes, & Principes du Mouvement.

DÉFINITION I.

(1.) LE *Lieu d'un corps* est sa situation dans l'univers, ou la partie de l'espace immobile qu'il occupe. Nous en avons tous une idée claire, distincte & simple; quelles que soient les expressions qu'on emploie pour en donner une définition, on ne peut en rendre

l'intelligence plus facile ; il ſemble, au contraire, qu'on en rend l'idée moins diſtincte.* On le diſtingue en *Lieu abſolu*, & en *Lieu relatif.*

DÉFINITION II.

(2.) Le *Lieu abſolu* eſt celui qu'occupe un corps par rapport à tout l'univers, ſans aucune relation aux lieux des autres corps. Le *Lieu relatif* eſt celui qu'occupe un corps, eu égard aux lieux des autres corps. Dans un Navire en mouvement, les chambres & les mâts occupent le même lieu par rapport au Navire, mais non par rapport au rivage, ou à la terre : ainſi on dit que le lieu relatif des chambres & des mâts eſt toujours le même, mais non leur lieu abſolu, parce qu'en effet il change par rapport à l'univers.

DÉFINITION III.

(3.) Le *Mouvement* eſt le tranſport d'un corps d'un lieu à un autre, ou ſon changement continuel de lieu. Ainſi on dit qu'un corps ſe meut ou eſt en mouvement, lorſqu'il paſſe d'un lieu à un autre, ou qu'il change continuellement de lieu. On dit, au contraire, qu'un corps eſt en repos, lorſqu'il reſte conſtamment dans le même lieu.

DÉFINITION IV.

(4.) De même que le lieu peut être abſolu ou relatif, le mouvement peut auſſi être abſolu ou relatif. Lorſque le lieu, par rapport auquel le mouvement s'exécute, eſt abſolu, le mouvement eſt auſſi abſolu, & ſi le lieu étoit relatif, le mouvement le ſeroit auſſi. Ainſi, un mouvement abſolu peut être un repos relatif. Les chambres & les mâts d'un Navire ont un mouvement abſolu, lorſqu'il ſe meut; mais ils ſont en repos à l'égard du Navire.

DÉFINITION V.

(5.) Si le corps ſe meut en ſe conſervant toujours dans une même ligne droite, on appelle cette ligne *la Direction du Mouvement.*

---

* Cette définition du *Lieu* eſt très-philoſophique, elle eſt entiérement conforme à notre maniere de concevoir ; mais il n'a pas tenu aux Métaphyſiciens d'embrouiller cette idée à force de diſtinctions. Nous ne ſuivrons point leur exemple, & par conſéquent nous nous diſpenſerons d'expoſer toutes les rêveries qu'ils ont débitées à ce ſujet. Nous ferons ſeulement obſerver, en paſſant, que toutes les idées dont le ſujet s'apperçoit par une ſimple opération de l'eſprit, comme l'idée de l'Eſpace, de la Matiere, du Mouvement, &c ne peuvent que s'obſcurcir, lorſqu'on y applique le raiſonnement ; ou du moins il ſemble que la perception en devient moins diſtincte.

DÉFINITION VI.

(6.) On appelle *Vîtesse* la promptitude ou célérité avec laquelle s'exécute le mouvement d'un corps; & on dit qu'un corps a plus ou moins de vîtesse, selon qu'il se meut avec plus ou moins de promptitude ou célérité.

DÉFINITION VII.

(7.) Comme la vîtesse dépend du mouvement, qui peut être absolu, ou relatif, il s'ensuit que la vîtesse peut aussi être absolue, ou relative. Si le mouvement est absolu, ou s'il se fait par rapport à un lieu absolu, la vîtesse est dans ce cas absolue; & si le mouvement se faisoit à l'égard d'un lieu relatif, la vîtesse seroit relative. Ainsi, une vîtesse absolue peut être un repos relatif, ou peut n'exprimer aucune vîtesse relative. Si V représente la vîtesse absolue du corps A, & u celle du corps B dans la même direction; la vîtesse relative de ces deux corps sera $V \mp u$. Le signe négatif est pour le cas où les deux corps se meuvent vers la même partie; & le positif pour celui où ils se meuvent en sens contraire, ou vers des parties opposées.

DÉFINITION VIII.

(8.) Le mouvement est dit *uniforme*, lorsque la vîtesse avec laquelle le corps se meut, est toujours la même. On l'appelle *accéléré*, lorsque la vîtesse va toujours en augmentant; & *retardé*, quand elle va en diminuant.

DÉFINITION IX.

(9.) On appelle *Espace parcouru* le chemin que le corps fait pendant son mouvement. Cet espace peut être en ligne droite, ou en ligne courbe, selon la nature des forces qui agissant sur le corps, l'obligent à se mettre en mouvement, & le modifient, comme on le dira ci-après.

DÉFINITION X.

(10.) Si le mouvement est absolu, l'espace parcouru le sera aussi, & il sera relatif, si le mouvement est relatif. Soit E l'espace parcouru par le corps A, & e celui parcouru par le corps B dans une même ligne ou direction; on aura $E \mp e$ pour l'espace relatif. Le signe $-$ est pour le cas où les corps se meuvent vers la même partie; & le signe $+$ pour celui où ils se meuvent en sens contraire, ou vers des parties opposées.

Définition XI.

(11.) On appelle *Masse* la quantité de matiere dont un corps est composé. On dit qu'un corps a plus ou moins de masse, selon qu'il entre plus ou moins de matiere dans sa composition.

Définition XII.

(12.) Un corps qui, dans toutes ses parties, renferme des quantités égales de matiere, sous des volumes égaux, est dit également ou uniformément dense; & si deux ou plusieurs corps renferment la même masse sous des volumes égaux, on dit qu'ils sont de même densité. Un corps est dit plus dense qu'un autre, lorsqu'il renferme plus de masse sous le même volume, ou lorsque, sous un moindre volume, il renferme la même quantité de masse. Ainsi, les densités de deux corps sont comme leurs masses sous des volumes égaux; ou en raison inverse des volumes, sous des quantités égales de masse.

Définition XIII.

(13.) La force qu'on imprime à un corps quelconque, est l'action qu'on exerce sur lui pour le faire sortir de l'état dans lequel il se trouve, soit pour le faire passer de l'état de repos dans celui de mouvement, selon une direction quelconque, soit pour le faire passer d'un mouvement à un autre plus ou moins grand, dans la direction suivant laquelle il se meut. Quelle que soit cette force, on l'appelle *Puissance*; elle peut être constante ou variable, positive ou négative.

Définition XIV.

(14.) La *Force innée* de la matiere, est la propriété qu'ont les corps de résister au changement d'état de repos, ou de mouvement, dans lequel ils se trouvent.

Un corps qui est en repos, ne peut être mis en mouvement par une force, quelle qu'elle puisse être, sans qu'on n'éprouve l'action d'une autre force opposée, qui provient du corps, de quelque maniere que ce soit. La force motrice ne pourroit exercer son action sans cette résistance; car sur quoi auroit-elle à s'exercer? Dans cette supposition, le corps se mettroit en mouvement par lui-même, sans le secours d'aucune force; ce qui est impossible. Pareillement, on ne peut augmenter ou diminuer le mouvement d'un corps, sans que la force qui opere ce changement n'éprouve l'effet d'une résistance qui

qui s'oppose à son action, & cela par les mêmes raisons. L'expérience manifeste encore plus clairement l'existence de cette force: il ne faut que pousser ou tirer un corps, pour sentir une action semblable à celle qu'exerceroit une force opposée quelconque : quelle que soit la cause dont cette force provienne, & quelle que soit la maniere dont elle agit, il est certain qu'elle existe, & cela nous suffit pour l'admettre comme principe. *Newton* a donné à cette force le nom de *Force d'inertie*, ou *d'inaction*; * mais on avertit que ce nom ne lui convient proprement que dans le cas où le corps passe du repos au mouvement, parce qu'il résiste à prendre celui-ci, ou bien lorsqu'il s'agit d'augmenter le mouvement que le corps auroit déjà; mais non dans le cas où le corps étant en mouvement, une force quelconque agiroit pour le retenir: la matiere résiste alors à diminuer son mouvement, & par conséquent, le nom de *Force d'inaction* ne convient nullement à cette résistance. En général, la propriété de cette force innée est de résister au changement de l'état dans lequel se trouve le corps : c'est une résistance effective dans le cas où une force agit sur le corps, pour augmenter son mouvement; mais au contraire c'est une impulsion, quand quelque force agit pour diminuer le même mouvement.

DÉFINITION XV.

(15.) La *Quantité de mouvement* est le produit de la masse en mouvement par sa vitesse.

Le mouvement d'un corps consistant dans le transport de sa masse, il est évident que plus la masse sera grande, plus le mouvement sera grand. Il est encore évident que le mouvement sera d'autant plus grand, que la vitesse avec laquelle le corps se meut sera plus grande. La Quantité de mouvement est donc en raison composée de la masse du corps & de sa vitesse; c'est-à-dire, comme le produit Au, A désignant la masse, & u la vitesse.

AXIOME I.

(16.) Tous les corps persévèrent dans leur état de repos ou de

* Les Géometres & les Physiciens attachent à l'expression *Force d'inertie*, dont ils se servent, la même idée que notre Auteur à celle de *Force innée*. Cette derniere expression nous paroît cependant plus exacte, &, par cela, préférable. Nous avertissons les Commençants de ne pas confondre la Force innée avec la Pesanteur ; celle-ci n'agit que dans une direction, au lieu que la Force innée agit dans toutes les directions.

mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, ſuivant laquelle ils ſont dirigés lorſqu'ils commencent à ſe mouvoir, à moins que quelque force, ou puiſſance, ne les oblige à changer d'état. Un corps ne peut par lui-même ſe déterminer au mouvement, ou produire une force quelconque pour ſe mouvoir, s'il eſt en repos : au contraire, (14.) il réſiſte au mouvement qu'on voudroit lui imprimer, en vertu de ſa Force innée, ou d'inertie. Il ne peut de même, quoiqu'il ſoit en mouvement, produire aucune force dans quelque direction que ce ſoit; ſon inertie le conſerve dans le même état, ſans augmenter ni diminuer ſa viteſſe, & par la même raiſon, ſans le détourner de la direction ſuivant laquelle il a commencé à ſe mouvoir : il doit donc perſévérer dans ſon état de repos, ou de mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, ſuivant laquelle il a été dirigé dès le commencement.

Corollaire.

(17.) Il ſuit de là qu'un corps ne ſe mouvera d'un mouvement accéléré, ou retardé, que parce qu'une puiſſance quelconque agira ſur lui : cette force agira poſitivement, ou ſuivant la direction du mouvement du corps, dans le cas du mouvement accéléré; & elle agira, au contraire, négativement, ou dans une direction oppoſée à celle que ſuit le corps, dans le cas du mouvement retardé. Ainſi, il n'y a de différence entre le mouvement accéléré & le retardé, qu'en ce que l'action de la puiſſance agit poſitivement dans le mouvement accéléré, & qu'elle agit négativement dans le mouvement retardé; ou qu'en ce que la même puiſſance eſt poſitive ou négative.

Axiome II.

(18.) La variation, ou la différencielle, du mouvement, eſt toujours proportionnelle au produit de la puiſſance dont elle eſt l'effet, par le temps qu'a duré ſon action; & cette variation ſe fait dans la direction ſuivant laquelle la puiſſance agit. Si la puiſſance α, agiſſant pendant la différencielle de temps dt, altere la viteſſe qu'auroit le corps A de la différencielle du, de ſorte que la variation, ou la différencielle, du mouvement ſoit Adu, une autre puiſſance 2α, produira la variation, ou différencielle, du mouvement $2Adu$. Car, par la ſuppoſition, la ſeule puiſſance α produit la différencielle du, l'autre puiſſance α produira donc auſſi une nouvelle différencielle du égale à la premiere; par conſéquent, la ſomme des deux différencielles eſt $2du$, & la variation, ou la différencielle, du mouvement

sera $2\,A\,du$. On prouvera de même qu'une puissance $3\,\alpha$ produira dans le mouvement la différencielle $3\,A\,du$; & ainsi de suite. Pareillement les puissances $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha$, &c. produiront, dans le mouvement du corps, les différencielles $\frac{1}{2}A\,du$, $\frac{1}{3}A\,du$, &c. Donc les variations, ou différencielles, du mouvement sont toujours proportionnelles à la puissance qui les produit.

D'un autre côté, puisque la différencielle du de la vîtesse est plus ou moins grande, selon que le temps dt, pendant lequel la puissance agit, est plus ou moins grand, il en sera de même de la différencielle $A\,du$ du mouvement. Donc cette variation, ou différencielle, sera en raison composée de la puissance α, & du temps dt, ou comme le produit $\alpha\,dt$. Quant à la direction de cette différencielle du mouvement, il est évident, par le premier Axiome, qu'elle est la même que celle de la puissance.

COROLLAIRE.

(19.) Puisque $A\,du$ est proportionnelle à $\alpha\,dt$, il s'ensuit qu'on aura $A\,du = \alpha\,dt$.

SCOLIE I.

(20.) Quoique jusqu'ici nous n'ayons encore établi que la proportionnalité entre $A\,du$ & $\alpha\,dt$, on peut cependant former une égalité parfaite entre ces deux quantités; car, quoique la puissance puisse être plus ou moins grande, on peut diminuer ou augmenter proportionnellement la différencielle dt; de maniere qu'elle soit en raison inverse de la puissance α. On trouve ensuite, par l'expérience, la vraie relation entre ces quantités.

SCOLIE II.

(21.) Il y a des Auteurs qui mettent en doute la proportionnalité entre la force, ou la puissance, agissante & la différencielle de la vîtesse. Il paroît cependant que, pour se convaincre de l'évidence de ce principe, il suffit de considérer, comme nous l'avons dit, que, par puissance double, on n'entend autre chose qu'une puissance qui agit précisément comme le feroient deux puissances simples, la seconde égale à la premiere. Le fondement du doute de ces Auteurs est que nous ignorons la nature de la cause, & la maniere dont elle agit. Nous nous dispenserons d'entrer dans l'examen de cette discussion, qui nous paroît d'autant moins nécessaire, que

ces mêmes Auteurs arrivent, quoique par une voie différente, aux équations mêmes que nous avons données, qui sont la base de toute la Méchanique. Ils prétendent que la connoissance de la puissance doit résulter de ses effets; mais que les effets ne peuvent se conclure par la puissance impulsive déterminée. Ce raisonnement n'est que spécieux, nous en ferons voir les défauts.*

AXIOME III.

(22.) L'action est égale à la réaction, ou les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont égales, & dans des directions opposées. Un corps ne peut pousser ou choquer un autre corps, sans être, en même temps, choqué ou poussé par celui-ci, avec la même force dans le sens opposé. Si un agent quelconque pousse un obstacle avec une certaine force, celui-ci repousse l'agent en sens contraire avec la même action. La même chose arrive si l'agent attire un obstacle, il en est également attiré avec une force égale dans une direction contraire. La vérité de cet Axiome est confirmée journellement par l'expérience.

PROPOSITION I.

(23.) *Si un corps se meut uniformément, ou avec une vîtesse uniforme, les espaces parcourus sont entre eux comme les temps employés à les parcourir*

La vîtesse du corps n'augmentant ni ne diminuant, il parcourra toujours le même espace dans le même temps; il parcourra donc un espace double dans un temps double, un espace triple dans un temps triple, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont toujours dans la raison des temps employés à les parcourir.

PROPOSITION II.

(24.) *Si un corps se meut uniformément, avec des vîtesses différentes, les espaces qu'il parcourt en temps égaux, sont entre eux comme les vîtesses.*

Puisque la plus grande vîtesse consiste dans le plus grand espace parcouru dans le même temps, il s'ensuit que si un corps parcourt un certain espace avec une certaine vîtesse, il parcourra un espace double avec une vîtesse double, un espace triple avec une vîtesse triple, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont entre eux comme les vîtesses.

* Voyez l'Encyclopédie, Articles *Accélération*, *Cause*, & *Force*; & le *Traité de Dynamique* de M. d'Alembert, *Art.* 22 & 158.

PROPOSITION III.

(25.) *Les espaces parcourus par des corps qui se meuvent uniformément, sont en raison composée des vîtesses avec lesquelles ils sont parcourus, & des temps employés à les parcourir.*

Soient deux corps A & B, qui se meuvent uniformément, le premier, avec la vîtesse u, parcourant l'espace a pendant le temps t; & le second, avec la vîtesse v, parcourant l'espace b pendant le temps T. Puisque les espaces parcourus, en temps égaux, sont entre eux comme les vîtesses, nous aurons l'espace parcouru par le corps B dans le temps t de la marche du corps A par cette proportion, $u : v :: a : \frac{av}{u}$. Mais nous venons de voir aussi que les espaces parcourus avec des vîtesses égales, sont en raison des temps, on aura donc $t : T :: \frac{av}{u} : b$, d'où l'on tire $aTv = btu$, & par conséquent $a : b :: tu : Tv$: c'est-à-dire que les espaces parcourus sont en raison composée des temps & des vîtesses.

COROLLAIRE I.

(26.) Si l'on divise l'équation $aTv = btu$ par le produit $Tv . tu$, on aura $\frac{a}{tu} = \frac{b}{Tv}$, dans laquelle si nous faisons $\frac{b}{Tv} = 1$, en supposant que les quantités b, T, v soient constantes, nous aurons l'équation $1 = \frac{a}{tu}$, qui donne $u = \frac{a}{t}$. Donc la vîtesse d'un corps est en raison directe de l'espace parcouru, & en raison inverse du temps employé à le parcourir.

COROLLAIRE II.

(27.) De la même équation on tire pareillement $t = \frac{a}{u}$; c'est-à-dire, que le temps dans lequel un corps parcourt l'espace a, est en raison directe de cet espace, & en raison inverse de la vîtesse avec laquelle il le parcourt.

COROLLAIRE III.

(28.) Si l'on exprime le temps t en secondes, & si l'on en prend une pour l'unité de temps, dans le cas où $t = 1$, on aura $u = a$; c'est-à-dire que la vîtesse est égale à l'espace parcouru pendant une seconde de temps. Il suit de là que si l'on exprime le temps en secondes, l'espace parcouru pendant une seconde de temps sera la mesure de la vîtesse.

COROLLAIRE IV.

(29.) Le mouvement accéléré, ou retardé, peut être regardé comme uniforme pendant un instant, ou pendant une différencielle de temps dt; car, pendant cet instant, la variation de la vîtesse, étant une quantité différencielle, peut être regardée comme nulle, ou égale à zéro par rapport à la vîtesse acquise & finie u. Si donc da représente la différencielle de l'espace parcouru pendant cet instant dt, nous aurons (26.) $u = \frac{da}{dt}$, & par conséquent $da = u\,dt$.

PROPOSITION IV.

(30.) *Lorsqu'un corps se meut d'un mouvement accéléré, ou retardé, la quantité dont sa vîtesse à chaque instant de sa course, surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est toujours* $= \frac{1}{A}\int \alpha\,dt$.

Soit V la vîtesse initiale du corps, c'est-à-dire, celle avec laquelle il se meut au premier instant de l'action, ou du temps t; en intégrant l'équation $\frac{\alpha\,dt}{A} = du$ (18.) nous aurons $\frac{1}{A}\int \alpha\,dt = u - V$, * c'est-à-dire que la quantité dont la vîtesse actuelle du corps surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est toujours $= \frac{1}{A}\int \alpha\,dt$.

COROLLAIRE I.

(31.) Si la puissance α étoit constante, on auroit $\frac{\alpha t}{A} = u - V$; c'est-à-dire, que la quantité dont la vîtesse actuelle du corps surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est en raison composée des raisons directes de la puissance & du temps, & de la raison inverse de la masse.

COROLLAIRE II.

(32.) Si $V = 0$, c'est-à-dire, si le corps étoit en repos lorsque

* u représente la vîtesse que prend le corps en vertu de la puissance α qui est accélératrice ou rétardatrice; du en est la différencielle : donc $\int du = u + C$, C marquant une constante qui complette l'intégrale; par conséquent, $\frac{1}{A}\int \alpha\,dt = u + C$. Mais lorsque la puissance α n'agit point, c'est-à-dire lorsqu'elle est égale à zéro, on a $u = V$, & l'intégrale $\frac{1}{A}\int \alpha\,dt = 0$: donc on a, dans ce cas, $u + C$, ou $V + C = 0$, ce qui donne $C = -V$. Substituant cette valeur de C dans l'équation $\frac{1}{A}\int \alpha\,dt = u + C$, on a $\frac{1}{A}\int \alpha\,dt = u - V$, comme l'Auteur l'a trouvé.

la puissance α a commencé son action, ou s'il commençoit sa course du repos, on auroit $\frac{1}{A}\int \alpha\, d\, t = u$: & si α étoit constante, on auroit $\frac{\alpha\, t}{A} = u$.

COROLLAIRE III.

(33.) Si, au contraire, le corps, après avoir été mis en mouvement, parvient à l'état de repos, comme il peut arriver dans le mouvement retardé, on aura $u = 0$: donc $\frac{\alpha\, t}{A} = - V$: ou, dans ce cas, en changeant le signe de la puissance, à cause que le mouvement est retardé, $\frac{\alpha\, t}{A} = V$.

COROLLAIRE IV.

(34.) La vîtesse acquise dans le mouvement accéléré qui commence du repos est $u = \frac{\alpha\, t}{A}$, & la vîtesse entiérement perdue dans le mouvement retardé est $V = \frac{\alpha\, t}{A}$: donc ces vîtesses seront égales, si des puissances égales α agissent pendant le même temps t sur des masses égales A.

PROPOSITION V.

(35.) *L'espace parcouru par un corps, à compter du premier instant de son mouvement, est* $= V t + \frac{1}{A}\int(d\, t \int \alpha\, d\, t.)$

Puisque $u = \frac{d\, a}{d\, t}$ (29.) on aura donc (30.) $\frac{1}{A}\int \alpha\, d\, t = \frac{d\, a}{d\, t} - V$; d'où l'on tire $\frac{d\, a}{d\, t} = V + \frac{1}{A}\int \alpha\, d\, t$, ou $d\, a = V\, d\, t + \frac{d\, t}{A}\int \alpha\, d\, t$: & en intégrant, $a = V t + \frac{1}{A}\int(d\, t \int \alpha\, d\, t)$; c'est-à-dire que l'espace parcouru par le corps, à compter du premier instant du mouvement, est $= V t + \frac{1}{A}\int(d\, t \int \alpha\, d\, t.)$

COROLLAIRE I.

(36.) Si la puissance α est constante, on aura $a = V t + \frac{\alpha\, t^2}{2 A}$.

COROLLAIRE II.

(37.) Si le corps commençoit sa course du repos, alors on auroit $V = 0$, & par conséquent $a = \frac{1}{A}\int(d\, t \int \alpha\, d\, t)$; ou, si la force, ou

puissance α étoit constante, $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: c'est-à-dire que les espaces parcourus sont alors comme les quarrés des temps employés à les parcourir; & réciproquement, si les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps, la force, ou puissance accélératrice, sera constante.

COROLLAIRE III.

(38.) De l'équation $u = \frac{\alpha t}{A}$ trouvée, *Art.* 32. on tire $\alpha = \frac{Au}{t}$; substituant cette valeur dans la derniere équation, on aura $a = \frac{1}{2} t u$; c'est-à-dire que les espaces parcourus depuis le commencement du mouvement, sont en raison composée des temps & des vitesses acquises.

COROLLAIRE IV.

(39.) L'espace parcouru par un corps qui se meut avec une vîtesse uniforme u, pendant le temps t, est (26.) $a = t u$: donc l'espace parcouru par un corps avec une vitesse uniforme, est double de l'espace parcouru dans le même temps par un mouvement accéléré, qui commence du repos, lorsque la vîtesse acquise, dans celui-ci, est devenue la même que la vitesse uniforme.

COROLLAIRE V.

(40.) Dans le mouvement accéléré qui commence du repos, la puissance α étant supposée constante, on a $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$; & dans le retardé, $a = V t - \frac{\alpha t^2}{2A}$; mais si le corps qui se meut d'un mouvement retardé, parvient au repos, comme dans ce cas $V = \frac{\alpha t}{A}$ (34.), on aura aussi $a = \frac{\alpha t^2}{A} - \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\alpha t^2}{2A}$. Donc l'espace parcouru avec un mouvement accéléré qui commence du repos, & celui qui est parcouru dans le mouvement retardé qui arrive au repos, seront égaux, si les puissances α qui agissent dans les deux cas, sont égales & constantes, & si elles agissent dans le même temps t sur des corps égaux A.

PROPOSITION VI.

(41.) *L'espace parcouru par un corps depuis le commencement de sa course est* $= A \int \frac{u\,d\,u}{\alpha}$.

Puisque (29.) $\frac{d\,a}{d\,t} = u$, & que (19.) $\frac{\alpha\,d\,t}{A} = d\,u$, en multipliant

pliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura $\frac{\alpha\, d a}{A} = u\, d u$, ce qui donne $d a = \frac{A}{\alpha} u\, d u$, & en intégrant $a = A \int \frac{u\, d u}{\alpha}$. $= \frac{A}{\alpha}\int u\, du$.

C O R O L L A I R E I.

(42.) Si la puissance α est constante, on aura $a = \frac{A}{2\alpha}(u^2 - V^2)$*.

C O R O L L A I R E II.

(43.) Si le mouvement a commencé du repos, ou si $V = 0$ alors on aura $a = \frac{A u^2}{2\alpha}$; c'est-à-dire que lorsque la puissance α est constante, les espaces parcourus depuis le repos, sont entre eux comme les quarrés des vîtesses.

P R E M I E R P R I N C I P E D'E X P É R I E N C E.

(44.) *L'expérience a appris que les corps pesants à de petites distances de la surface de la terre, parcourent, en tombant librement, depuis le premier instant de leur chûte, des espaces qui sont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir.*

C O R O L L A I R E I.

(45.) Il suit delà que la puissance, ou force, qui anime les corps pesants, dans le voisinage de la surface de la terre, & que nous nommons Gravité, est une force constante. (37.)

C O R O L L A I R E II.

(46.) Nous aurons donc, dans le cas des corps graves, dont la chûte commence du repos, $u = \frac{\alpha t}{A}$, $a = \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{A u^2}{2\alpha}$.

S E C O N D P R I N C I P E D'E X P É R I E N C E.

(47.) *On sçait encore par l'expérience que tous les corps pesants, grands ou petits, parcourent, en tombant dans le voisinage de la surface de la terre, des espaces égaux en temps égaux.*

---

* Voyez la Note, page 62.

COROLLAIRE I.

(48.) Si donc α & β font les puiſſances conſtantes qui animent les corps A & B, on aura, d'après l'expérience, $\frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\beta t^2}{2B}$, ou, parce qu'on ſuppoſe les temps égaux, $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$. Donc $\alpha : \beta :: A : B$; c'eſt-à-dire que dans les corps peſants, les puiſſances, ou gravités ſont entre elles comme les maſſes.

COROLLAIRE II.

(49.) On a vu ci-deſſus que les denſités ſous des volumes égaux ſont entre elles comme les maſſes (12.); il s'enſuit que les denſités ſont auſſi comme les gravités. Ainſi on pourra exprimer la denſité des corps peſants par le poids d'un pied cube de la matiere qui les compoſe.

COROLLAIRE III.

(50.) La quantité $\frac{\alpha}{A}$ étant toujours conſtante, nous pourrons mettre à ſa place la conſtante ξ; d'où l'on tirera, pour les corps peſants, $u = \xi t$, $a = \frac{1}{2}\xi t^2 = \frac{u^2}{2\xi}$ (46.).

TROISIEME PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(51.) *L'expérience nous a auſſi enſeigné que l'eſpace que les corps graves parcourent dans le voiſinage de la ſurface de la terre, en tombant verticalement depuis le repos, eſt à très-peu-près de 16 pieds anglais, dans la premiere ſeconde de leur chûte.* *

COROLLAIRE I.

(52) Meſurant en ſecondes le temps de la chûte des corps peſants, & en pieds les eſpaces parcourus, nous aurons, pour le cas où $t = 1$, $a = 16$; ce qui produit $16 = \frac{1}{2}\xi$, ou $\xi = 32 = \frac{\alpha}{A}$. Cette valeur étant ſubſtituée dans les équations de *l'Art.* 50, les change en celles-ci, $u = 32\,t$, $a = 16\,t^2 = \frac{u^2}{64}$: d'où l'on tire $\sqrt{a} = 4\,t = \frac{1}{8}u$, & $8\sqrt{a} = u = 32\,t$.

---

* Ce nombre répond à 15 pieds 0 pouc. 2 lig 8 p. français. Nous emploîrons, avec l'Auteur, ce nombre quarré, parce qu'il eſt très-commode dans le calcul. Le pied anglais eſt au pied français : : 811 : 864. Partant 864 pieds anglais font 811 pieds français; ou le pied anglais contient 11 pouces, 3 lignes, 2 points du pied français.

PLANC. I.

Corollaire II.

(53.) Si, pour plus d'exactitude & de généralité, on représente par K l'espace que parcourt, pendant la premiere seconde de sa chûte, un corps grave qui tombe verticalement depuis le repos, on aura $K = \frac{1}{2}\xi$, ou $\xi = 2K$. Cette valeur substituée dans les équations de l'*Art.* 50, les change en celles-ci, $u = 2\,K\,t$, $a = Kt^2 = \frac{u^2}{4K}$; d'où l'on tire $\sqrt{a} = \frac{u}{2\sqrt{K}} = t\,\sqrt{K}$, & $2\sqrt{aK} = u = Kt$.

Scolie.

(54.) On déterminera dans son temps le véritable espace que parcourent, pendant la premiere seconde de leur chûte, les corps graves en tombant librement, & on verra que cet espace est d'un peu plus des 16 pieds anglais que nous avons indiqués. Cependant, comme la différence est petite, & qu'en la négligeant il n'en peut résulter une erreur considérable dans les calculs dont nous avons besoin, on peut faire constamment usage de ce nombre 16, qui facilite beaucoup les opérations, attendu qu'il est quarré.

CHAPITRE II.

Du Mouvement composé.

Définition XVI.

(55.) On appelle *Mouvement composé*, celui qui résulte de l'action de deux, ou d'un plus grand nombre de puissances qui agissent sur un corps, chacune dans des directions particulieres.

Proposition VII.

(56.) *Le mouvement d'un corps suivant une direction quelconque, n'est point altéré par l'action des puissances qui agiroient sur lui suivant d'autres directions quelconques; & à chaque instant le corps parcourt de petits espaces paralleles à chacune des directions.* FIG. 3.

Si l'on suppose le corps A sur un plan EF, il est clair qu'il peut se mouvoir sur ce plan dans la direction AG, & qu'en même temps le plan peut se mouvoir suivant EH, GI, sans qu'un de ces mouvements trouble l'autre; parce qu'en ne supposant aucune puissance

PLANC. I. qui trouble le mouvement du corps ſuivant AG, ce mouvement doit ſe continuer ſans altération, en vertu de la force d'inertie. Ce qu'on dit ici de deux actions, ou mouvements, ſe peut dire d'un plus grand nombre; le raiſonnement ſeroit toujours le même. Donc le mouvement d'un corps ſuivant une direction, ne peut s'altérer par l'action de puiſſances qui agiroient ſur lui ſuivant d'autres directions quelconques; & à chaque inſtant le corps parcourt des eſpaces AG, EH, paralleles à chacune de ces directions.

PROPOSITION VIII.

FIG. 2. (57.) *Si deux puiſſances agiſſent en même temps ſur un corps* A, *l'une ſuivant la direction* AE, *& l'autre ſuivant la direction* AF; *le corps marchera ſelon une direction moyenne, & décrira une ligne* AGH, *dont on déterminera l'équation en égalant les valeurs du même temps dans lequel le corps marcheroit librement ſuivant chacune des deux directions, ces valeurs étant fournies par la nature du mouvement ſuivant chaque direction.*

Le corps, en quelque inſtant de ſon mouvement que ce ſoit, doit ſe mouvoir parallélement à AE, en vertu de l'action de la premiere puiſſance, & parallélement à EF, en vertu de l'action de la ſeconde; & il doit parcourir de petits eſpaces GI, IH, égaux à ceux KE, LF, qui ſont les différencielles des eſpaces que chacune des puiſſances lui feroit parcourir dans le même temps, ſi elle agiſſoit ſeule. Mais la ſomme des eſpaces KE eſt l'abſciſſe AE, & la ſomme des eſpaces $LF = IH$, eſt l'ordonnée EH: donc ſi l'on tire de la nature du mouvement qui auroit lieu ſuivant chacune des directions, ſi chaque puiſſance agiſſoit ſéparément, la valeur du temps dans lequel le corps parcourroit librement chaque eſpace AE, EH, & ſi l'on égale ces deux valeurs, attendu que le temps eſt le même, l'équation qui en réſultera, ſera celle de la ligne AGH, que le corps parcourt.

EXEMPLE I.

(58.) Suppoſons que le mouvement du corps A ſoit composé de deux autres qui, pris ſéparément, euſſent été uniformes, le premier ſe faiſant dans la direction AE, & le ſecond dans la direction AF. Exprimons par a les eſpaces parcourus ſuivant la premiere direction, & la viteſſe par u; exprimons auſſi par b les eſpaces parcourus ſuivant la ſeconde direction, & la viteſſe par v. Cela poſé, nous aurons (27.) $t = \frac{a}{u} = \frac{b}{v}$, ce qui donne $av = bu$; mais les mouvements étant uni-

formes, les viteſſes ſont conſtantes : cette équation appartient donc à la ligne droite *. Ainſi, dans ce cas, le corps décrira une ligne droite, en vertu du mouvement compoſé qu'on lui aura imprimé.

EXEMPLE II.

(59.) Suppoſons maintenant que le mouvement ſuivant AE ne ſoit pas uniforme, mais qu'il ſoit produit par une puiſſance accélératrice conſtante ; dans ce cas, nous aurons (36.) $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$, dans laquelle ſubſtituant $t = \frac{b}{v}$, & ordonnant, on a $= \frac{2Av^2}{\alpha}, a - \frac{Vb}{v})$, équation à la Parabole dont le parametre eſt $\frac{2Av^2}{\alpha}$ (le corps décrira donc cette courbe en vertu du mouvement compoſé qu'il aura reçu. **

COROLLAIRE I.

(60.) De là il ſuit qu'en vertu du mouvement compoſé, le corps parcourra la ligne AG dans le même temps qu'il eût employé à parcourir la droite AK, ou AL, s'il n'eût éprouvé que l'action d'une ſeule puiſſance.

COROLLAIRE II.

(61.) La direction AGH du mouvement compoſé eſt toujours dans le même plan que les directions AK, AL des mouvements ſimples compoſants. Car ſi, par chaque point de la direction AL, on mene une parallele à la direction AK, toutes ces paralleles compoſeront le plan dans lequel ſe trouvent les deux directions AK, AL des mouvements compoſants ; & comme le corps doit toujours ſe trouver ſur ces paralleles, ſans pouvoir jamais s'en écarter, (16.) il s'en-

---

* Les deux variables a & b n'étant qu'au premier degré, l'équation eſt à la ligne droite, car toute équation du premier degré appartient toujours à cette ligne.

** Cette équation appartient à la Parabole, parce qu'elle ne renferme que le quarré d'une des variables, ſçavoir, celui de l'eſpace b que parcourroit le corps ſuivant AF dans le temps t ; l'autre variable, qui eſt l'eſpace a qu'il parcourroit ſuivant AE dans le même temps, étant au premier degré. (Voyez, pour la démonſtration, l'excellent Cours de Mathématiques de M. *Bezout*, part. III, §. 387.) La quantité $a - \frac{Vb}{v}$, qui repréſente en général l'abſciſſe de cette Parabole, $= a - Vt = \frac{\alpha t^2}{2A}$ (36.) l'eſpace parcouru par le corps A, en vertu de la force accélératrice conſtante α (37.). Cela eſt d'ailleurs évident, en conſidérant que a eſt l'eſpace total que parcourt le corps dans le temps t, en vertu de ſa viteſſe initiale V, & de la force accélératrice conſtante α ; & que Vt eſt l'eſpace qu'il parcourt dans le même temps t, en vertu ſeulement de ſa viteſſe initiale. Donc, &c. Si le corps étoit en repos, lorſqu'il reçoit l'action de la force accélératrice, alors $V = 0$, & l'équation devient $\frac{2Av^2}{\alpha} a = b^2$.

ſuit qu'il ne peut jamais ſortir du plan qui paſſe par ces deux directions.

COROLLAIRE III.

(62.) Si trois puiſſances agiſſent dans le même temps ſur un corps, chacune ſuivant des directions particulieres, la direction compoſée que prendra le corps, ſera une ligne moyenne entre les trois directions; & l'équation de cette ligne ſe trouvera en égalant les valeurs du même temps, tirées de la nature du mouvement qu'auroit le corps, s'il marchoit librement ſuivant chacune de ces directions.

On voit clairement, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y inſiſter, qu'on trouvera facilement la direction compoſée, dans le cas de trois puiſſances; car (61.) on trouvera d'abord la direction réſultante de deux directions ſimples; & avec cette réſultante & la troiſieme direction, on trouvera celle que ſuivra réellement le corps en vertu de ces trois puiſſances.

COROLLAIRE IV.

(63.) Si les trois directions ſont dans un même plan, la direction réſultante ſe trouvera auſſi dans ce plan. C'eſt une conſéquence néceſſaire de ce qui a été dit.

COROLLAIRE V.

(64.) Ce qui a été dit au ſujet de trois puiſſances, doit s'entendre également de quatre, de cinq, ou d'un plus grand nombre de puiſſances qui agiroient enſemble ſur un même corps ſuivant des directions différentes.

PROPOSITION IX.

(65.) *La différencielle* GH *de l'eſpace que le corps* A *parcourt en vertu des deux puiſſances* α *&* β *qui l'animent ſuivant les directions* AE, AF, *eſt* $= \frac{dt}{A}\left((\int \alpha\, dt)^2 + (\beta dt)^2 \pm 2(\int \alpha\, dt)(\int \beta\, dt)\cos\Sigma\right)^{\frac{1}{2}}$: Σ *exprimant l'angle* EAF *que forment les deux directions, & le rayon étant égal à l'unité.*

Si du point G on abaiſſe ſur EH, la perpendiculaire GN, on aura, par les Elemens de Géométrie, $NI = GI \cos\Sigma$, & $GH^2 = GI^2 + IH^2 \pm 2NI \times IH = GI^2 + IH^2 \pm 2IH \,.\, GI \cos\Sigma$. Le ſigne $+$ étant pour le cas où l'Angle EAF ſera aigu, & le ſigne $-$ pour le cas où il ſera obtus. *

* Parce que l'angle EAF étant obtus, la perpendiculaire GN tombe en dedans du triangle GIH: au contraire, elle tombe en dehors, lorſque ce même angle eſt aigu. C'eſt le cas de la Figure.

Subſtituant maintenant dans cette équation les valeurs de $GI = da = (35.)\ \frac{dt}{A}\int \alpha\, dt$, & de $IH = db = \frac{dt}{A}\int \beta\, dt$, on aura $GH^2 = \frac{dt^2}{A^2}(\int \alpha\, dt)^2 + \frac{dt^2}{A^2}(\int \beta\, dt)^2 \pm \frac{2dt^2}{A^2}(\int \alpha\, dt)(\int \beta\, dt)\, cof\, \Sigma$, & par conſéquent $GH = \frac{dt}{A}((\int \alpha\, dt)^2 + (\int \beta\, dt)^2 \pm 2(\int \alpha\, dt)(\int \beta\, dt)\, cof\, \Sigma)^{\frac{1}{2}}$.

Scolie I.

(66.) Dans tout le cours de cet Ouvrage nous exprimerons le rayon, ou ſinus total, par l'unité, afin de ſimplifier le calcul.

Corollaire I.

(67.) Si l'angle $EAF = \Sigma$ étoit $= 0$; c'eſt-à-dire, ſi les deux directions AE, AF, concouroient enſemble de maniere à ne former qu'une ſeule & même direction, alors $cof\, \Sigma = 1$, & la valeur de GH devient $= \frac{dt}{A}((\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2 \pm 2(\int \alpha dt)(\int \beta dt))^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{A}\int dt(\alpha \pm \beta)$.

Corollaire II.

(68.) Si, outre cette condition, on avoit $\alpha = \beta$, on auroit $GH = \frac{2dt}{A}\int \alpha\, dt$, pour le cas où l'angle GIH ſeroit obtus; c'eſt-à-dire, lorſque les deux puiſſances ſeroient dirigées dans le même ſens; & $GH = \frac{dt}{A}\int dt \cdot 0 = 0$, pour le cas où l'angle GIH ſeroit aigu, ou que les deux puiſſances ſeroient dirigées en ſens contraires.

Corollaire III.

(69.) Dans ce dernier cas, le corps reſtera donc ſans mouvement.

Corollaire IV.

(70.) Si le corps reſte ſans mouvement, ce ſera parce que des puiſſances égales agiſſent dans des directions oppoſées.

Scolie II.

(71.) De même qu'on a trouvé la valeur de GH, lorſque le corps n'eſt ſoumis qu'à l'action de deux puiſſances, on la trouvera également lorſqu'il y en aura trois, ou un plus grand nombre.

Définition XVII.

(72.) La *décompoſition du mouvement* eſt la diviſion qu'on en fait,

PLANC. I. en supposant qu'il procede de différentes actions, quoique dans la réalité il ne procede que d'une seule, ou d'un moindre nombre que celui qu'on suppose.

PROPOSITION X.

FIG. 3. (73.) *Si l'on suppose que l'action d'une puissance* α *sur un corps* A, *suivant la direction* AH, *procede de l'action de deux autres puissances* $m\alpha$, $n\alpha$, *suivant les directions* AE, AF, *de façon que l'effet de ces deux puissances soit égal à celui qui résulte de la seule puissance* α; *ces puissances* α, $m\alpha$ & $n\alpha$, *seront entre elles comme les droites* AH, AE & AF, *qui sont déterminées par les droites* HE, HF *paralleles aux directions* AE, AF; m & n *exprimant deux quantités constantes.*

Car si deux puissances $m\alpha$ & $n\alpha$ agissant séparément sur le corps A suivant les directions AE, AF, sont telles que, par leurs actions séparées, l'une conduise le corps de A en E, & l'autre de A en F, dans le même temps; il est évident que, par leurs actions réunies, elles le conduiroient, dans le même temps, de A en H: (57.) or c'est précisément l'effet que produit la seule puissance α, agissant dans la direction AH. Mais on a (35.) $AH = \int(\frac{dt}{A}\int\alpha dt)$, $AE = \int(\frac{dt}{A}\int m\alpha dt)$ & $AF = \int(\frac{dt}{A}\int n\alpha dt)$: donc les droites AH, AE & AF seront entre elles comme $\frac{dt}{A}\int\alpha dt$, $\frac{dt}{A}\int m\alpha dt$ & $\frac{dt}{A}\int n\alpha dt$; ou comme 1 m & n; c'est-à-dire, comme α, $m\alpha$ & $n\alpha$.

COROLLAIRE I.

(74.) La puissance qui agit suivant AE sera donc $= \frac{\alpha AE}{AH}$, & celle qui agit suivant AF, sera $= \frac{\alpha AF}{AH}$.

COROLLAIRE II.

(75.) Puisque dans le triangle AEH, les côtés AH, AE & $EH = AF$ sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés; il s'ensuit que les puissances α, $m\alpha$ & $n\alpha$ seront aussi entre elles comme ces mêmes sinus.

COROLLAIRE III.

(76.) La décomposition du mouvement étant arbitraire, on peut prendre

prendre comme on voudra les directions *AE*, *AF*; & tirant ensuite d'un point quelconque *H*, les paralleles *HF*, *HE*, à ces directions; si alors on exprime par *AH* la puissance qui agit effectivement dans cette direction, les lignes *AE*, *AF* exprimeront les deux puissances dans lesquelles elle se décompose, & qui agissant dans ces directions, produiroient le même effet. PLANC. I.

PROPOSITION XI.

(77.) *Si l'on suppose que l'action d'une puissance qui agit sur un corps* A *dans la direction* AH, *provienne de trois autres puissances, qui, agissant dans les directions* AF, AG, AE, *produiroient le même effet; ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes* AH, AF, AG & AE. FIG. 4.

Car si la puissance qui agit suivant *AH*, est représentée par la ligne même *AH*, on peut la concevoir décomposée en deux autres *AF*, *AI*, qui produiroient le même effet (76.). La puissance qui agit suivant *AI*, peut l'être de même en deux autres *AG*, *AE*, qui produiroient le même effet qu'elle. Ainsi la puissance *AH* sera décomposée en trois autres *AF*, *AG*, *AE*, qui, par leurs actions réunies, produiront le même effet que cette puissance seule. Donc ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes *AH*, *AF*, *AG* & *AE*.

COROLLAIRE I.

(78.) Les trois directions *AF*, *AG*, *AE*, étant arbitraires (76.), elles peuvent se prendre comme on voudra; & tirant d'un point quelconque *H*, & par le point *A* les paralleles arbitraires *HF*, *AI*, & ensuite les paralleles *HI*, *IG*, *IE* aux directions arbitraires *AF*, *AE*, *AG*, ces paralleles détermineront les lignes *AF*, *AG*, *AE*, qui exprimeront les puissances dans lesquelles se décompose la premiere puissance *AH*, & qui, par leur réunion, produiront le même effet qu'elle.

COROLLAIRE II.

(79.) On peut, par ce même procédé, décomposer une puissance quelconque en quatre, cinq, enfin en tel nombre de puissances qu'on voudra, & qui, par la réunion de leurs actions, produiront le même effet que cette puissance seule.

Planc. I.

CHAPITRE III.

Du Centre de Gravité d'un Systême de corps, & de son Mouvement.

Définition XVIII.

(80.) On appelle *Systême de corps* un assemblage de plusieurs corps, comme *A*, *B*, *C*, *&c.* de même qu'on a nommé *Systême du Monde*, l'assemblage du Soleil & des Planetes, &c. dont *Newton* a si parfaitement expliqué les mouvements par les seuls principes de la Méchanique, & par la loi de l'attraction universelle, que l'expérience confirme chaque jour de plus en plus.

Proposition XII.

Fig. 5.

(81.) *Si deux corps, ou masses* A *&* B, *supposés en repos, sont mis en mouvement par l'action de deux puissances* α *&* β, *dont les directions* AE, BF, *soient paralleles; la différencielle de l'espace parcouru par le point* G *pris dans la ligne* Gg *parallele aux directions* AE, BF *des puissances, sera* $=\frac{AA'dt\int\beta dt+BB'dt\int\alpha dt}{AB(A'+B')}$: A' *&* B' *exprimant les distances* AG, GB, *&* t *le temps.*

Tirez la ligne *FH*, parallele à *BA*, nommant *a* & *b* les espaces parcourus par les corps *A* & *B*, & prenant *AE* & *BF* pour les différencielles de ces espaces, on aura $HE=da-db$. Or, à cause des paralleles, on a *FH*, ou $(A'+B')$: *HE*, ou $(da-db)$ :: *FH*, ou (B') : $hg=\frac{B'}{A'+B'}(da-db)$: donc *Gg*, différencielle de l'espace parcouru par le point $G=db+\frac{B'}{A'+B'}(da-db)=\frac{A'db+B'da}{A'+B'}$. Si l'on substitue maintenant dans cette expression (35.) à la place de *db* sa valeur $\frac{dt}{B}\int\beta dt$, & à la place de *da* sa valeur $\frac{dt}{A}\int\alpha dt$, on aura $GH=$

$$\frac{\frac{A'dt}{B}\int\beta dt+\frac{B'dt}{A}\int\alpha dt}{A'+B'}=\frac{AA'dt\int\beta dt+BB'dt\int\alpha dt}{AB(A'+B')}.$$

Scolie.

(82.) On suppose, pour le présent, que la masse de chaque corps est infiniment petite, ou qu'elle est toute réunie en un point, & que c'est sur ce point que la puissance agit.

COROLLAIRE I. PLANC. I.

(83.) Si $AA'=BB'$, la différencielle de l'espace parcouru par le point G, c'est-à-dire Gg, sera $=\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$; car en substituant AA' à la place de BB', dans l'expression $Gg=\frac{AA'dt\int\beta dt+BB'dt\int\alpha dt}{AB(A'+B')}$ elle deviendra $Gg=\frac{AA'dt\int\beta dt+AA'dt\int\alpha dt}{AA'(A+B)}=\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$.

COROLLAIRE II.

(84.) Comme les distances A' & B' n'entrent pas dans l'expression qu'on vient de trouver, il s'ensuit que ces distances n'en alterent point la valeur. Cette expression sera donc toujours la même, à quelque distance du point G que soient les corps, pourvu que les distances A' & B' soient toujours en raison inverse des masses A & B; condition exprimée par l'équation $AA'=BB'$.

COROLLAIRE III.

(85.) On voit encore qu'on peut supposer les distances GA, GB diminuées à l'infini; c'est-à-dire, les supposer égales à zéro, sans que l'expression ci-dessus en soit altérée. Dans ce cas les deux corps seront réunis dans le point G, & marcheront dans la ligne Gg. Pareillement, les deux puissances réunies agiront comme une seule $=\alpha+\beta$, sur le corps $A+B$. Donc lorsque les corps A & B sont animés par les puissances α & β, le point G parcourt suivant Gg, parallele aux directions AE & BF, le même espace que lorsque les deux corps, réunis au point G, sont animés suivant Gg par la puissance $\alpha+\beta$.

PROPOSITION XIII.

(86.) *Si trois corps, ou masses*, A, B, C *sont animés par trois puissances* α, β, γ, *suivant les directions paralleles* AE, BF, CH; *& si l'on prend le point* G *de maniere qu'on ait* $A \cdot Ag=B \cdot Bg$ & $(A+B)\,Gg=C \cdot GC$; *je dis que la différencielle de l'espace parcouru par le point* G *sera* $=\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$. FIG. 6.

Le point g ayant été pris de maniere qu'on ait $A \cdot Ag=B \cdot gB$, la différencielle de l'espace parcouru par le point g est la même que celle que parcourroit le corps $A+B$ placé en g, & animé par la puissance $\alpha+\beta$, suivant la direction gh parallele aux lignes AE, BF, CH.

PLANC. I. Il est donc évident que, quant à l'effet, le cas est le même que si les deux corps C & $A+B$, l'un placé en C, & l'autre en g, étoient animés par les puissances γ & $\alpha+\beta$, suivant les directions paralleles CH, gh. Ainsi, la différencielle de l'espace parcouru par le point G, suivant la parallele GI aux autres directions, ce point étant pris de maniere qu'on ait $(A+B)\, Gg = C \cdot GC$; ou, ce qui revient au même, de maniere que les distances gG, GC soient en raison inverse des masses $A+B$ & C, cette différencielle, dis-je, sera exprimée par la formule $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, en y substituant $\alpha+\beta$ à la place de α & γ à la place de β; $A+B$ pour A, & C pour B. Donc la différencielle de l'espace parcouru par le point G, suivant la droite GI parallele aux directions AE, BF, CH, sera $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)\,dt}{A+B+C}$.

COROLLAIRE I.

(87.) Les distances Ag, gB, gG, GC, ne se trouvant point dans l'expression $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)\,dt}{A+B+C}$, il s'ensuit qu'elles n'ont aucune influence sur la valeur de cette expression; & par conséquent qu'elle restera toujours la même, quelles que puissent être ces distances, pourvu toutefois que Ag, gB, soient en raison inverse des masses A & B, & que de même gG & GC, soient en raison inverse des masses $A+B$, & C.

COROLLAIRE II.

(88.) Les distances Ag, gB, gG, GC, peuvent donc être diminuées à l'infini, ou se réduire à zéro, sans que la valeur de l'expression $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$ en soit altérée: & comme dans ce cas les trois corps A, B, C se trouveront réunis dans le point G, ainsi que les trois puissances α, β & γ, qui n'en feront plus qu'une seule $= \alpha+\beta+\gamma$; il s'ensuit que le point G parcourra le même espace dans la direction GI parallele aux directions AE, BF, GH, lorsque les corps A, B, C sont animés par les puissances α, β, γ, que si les trois corps réunis en un seul au point G, étoient animés, suivant la direction GI, par la puissance $\alpha+\beta+\gamma$.

PROPOSITION XIV.

(89.) *Si l'on a quatre corps, ou masses, comme* A, B, C, D,
FIG. 7. *animés par les quatre puissances* α, β, γ, δ, *chacune d'elles agissant*

sur le corps qui lui correspond suivant les directions paralleles AE, BF, CH, DL; *& si l'on prend le point* G *de maniere que* A . Ag = B . Bg; *que* (A+B) gK = C.KC; *& que* (A+B+C) GK = D . DG : *je dis que la differencielle de l'espace parcouru par le point* G *sera* $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,dt}{A+B+C+D}$.

On vient de démontrer que la différencielle de l'espace parcouru par le point *K*, en vertu des trois puissances α, β, γ, qui animent les corps *A*, *B*, *C*, est la même que celle que parcourroient ces corps, si, étant réunis tous les trois en un seul au point *K*, ils étoient animés par la puissance $\alpha+\beta+\gamma$, suivant la direction *KI* parallele aux autres directions *AE*, *BF*, *&c.* Donc, quant à l'effet, ce cas est le même que s'il y avoit seulement deux corps *D*, & *A+B+C*, l'un en *D*, & l'autre en *K*, qui seroient animés par les puissances δ, & $\alpha+\beta+\gamma$, selon des directions paralleles aux autres. Ainsi, la différencielle de l'espace parcouru par le point *G*, pris de façon qu'on ait $D . DG = (A+B+C)\ KG$, ou que les distances *KG*, *DG* soient en raison inverse des masses *D*, & (*A+B+C*), sera celle que fournira la formule $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, en y substituant $\alpha+\beta+\gamma$ pour α, & δ pour β; *A+B+C* pour *A*, & *D* pour *B*. Donc la différencielle de l'espace parcouru par le point G suivant la parallele *GN* aux autres directions *AE*, *BF*, *&c.* est $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

COROLLAIRE I.

(90.) En raisonnant comme on vient de le faire, on arrivera toujours à la même conclusion, quel que soit le nombre des corps, ou masses, quand même il seroit infini; de sorte qu'en général, la différencielle de l'espace parcouru par le point *G*, pris d'après les conditions exprimées ci-dessus, sera $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.)\,dt}{A+B+C+D+\&c.}$, la même que parcourroient les corps réunis en un seul au point *G*, s'ils étoient animés par la puissance $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ *&c.* C'est une conséquence nécessaire de ce que les distances respectives des corps les uns à l'égard des autres, ne se trouvent point dans l'expression générale de cette différencielle; & par conséquent on peut concevoir ces distances diminuées à l'infini, ou les faire chacune égale à zéro, sans que, pour cela, l'expression en soit altérée.

COROLLAIRE II.

(91.) Si nous faisons la somme des puissances $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ *&c.* $=\pi$;

PLANC. I. & la somme des masses $A+B+C+D+\&c.=M$, nous aurons la quantité $\frac{d s f r d t}{M}$ pour l'expression de la différencielle de l'espace parcouru par le point G, ce point étant pris suivant la condition exprimée dans les *Art.* 81, 86 & 89.

PROPOSITION XV.

FIG. 8. (92.) *Si l'on prend le point* G *de maniere que* $AG . A=BG . B$, *& qu'on abaisse sur un plan quelconque* FE *les perpendiculaires* AE, Gg, BF; *on aura* $gG=\frac{A . AE+B . BF}{A+B}$.

Faisant passer par le point G le plan HI parallele au plan EF, on aura le produit $A . AE=A . (gG+HA)$, & le produit $B . BF= B . (gG-IB)$; donc la somme des deux produits $A . AE+B . BF$ sera $=(A+B) gG+A . HA-B . IB$. Mais la similitude des triangles AHG, BIG donne $AG : AH :: GB : IB=\frac{AH . GB}{AG}$; substituant cette valeur de IB dans l'équation précédente, on aura $A . AE+B . BF=(A+B) gG+A . HA-\frac{B . AH . GB}{AG}$; & en mettant pour $B . BG$ le produit $A . AG$ qui lui est égal, cette équation devient $A . AE+B . BF=(A+B) gG+A . HA-A . HA= (A+B) gG$; d'où l'on tire $gG=\frac{A . AE+B . BF}{A+B}$.

COROLLAIRE.

(93.) Si au lieu des masses A & B, on prend les puissances α & β, de sorte qu'on ait $\alpha . AG=\beta . BG$, on aura encore $gG=\frac{\alpha . AE+\beta . BF}{\alpha+\beta}$.

PROPOSITION XVI.

FIG. 9. (94.) *Si l'on a trois corps, ou masses, comme* A, B, C, *& si l'on prend le point* G *de maniere que* $A . AG=B . BG$, *&* $(A+B) gG =C . CG$; *je dis que si l'on abaisse sur un plan quelconque* FI, *les perpendiculaires* BF, AE, GH, CI, *on aura* $GH=\frac{A . AE+B . BF+C . CI}{A+B+C}$.

Puisque $(A+B) gG=C . CG$, on a (92.) $(A+B) gK+C . CI= (A+B+C) GH$; & puisque $A . Ag=B . Bg$, on a $A . AE+ B . BF=(A+B) gK$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $A . AE+B . BF+C . CI=(A+B+C) GH$; d'où l'on tire $GH=\frac{A . AE+B . BF+C . CI}{A+B+C}$.

COROLLAIRE I.

(95.) Si, au lieu des masses A, B, C, on prend les puissances α, β, γ, & qu'on ait $\alpha . Ag = \beta . Bg$, & $(\alpha+\beta) gK = \gamma . CG$, on aura encore $GH = \frac{\alpha . AE + \beta . BF + \gamma . CI}{\alpha+\beta+\gamma}$.

COROLLAIRE II.

(96.) On démontrera la même chose pour quatre, cinq, &c. & même pour une infinité de corps, ou de puissances; ensorte que la distance perpendiculaire du point G, pris comme on l'a dit, *Art.* 92 & 94, à un plan quelconque, sera toujours égale à la somme des produits de chaque corps, ou puissance, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps, ou des puissances.

COROLLAIRE III.

(97.) Réciproquement, si la distance perpendiculaire d'un point G à un plan quelconque, est égale à la somme des produits de chaque corps, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps; ce point G sera celui dont on a parlé dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 *& suiv. jusqu'à* 94.); & par conséquent il aura toutes les propriétés qu'on lui a reconnues & assignées dans ces Propositions & leurs Corollaires.

DÉFINITION XIX.

(98.) Le point G déterminé de la maniere qu'on l'a prescrit dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 *jusqu'à* 94.), s'appelle communément *Centre de gravité.*

SCOLIE.

(99.) Ce nom de *Centre de gravité* ne convient proprement à ce point qu'autant que les puissances qui agissent sur le système, sont les gravités des corps, ou des masses: mais comme il arrive souvent que d'autres puissances différentes des gravités agissent sur les corps, & que le centre de ces puissances n'est point le même que celui des masses, comme on le verra ci-après; cette considération a engagé *Daniel Bernoulli* à distinguer ces deux centres, en appellant l'un *Centre des puissances*, & l'autre *Centre des masses.*

PLANC. I. Comme ces deux centres ſont réunis dans les corps graves, à cauſe que les puiſſances, ou gravités, ſont entre elles comme les maſſes (48.), il convient d'appeller centre de gravité l'un ou l'autre de ces centres indiſtinctement. Ainſi, lorſqu'il ne ſera queſtion d'autre puiſſance que de la gravité, ce ſera la même choſe de dire *Centre des maſſes* que *Centre de gravité*, puiſque, dans ce cas, ces deux centres ne différent point l'un de l'autre.

PROPOSITION XVII.

FIG. 10. (100.) *Quelles que ſoient les vîteſſes particulieres avec leſquelles ſe meuvent les corps qui compoſent un ſyſtéme, lorſqu'ils marchent tous ſur des directions paralleles, le centre des maſſes ſe maintiendra toujours dans une ſeule & même direction parallele à celles que ſuivent les corps.*

Que A, B, C, &c. ſoient les corps qui compoſent le ſyſtême, & qui ſe meuvent dans les directions AE, BF, CI, paralleles entre elles; qu'on prenne un plan quelconque LK, parallele à ces directions: alors G étant le centre des maſſes, on aura $GH = \frac{A \,.\, Ae + B \,.\, Bf + C \,.\, Ci + \&c.}{A + B + C + \&c.}$. Or, dans cette expreſſion toutes les maſſes demeurent conſtantes, ainſi que les perpendiculaires Ae, Bf, Ci, &c. quelles que ſoient les vîteſſes particulieres avec leſquelles les corps ſe meuvent, pourvu qu'on les ſuppoſe marcher parallélement au plan LK; donc toute l'expreſſion demeure conſtante, & par conſéquent la ligne GH dont elle exprime la valeur. Donc le centre G des maſſes ſe mouvera dans une ſeule & même direction parallele à celle que ſuivent les corps.

COROLLAIRE I.

(101.) La même choſe arrivera au centre des puiſſances, ſi elles ſont conſtantes, comme l'eſt la gravité.

COROLLAIRE II.

(102.) Il ſuit de ce qui a été dit, que la direction du centre des maſſes d'un ſyſtême de corps ſera toujours parallele aux directions des puiſſances, ſi ces directions ſont paralleles entre elles; & que la différencielle de l'eſpace parcouru par ce centre (91.) ſera toujours $= \frac{dt \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.)\, dt}{A + B + C + D + \&c.} = \frac{dt \int \pi dt}{M}$, la même que parcourroient les corps, ou maſſes, ſi elles étoient réunies à leur centre, & ſi elles étoient animées par la ſomme π des puiſſances, ſuivant une direction parallele à celle des puiſſances.

COROLLAIRE III.

(103.) La distance perpendiculaire du centre des masses à un plan quelconque, est égale (96.) à la somme des produits de chaque masse par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des masses.

COROLLAIRE IV.

(104.) Pareillement, la distance perpendiculaire du centre des puissances qui agissent dans un systême, à un plan quelconque, sera (96.) égale à la somme des produits de chaque puissance par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des puissances.

COROLLAIRE V.

(105.) Si l'on suppose l'espace parcouru par le centre des masses $= g$, & sa vitesse $= W$, on aura (29 & 90, 91.) $dg = W dt = \frac{dt \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.) dt}{A + B + C + D + \&c.} = \frac{dt \int \pi dt}{M}$. Donc $W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.}{A + B + C + D + \&c.} = \frac{\int \pi dt}{M}$; $dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&c.}{M} = \frac{\pi dt}{M}$; & $dt = \frac{M dW}{\alpha + \beta + \gamma + \&c.} = \frac{M dW}{\pi}$.

COROLLAIRE VI.

(106.) Ayant trouvé ci-dessus (29.) $dg = W dt$, ou $W = \frac{dg}{dt}$, & ayant pareillement (105.), $dW = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \&c.) dt}{M} = \frac{\pi dt}{M}$; en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura aussi $W dW = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \&c.) dg}{M} = \frac{\pi dg}{M}$: d'où l'on tire, en intégrant, $\frac{1}{2} W^2 = \frac{\int (\alpha + \beta + \gamma + \&c.) dg}{M} = \frac{1}{M} \int \pi dg$; ou $W^2 = \frac{2 \int (\alpha + \beta + \gamma + \&c.) dg}{M} = \frac{2}{M} \int \pi dg$.

COROLLAIRE VII.

(107.) De même, si l'on substitue dans l'équation $W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ la valeur de $\alpha dt = A du$ (19.), & celle de $\beta dt = B dv$, &c., nous aurons $W = \frac{\int A du + \int B dv + \&c.}{A + B + \&c.} = \frac{Au + Bv + \&c.}{A + B + \&c.}$: c'est-à-dire que la vitesse du centre des masses est égale à la somme des produits de chaque masse par sa vitesse, divisée par la somme des masses.

Corollaire VIII.

(108.) Si les puiſſances qui animent les corps ne ſont pas dirigées ſuivant des lignes paralleles, on pourra les décompoſer chacune en deux, ou en trois autres dirigées ſuivant des lignes paralleles à deux, ou trois lignes droites données de poſition, & perpendiculaires entre elles. Alors toutes les puiſſances qui ſont dirigées parallélement à l'une de ces lignes, donneront, avec la plus grande facilité, le mouvement du centre des maſſes ſuivant cette direction. On trouvera de même ſon mouvement ſuivant les autres directions; enſuite on déduira, avec la même facilité, le mouvement compoſé de ce centre.

Corollaire IX.

(109.) Puiſque, par le moyen de cette décompoſition des puiſſances, on obtient le mouvement compoſé du centre de gravité, il ſuffira, pour réſoudre un cas quelconque, de réſoudre ſeulement celui dans lequel les puiſſances ſont dirigées parallélement: c'eſt auſſi ce que nous ferons pour le préſent.

Corollaire X.

(110.) Si, dès le premier inſtant de l'action, la ſomme des puiſſances poſitives qui agiſſent ſur le ſyſtême, eſt égale à la ſomme des puiſſances négatives, le centre des maſſes demeurera immobile; car, dans ce cas, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.=0$.

Corollaire XI.

(111.) Comme les directions des puiſſances qui ne ſont pas paralleles, ſe décompoſent en d'autres qui le ſont, il peut arriver que, l'eſpace parcouru par le centre des maſſes, ſuivant une ou deux directions, ſoit zéro, ſans que, pour cela, celui qu'il parcourt ſuivant les autres directions ceſſe d'avoir lieu. Il ſuffit, pour cela, que, dès le commencement de l'action, la ſomme des puiſſances poſitives qui agiſſent ſuivant cette direction, ou ces directions, ſoit égale à la ſomme des puiſſances négatives.

Corollaire XII.

(112.) Si les corps qui compoſent un ſyſtême, au lieu d'être libres, ſont liés, ou unis entre eux par des lignes inflexibles, de ſorte qu'ils

ne puiſſent obéir à l'action des puiſſances, & prendre les directions ſuivant leſquelles ils ſont ſollicités; on peut, dans ce cas, conſidérer chaque corps comme animé par deux puiſſances, dont l'une eſt celle qui le meut réellement, & l'autre qui procede de la tenſion, ou de la force avec laquelle les corps ſe tirent mutuellement. Mais à chacune de ces dernieres puiſſances, conſidérée poſitivement, répond toujours une puiſſance égale & négative, puiſque l'action eſt égale à la réaction : donc, dès le premier inſtant de l'action, on aura $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c. = 0$, par rapport aux forces avec leſquelles les corps ſe tirent mutuellement, & par conſéquent le centre des maſſes demeurera immobile, c'eſt-à-dire, ne recevra aucun mouvement de l'action des forces avec leſquelles les corps ſe tirent mutuellement. *

COROLLAIRE XIII.

(113.) Il ſuit de là que le mouvement du centre des maſſes d'un ſyſtême de corps liés entre eux par des lignes inflexibles, ſera le même que s'il n'étoit ſoumis qu'à l'action des puiſſances qui mettent les corps en mouvement; par conſéquent le mouvement du centre des maſſes du ſyſtême ſera toujours le même, ſoit que les corps ſoient libres, ſoit qu'ils ſoient liés entre eux par des lignes inflexibles.

COROLLAIRE XIV.

(114.) Un corps quelconque eſt la même choſe qu'un ſyſtême de corps infiniment petits, liés entre eux. Donc le centre de la maſſe totale d'un corps quelconque, ſoumis à l'action de puiſſances quelconques, ſe mouvera de la même maniere que ſi chaque particule de la matiere qui le compoſe étoit ſéparée & libre; ou comme ſi c'étoit un ſyſtême de corps libres.

---

* Ce principe eſt de la plus grande fécondité dans la ſcience du mouvement des corps; c'eſt à lui que les Sciences Phyſico-Mathématiques ſont redevables des progrès immenſes qu'elles ont faits. Il eſt généralement attribué à M. *d'Alembert*, qui le publia en 1743. (*Voyez* ſa Dynamique.) M. *Fontaine* a ſemblé le révendiquer; (*Voyez* ſon Traité du calcul intégral.) mais cependant la gloire de l'invention eſt demeurée à M. *d'Alembert*; & nous penſons que c'eſt à juſte titre. M. *d'Alembert* a publié ce principe dès 1743, & M. *Fontaine* n'en a parlé qu'en 1764. La poſtérité eſt inexorable, elle ne connoît que les dates, pour décerner les honneurs dus à ceux qui l'ont ſervie. *Il faut publier promptement ce qu'on a fait & ce qu'on a vu de nouveau dans les ſciences; les tardifs ſont toujours malheureux.* (M. Bailly, Hiſt. de l'Aſtronomie moderne, Tome II, page 103.)

Corollaire XV.

(115.) On doit entendre la même chose d'un système de corps unis entre eux, quoique sa masse ne soit pas considérée comme réunie à son centre.

Corollaire XVI.

(116.) D'après cela, nous aurons, généralement, pour quelque corps que ce soit, ou pour tout assemblage de corps libres, ou liés entre eux, $dg = \frac{dt(\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.)}{M} = \frac{dt}{M} \int \pi dt$.

$W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.}{M} = \frac{1}{M} \int \pi dt$. $dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&c.}{M} = \frac{\pi dt}{M}$.

$dt = \frac{MdW}{\alpha + \beta + \gamma + \&c.} = \frac{MdW}{\pi}$. $W^2 = \frac{2}{M} \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.) dg = \int \pi dg$.

$W = \frac{Au + Bv + \&c.}{M}$.

Corollaire XVII.

(117.) Si l'on avoit $W = 0$, on auroit aussi $Au + Bv + \&c. = 0$; & si le système n'étoit composé que des deux corps A & B, l'un agiroit positivement, & l'autre négativement; en sorte qu'on auroit $Au = Bv$; d'où l'on tire $u : v :: B : A$, ou $:: \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$. C'est-à-dire que dans tout système, ou machine composée de deux corps, les vitesses des corps sont en raison inverse des masses, lorsque le centre des masses est immobile.

Corollaire XVIII.

(118.) Dans les corps graves, les puissances sont comme les masses : donc dans toute machine dont la gravité est le principe moteur, les vitesses que prennent les deux corps dont on suppose la machine composée, sont en raison inverse des puissances, ou des gravités, si le centre de gravité demeure fixe. Si au contraire ce centre est en mouvement, la raison qui régnera entre les puissances ne sera pas égale à celle qui régnera entre les vitesses prises dans un ordre inverse; c'est-à-dire que l'analogie du Corollaire précédent cesse d'avoir lieu.

Corollaire XIX.

(119.) Si l'on avoit $\alpha + \beta + \gamma + \&c = 0$, on auroit $dW = 0$; & réciproquement, pour que $dW = 0$, il faut que la somme des puissances $\alpha + \beta + \gamma + \&c.$ qui animent le corps, ou le système de corps,

ſoit égale à zéro. Ainſi le centre des maſſes d'un corps, ou d'un ſyſtême, ne peut ſe mouvoir avec une viteſſe, ou un mouvement uniforme, à moins que toutes les puiſſances agiſſantes ne ſe détruiſent mutuellement, ou que l'action de chacune d'elles ne ſoit égale à zéro. *

COROLLAIRE XX.

(120.) Comme la ſuppoſition que les corps du ſyſtême ſont liés entre eux, ne change rien à la démonſtration donnée dans les *Art.* 96 & 97, au ſujet de la diſtance perpendiculaire du centre des maſſes à un plan quelconque; il s'enſuit que la diſtance perpendiculaire du centre de maſſe d'un corps quelconque à un plan, ſera égale à la ſomme des produits de chaque particule de la maſſe qui le compoſe, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par la ſomme deſdites particules, ou par la maſſe totale du corps. Pareillement, la diſtance perpendiculaire du centre des puiſſances qui agiſſent ſur un corps à un plan quelconque, ſera égale à la ſomme de tous les produits de chaque puiſſance, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par la ſomme des puiſſances.

COROLLAIRE XXI.

(121.) On a vu (12.) que dans les corps d'une denſité uniforme, la maſſe eſt proportionnelle à l'eſpace qu'ils occupent; il s'enſuit que, dans le calcul, on pourra prendre l'eſpace, ou le volume pour la maſſe: ainſi la diſtance perpendiculaire du centre des maſſes à un plan quelconque, ſera égale à la ſomme des produits de chaque eſpace, ou volume différenciel, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par tout l'eſpace qu'occupe le corps.

COROLLAIRE XXII.

(122.) Si un corps uniformément denſe peut être diviſé en deux parties égales & ſemblables par des plans, & ſi on le diviſe par trois plans quelconques, qui ſe coupent entre eux perpendiculairement; le centre des maſſes ſera dans le point commun à ces trois plans, c'eſt-à-dire, dans le point où les trois interſections des plans ſe ren-

---

* On voit aſſez, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y inſiſter, qu'on ſuppoſe le centre de maſſe du ſyſtême en mouvement avec la viteſſe H, lorſque les puiſſances α, β, γ, &c. commencent leur action; car il eſt évident (112.) qu'il ne pourroit recevoir aucun mouvement par l'action de ces puiſſances dont la ſomme = 0.

contrent. Car les produits des volumes différenciels qui sont situés d'un côté de l'un quelconque de ces trois plans, par leurs distances perpendiculaires au même plan, seront égaux aux produits correspondants des volumes différenciels situés de l'autre côté : mais ces produits étant les uns positifs, & les autres négatifs, se détruisent mutuellement ; leur somme sera donc égale à zéro : ainsi la distance perpendiculaire du centre de masse au plan, sera par conséquent égale à zéro ; ou, ce qui revient au même, le centre de masse se trouvera dans le même plan. Ce raisonnement pouvant se faire pour chacun des trois plans, il s'ensuit que le centre de masse doit aussi se trouver dans chacun des deux autres plans : il sera donc dans le point commun à ces trois plans, c'est-à-dire, au point où les trois interfections se rencontrent.

COROLLAIRE XXIII.

(123.) Le centre de la masse d'une sphere uniformément dense, sera donc le même que son centre de grandeur, ou de figure. Il en est de même du centre de la masse d'un ellipsoïde, d'un paralélipipede, d'un cylindre, ou de tout autre corps susceptible d'être divisé en deux parties égales par trois plans qui se coupent perpendiculairement.

SCOLIE.

(124.) Après ce que nous venons de dire, il ne sera pas difficile de trouver le centre de masse d'un corps quelconque uniformément dense. Pour cela, il n'y aura qu'à imaginer un plan passant par un point quelconque du corps, nous l'appellerons *plan primitif* ; ensuite diviser le corps par deux plans paralleles au plan primitif, & infiniment près l'un de l'autre, afin qu'ils renferment une tranche, ou espace différenciel parallele dans tous ses points au plan primitif. Cet espace différenciel étant multiplié par sa distance perpendiculaire audit plan ; prenant ensuite l'intégrale du produit, & la divisant par le volume du corps, ou par l'espace total qu'il occupe, le quotient de la division exprimera la distance perpendiculaire du plan primitif à un plan qui lui est parallele, & qui passe par le centre de masse du corps. Cette opération étant répétée par rapport à trois *plans primitifs* qui se croisent perpendiculairement, on aura la position de trois plans perpendiculaires entre eux, & qui passent tous par le centre de masse ; le point commun à ces trois plans sera par conséquent le centre de la masse totale du corps.

Mais il y a beaucoup de corps qui peuvent ſe diviſer en deux parties égales & ſemblables par deux plans perpendiculaires entre eux, mais qui ne peuvent pas l'être par trois; tels ſont les paraboloïdes, les hyperboloïdes, & tous les autres corps qui ſont formés par la révolution d'une courbe quelconque. Dans ce cas, il eſt certain, par ce qui a été dit dans *l'Art.* 122, que, les corps étant toujours ſuppoſés d'une denſité uniforme, le centre des maſſes ſera dans la commune ſection des deux plans, ou dans l'axe de révolution de la courbe génératrice. Pour trouver le point précis de cet axe où ſe trouve le centre de la maſſe totale, il n'y aura donc plus qu'à ſuppoſer un plan qui lui ſoit perpendiculaire, & opérer, à l'égard de ce plan, comme on l'a dit ci-deſſus. On peut, pour rendre le calcul plus facile, faire paſſer le plan primitif par l'origine des abſciſſes, ou par l'extrémité de l'axe; alors en appellant x les abſciſſes, & y les ordonnées de la courbe génératrice; & repréſentant par c la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt l'unité; cy ſera la circonférence du cercle que l'ordonnée décrira dans ſa révolution, & $\frac{1}{2}cy^2$ ſera l'aire de ce cercle, ou du plan parallele à celui qu'on ſuppoſe paſſer par l'extrémité de l'axe. On aura donc $\frac{1}{2}cy^2dx$ pour l'expreſſion de l'eſpace différenciel, ou de la tranche infiniment mince, qui eſt également éloignée dans tous ſes points du plan primitif, & $\frac{1}{2}cy^2xdx$ ſera le produit de cet eſpace, par ſa diſtance perpendiculaire à ce plan. La ſomme de ces produits ſera donc $\frac{1}{2}c\int y^2xdx$; mais $\frac{1}{2}c\int y^2dx$ eſt la ſomme de tous ces eſpaces, ou le volume total du corps; donc on aura la diſtance du plan primitif, ou de l'extrémité de l'axe, au centre de maſſe du corps $=\frac{\frac{1}{2}c\int y^2xdx}{\frac{1}{2}c\int y^2dx}=\frac{\int y^2xdx}{\int y^2dx}$: formule générale pour trouver le centre de maſſe de tous les corps d'une denſité uniforme, engendrés par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe.

EXEMPLE I.

(125.) Soit propoſé de trouver le centre de maſſe d'une demi-ſphere. L'équation du cercle générateur, en prenant ſon centre pour l'origine des abſciſſes, & faiſant ſon rayon $=r$, eſt $y^2=r^2-x^2$. Subſtituant cette valeur de y^2 dans la formule, on aura la diſtance du centre de la ſphere, ou de l'origine des x au centre de maſſe, $=\frac{\int(r^2-x^2)xdx}{\int(r^2-x^2)dx}=\frac{(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}x^2)x}{r^2-\frac{1}{3}x^2}$, d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{4}r}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}r$ pour la valeur de la diſtance cherchée, en faiſant $x=r$, afin de comprendre toute la demi-ſphere dans l'expreſſion.

PLANC. I.

EXEMPLE II.

(126.) Qu'il ſoit queſtion de trouver le centre de maſſe d'un paraboloïde. L'équation de la courbe génératrice eſt $y^2 = px$; ſubſtituant cette valeur de y^2 dans la formule générale, la diſtance de l'origine des abſciſſes au centre de la maſſe ſera $= \frac{\int px^2dx}{\int pxdx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$. Il en eſt de même de tous les autres corps de cette eſpece.

COROLLAIRE XXIV.

(127.) On trouvera de la même maniere le centre des puiſſances.

CHAPITRE IV.

De la Rotation d'un Syſtême.

DÉFINITION XX.

(128.) ON appelle *Rotation d'un Syſtême*, le mouvement par lequel il tourne ſur un point, ou ſur un axe quelconque mobile, ou immobile. L'angle que le ſyſtême décrit en vertu de ce mouvement de rotation, s'appelle *Angle gyratoire*, ou *de Rotation*.

PROPOSITION XVIII.

FIG. 23.

(129.) *Si deux corps* A & B, *liés enſemble par une ligne inflexible* AB, *ſont mis en mouvement par l'action des puiſſances* α & β, *ſuivant les directions paralleles* AF, BG, *de ſorte que, dans un inſtant, ou différencielle de temps* dt, *ils ſe trouvent en* E & I; *je dis que l'angle de rotation décrit pendant cet inſtant ſera* $= \frac{A'dt\int\alpha dt \sin\Sigma - B'dt\int\beta dt \sin\Sigma}{A'^2A + B'^2B}$: A′ & B′ *déſignant les diſtances reſpectives des corps* A & B *au centre* N *des maſſes*, & Σ *l'angle* KAB, *que forment les directions des puiſſances avec la ligne* AB.

On a vu (100.) que le centre de gravité *N* doit ſuivre la ligne *NHM*, parallele aux directions des puiſſances; il s'enſuit que les deux diſtances *HE*, *HI*, doivent être reſpectivement égales à *NA*, *NB*; & que *FE*, *GI* feront les eſpaces que parcourront les corps, en vertu des forces avec leſquelles ils ſe tirent mutuellement. Mais ces forces exerçant toujours leurs actions ſuivant les lignes *AB*, *EI*, qui

qui uniſſent les corps (112.), n'affectent point les forces, ou puiſſances, qui animent ces corps perpendiculairement aux mêmes lignes AB, EI. Cela poſé, les forces, ou puiſſances, qui agiſſent ſuivant AF, BG, ſont (75.) aux forces qui agiſſent perpendiculairement à AB, comme le rayon eſt à $\sin \Sigma$: donc la puiſſance qui anime le corps A perpendiculairement à AB, ſera $= \alpha \sin \Sigma$ *, & celle qui anime le corps B, dans la même direction, ſera $= \beta \sin \Sigma$. La différencielle de l'eſpace parcouru par le corps A, perpendiculairement à AB, ſera donc (35.) $= \frac{dt}{A} \int \alpha dt \sin \Sigma$, & celle de l'eſpace parcouru par le corps B, dans la même direction, ſera $= \frac{dt}{B} \int \beta dt \sin \Sigma$, & la quantité LE, dont un de ces eſpaces différenciels ſurpaſſe l'autre, ſera $= \frac{dt}{A} \int \alpha dt \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \int \beta dt \sin \Sigma$. **

Or l'angle de rotation LIE eſt, ſelon la Géométrie, $= \frac{LE}{LI} = \frac{LE}{AB}$ ***; donc l'expreſſion de cet angle ſera $= \dfrac{\frac{dt}{A} \int \alpha dt \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \int \beta dt \sin \Sigma}{AB}$: ou (en mettant pour AB ſa valeur $A' + B'$) $= \dfrac{\frac{dt}{A} \int \alpha dt \sin \Sigma - \frac{dt}{B} \int \beta dt \sin \Sigma}{A' + B'}$. Mais (83.) $A'A = B'B$; donc on aura, pour l'expreſſion de la valeur de cet angle, la quantité $\dfrac{\frac{dt}{A} \int \alpha dt \sin \Sigma - \frac{B' dt}{A' A} \int \beta dt \sin \Sigma}{A' + B'} = \dfrac{A' dt \int \alpha dt \sin \Sigma - B' dt \int \beta dt \sin \Sigma}{A A (A' + B')}$ $= \dfrac{A' dt \int \alpha dt \sin \Sigma - B' dt \int \beta dt \sin \Sigma}{A'^2 A + B'^2 B}$.

---

* Quoique ceci dérive directement de *l'Art.* 75, auquel l'Auteur renvoie, nous allons cependant en donner une démonſtration particuliere, en faveur des commençants. Soit la puiſſance α repréſentée par la portion Aq de ſa direction, décompoſée en deux puiſſances As, An, la premiere perpendiculaire à AB, & l'autre ſuivant AB. Dans le triangle rectangle Asq, on aura $Aq : As :: 1 : \sin Aqs = \sin KAB = \sin \Sigma$; donc la force $As = Aq \times \sin \Sigma = \alpha \sin \Sigma$. On démontrera de même dans le triangle Bux, que la force perpendiculaire $Bu = \beta \sin \Sigma$.

** LE eſt véritablement l'excès, ou la différence des deux eſpaces différenciels décrits par les corps A & B, en vertu des forces perpendiculaires à AB. Car ſi, par le point I, on mene IL parallele à AB; & ſi de ce même point I, comme centre, & avec le rayon $IL = AB$, on décrit l'arc infiniment petit LE, qui pourra être conſidéré comme une ligne droite perpendiculaire à IL; il eſt évident que, ſi les forces perpendiculaires à AB avoient eu la même énergie, ou avoient eu la propriété de ſe faire équilibre, les deux corps ſeroient demeurés conſtamment dans la même ligne parallele à AB; mais l'arc LE marque de combien le corps A s'eſt élevé au-deſſus de la parallele qui paſſe par le corps B arrivé en I : donc cet arc marque l'excès de l'eſpace différenciel parcouru par le corps A, en vertu de la force perpendiculaire à AB qui l'animoit, ſur l'eſpace différenciel parcouru par le corps B, en vertu de la force ſemblable qui agiſſoit ſur lui.

*** Il eſt aiſé de concevoir que l'angle LIE eſt l'angle de rotation du ſyſtême, & que ſon expreſſion eſt $\frac{LE}{LI}$.

DÉFINITION XXI.

(130.) On a aussi coutume de donner le nom de *Vitesse angulaire* à cet angle de rotation décrit pendant l'instant *dt*.

COROLLAIRE I.

Fig. 11.

(131.) La différencielle de l'espace parcouru par le corps *A* étant (29.) $= udt = LE$; & l'angle de rotation, ou la vitesse angulaire

---

En effet, puisque les puissances agissent sur les corps *A* & *B* dans les directions paralleles *AF*, *BG*, elles tendent à leur communiquer, ainsi qu'à toutes les parties de la ligne *AB* qui les unit, un mouvement parallele à ces directions; mouvement qui auroit effectivement & uniquement lieu, si cette ligne n'étoit pas inflexible, comme on le suppose. On a vu (110 & 112.) que le centre de gravité *N* du systéme se meut de la même maniere que si les puissances α & β y étoient appliquées; donc son mouvement sera rectiligne & simple, dans la direction *NM* parallele à celles des puissances. Mais à cause de la prépondérance de la puissance α sur la puissance β, la ligne *AB* doit s'incliner de plus en plus à l'égard de sa situation primitive *AB*, tandis que le centre de gravité *N* s'avance dans la ligne *NM*: or pour que cette inclinaison ait lieu, il faut que le corps *A* tourne dans un sens, & le corps *B* dans le sens opposé; par conséquent toutes les parties du systeme participent à ce mouvement, à l'exception du centre de gravité *N* que nous avons vu en être exempt. Donc tout le systéme tourne sur son centre de gravité.

On voit par-là que tous les points de la ligne *AB*, à l'exception du point *N*, doivent avoir un mouvement composé de deux autres, l'un rectiligne, qui tend à leur faire parcourir, ainsi qu'au point *N*, des espaces paralleles aux directions *AF*, *BG*; & l'autre de rotation autour de ce centre, qui tend à leur faire décrire, dans le même temps, des espaces proportionnels aux distances dont elles en sont éloignées. Ainsi, à parler rigoureusement, les corps *A* & *B* ne parcourent ni des lignes droites, ni des arcs de cercle; mais une courbe résultante de la combinaison d'un mouvement rectiligne & d'un circulaire; courbe qui, comme on le voit, est une *Cycloïde*. Mais, comme il ne s'agit ici que du mouvement de rotation pendant la différencielle de temps *dt*, nous ne considérerons que le mouvement circulaire.

Si l'on n'examine pas les mouvements absolus des deux corps *A* & *B*, ni ceux de la ligne *AB*, mais qu'on compare seulement ces mouvements à la position primitive *AB* que cette ligne avoit avant l'action des puissances α & β; il est évident que pendant la différencielle de temps *dt*, *AB* a du paroître tourner sur le point fixe *C*, intersection des deux lignes *AB*, *EI*, qui sont les positions du systéme au commencement & à la fin de l'instant *dt*. C'est ce point qu'on appelle *Centre de conversion*, & que *Bernoulli* a nommé *Centre spontané de rotation*.

Ceci posé, puisque le systéme a du paroître tourner sur le point *C*, il est clair que l'angle de rotation est *ACE* = l'angle *LIE*: & en menant par le centre de gravité *H* la droite *HK*, parallele à *AB*, on voit encore que cet angle est égal à l'angle *KHE*, qui est l'angle de rotation décrit autour du centre de gravité *H*.

Maintenant, on sçait, par les élements de Géométrie, qu'un angle est mesuré par l'arc de cercle décrit de son sommet comme centre, & intercepté entre ses côtés, que cet arc a toujours le même nombre de degrés, de quelque grandeur que soit son rayon, quoique sa grandeur absolue soit plus ou moins grande. Or, il est évident que le rayon demeurant le même, l'angle croitra en proportion de la grandeur de l'arc, c'est-à-dire, en raison directe de l'arc. Il est également évident que l'arc demeurant le même en grandeur absolue, l'angle croitra à proportion que le rayon diminuera, c'est-à-dire, en raison inverse du rayon. Donc en général les angles sont en raison directe de la grandeur absolue des arcs qui leur servent de mesure, & en raison inverse du rayon de ces arcs; par conséquent $Angl. = \frac{Arc}{Rayon}$. Donc $\frac{RL}{RE}$, ou $\frac{LE}{LI}$ est l'expression de l'angle de rotation.

Sinus $u = \frac{LI'}{dt} = \frac{ds}{dt}$,



étant $=\frac{LE}{LI}$; cette derniere vîtesse sera par conséquent $=\frac{udt}{LI}$; & la vîtesse u du corps A sera $=\frac{LE}{dt}=\frac{LE}{LI}\cdot\frac{LI}{dt}$. Donc la vîtesse u est égale à la vîtesse angulaire multipliée par $\frac{LI}{dt}$.

DÉFINITION XXII.

(132.) Les produits $A'\alpha$, $B'\beta$, $a\alpha$, $b\beta$, des puissances α & β, par leurs distances $A'=AN$, $B'=BN$, ou $a=AO$ & $b=BQ$ au centre N des masses, ou à un plan QM qui passe par ce centre, s'appellent *Moments de ces puissances.*

DÉFINITION XXIII.

(133.) Pareillement, les produits $A'A$, $B'B$ s'appellent *Moments des masses*, ou *de la gravité.*

DÉFINITION XXIV.

(134.) Les produits A'^2A, B'^2B des masses par le quarré de leur distance au centre des masses, ont été nommés *Moments d'inertie* par *Léonard Euler* (*Scientia navalis*, §. 165.). Nous nous servirons de cette expression dans la suite.

LEMME I.

(135.) *Les quantités* $A'\sin\Sigma$, $B'\sin\Sigma$, *sont égales aux perpendiculaires* AO, BQ, *tirées des corps sur la ligne* MN, *qui passant par le centre* N *des masses, est parallele aux directions* AF, BG *des puissances.*

Les angles ANO, QNB sont égaux à l'angle KAB; ils auront donc le même sinus, sçavoir, $\sin\Sigma$: de plus, les triangles ANO, QNB étant rectangles, on aura $1 : \sin\Sigma :: AN\,(A') : AO = A'\sin\Sigma$, & $1 : \sin\Sigma :: BN\,(B') : BQ = B'\sin\Sigma$. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

(136.) Représentant donc par a & b les perpendiculaires AO, BQ, l'expression de l'angle de rotation produit dans l'instant dt deviendra $=\frac{dt\int a\alpha dt - dt\int b\beta dt}{A'^2A+B'^2B}$.

Mais la ligne BQ étant de l'autre côté du centre des masses à l'égard de la droite AO, supposée positive, doit être considérée comme négative. Convenant donc de changer les signes des quantités qui

ne ſont pas poſitives *, l'expreſſion de la viteſſe angulaire, ou de l'angle de rotation produit dans l'inſtant dt deviendra $= \frac{dt\int dt\,(a\alpha+b\beta)}{A'^2A+B'^2B} = \frac{dt\int dt \,\mathit{ſin}\,\Sigma(A'\alpha+B'\beta)}{A'^2A+B'^2B}$.

SCOLIE.

(137.) Nous ſuppoſerons pour le préſent que les corps ſont infiniment petits, ou que leurs maſſes ſont réunies dans des points, c'eſt-à-dire, à leurs centres de maſſe.

COROLLAIRE II.

(138.) Puiſque l'angle de rotation eſt $= \frac{dt\int dt\,\mathit{ſin}\,\Sigma(A\alpha-B\beta)}{A'^2A+B'^2B} = \frac{dt\int dt\,(a\alpha-b\beta)}{A'^2A+B'^2B}$, ſi, dès le commencement de l'action, la ſomme des moments $A\alpha-B\beta$, ou $a\alpha-b\beta$ étoit égale à zéro, le ſyſtême ne tourneroit pas.

COROLLAIRE III.

(139.) Puiſqu'on ſuppoſe que les puiſſances agiſſent conſtamment ſur les deux corps A & B, ſuivant les directions AF, BG; il s'enſuit que la rotation ſe fera (61.) dans le plan qui coïncide avec ces directions, & avec la droite AB qui paſſe par le centre des maſſes.

DÉFINITION XXV.

(140.) Pour plus de clarté, nous appellerons déſormais ce plan, *Plan gyratoire*, ou *Plan de rotation.*

LEMME II.

(141.) *Si l'un des corps eſt ſuppoſé infini, ce corps reſtera ſans mouvement, & le centre des maſſes coïncidera avec lui; par conſéquent le centre des maſſes reſtera également fixe, ou ſans mouvement.*

Car B étant le corps qu'on ſuppoſe infini, l'équation $\frac{dt}{B}\int\beta dt = db$, fait voir que ſon mouvement eſt zéro : on voit de même par l'équation $B' = \frac{A'A}{B}$, que ſa diſtance B', au centre des maſſes eſt auſſi zéro. Donc ſi l'un des corps, &c.

---

* Les quantités qui ne ſont pas poſitives ſont b & B' : car on voit que la diſtance $BN = B'$ étant de l'autre côté du centre des maſſes à l'égard de la diſtance $AN = A'$, qu'on ſuppoſe poſitive, elle doit être de ſigne contraire. On voit également que ce changement de ſigne n'affecte point le dénominateur des expreſſions de l'angle de rotation, puiſque la quantité B' y eſt au quarré : ainſi, ce dénominateur eſt toujours eſſentiellement poſitif. Cette remarque s'applique à l'*Art.* 129.

COROLLAIRE I.

(142.) Dans ce cas, la quantité $B'dt\int\beta dt \sin\Sigma$, ainsi que la quantité B'^2B, qui se trouvent dans l'expression de l'angle de rotation, sont zéro. Ainsi, cette expression se réduit à $\frac{A'dt\int\alpha dt \sin\Sigma}{A'^2A} = \frac{dt\int\alpha dt \sin\Sigma}{A'A}$, ou $=\frac{dt\int\alpha dt}{A'^2A}$: d'où l'on voit que lorsqu'un seul corps A est obligé de tourner autour d'un point fixe dont il est éloigné de la quantité A', l'angle de rotation produit pendant l'instant dt est $=\frac{dt\int\alpha dt \sin\Sigma}{A'A} = \frac{dt\int\alpha dt}{A'^2A}$ *.

COROLLAIRE II.

(143.) S'il n'y a qu'une seule puissance à agir, & qu'il y ait toujours deux corps ; c'est-à-dire, si $\beta=0$, l'angle de rotation sera $=\frac{A'dt\int\alpha dt \sin\Sigma}{A'^2A+B'^2B} = \frac{dt\int\alpha dt}{A'^2A'+B'^2B}$.

COROLLAIRE III.

(144.) Cette expression peut se changer en celle-ci, $\frac{A'dt\int\alpha dt \sin\Sigma}{A'^2(A+\frac{B'^2}{A'^2}B)} = \frac{dt\int\alpha dt}{A'^2(A+\frac{B'^2}{A'^2}B)}$, laquelle est la même (142.) que celle qu'on trouveroit, en supposant qu'un seul corps $=A+\frac{B'^2}{A'^2}B$, tourne par l'action de la puissance α, autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A'. Donc la puissance α produit le même angle de rotation, lorsqu'elle fait tourner un seul corps $=A+\frac{B'^2}{A'^2}B$ autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A', que lorsqu'elle fait tourner les deux corps A & B, autour du même point fixe aux distances A' & B'.

COROLLAIRE IV.

(145.) Comme la quantité $B'\sin\Sigma$, ou la perpendiculaire b s'est évanouie de l'expression $\frac{dt\int\alpha dt}{A'^2A+B'^2B}$; il s'ensuit que, pour l'angle de rotation, le lieu du corps B est indifférent, pourvu qu'il soit toujours éloigné du point fixe de la quantité B'.

---

* Réciproquement, on peut regarder le point fixe sur lequel un corps est assujetti à tourner, comme le centre de gravité d'un systême de deux corps, dont l'un placé sur ce point, & par conséquent sans mouvement, est d'une masse infinie à l'égard de celle de l'autre qui est le corps qui se meut réellement. Le moment d'inertie du corps en mouvement est le seul qu'on doive considérer, puisque celui de l'autre est zéro ; & ce moment est le produit de la masse de ce corps, par le quarré de sa distance au point fixe.

COROLLAIRE V.

(146.) Il est évident, par ce qui a été dit à l'Art. 144, qu'au lieu de deux corps A & C qui seroient animés par la puissance α aux distances A' & C' du centre de gravité, nous pouvons supposer un seul corps $= A + \frac{C'^2}{A'^2} C$ soumis à l'action de la même puissance à la distance A' du même point. Substituant donc la quantité $A + \frac{C'^2}{A'^2} C$ en place de A seul, dans l'expression $\frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B}$, il en résultera l'angle de rotation produit dans le même instant dt, par l'action des deux puissances α & β, sur les trois corps A, B & C, situés dans le même plan de rotation; & la valeur de cet angle sera $= \frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 (A + \frac{C'^2}{A'^2} C) + B'^2 B} = \frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C}$.

COROLLAIRE VI.

(147.) Pareillement, l'angle de rotation, produit par la seule puissance α qui agit sur les trois corps A, C & D, sera $= \frac{dt \int \alpha a dt}{A'^2 A + C'^2 C + D'^2 D} = \frac{dt \int \alpha a dt}{A'^2 \left(A + \frac{C'^2}{A'^2} C + \frac{D'^2}{A'^2} D \right)}$. Mais cet angle est le même que celui que produiroit la même puissance, si elle agissoit sur un seul corps $= A + \frac{C'^2}{A'^2} C + \frac{D'^2}{A'^2} D$: substituant donc la valeur de ce corps en place de A dans l'expression $\frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B}$, on aura l'angle de rotation que produisent les deux puissances α & β agissant sur les quatre corps A, B, C & D, situés dans le même plan de rotation, & la valeur de cet angle sera $= \frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 \left(A + \frac{C'^2}{A'^2} C + \frac{D'^2}{A'^2} D \right) + B'^2 B} = \frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D}$.

COROLLAIRE VII.

(148.) On dira la même chose de cinq, six, ou d'un plus grand nombre de corps: de sorte que l'angle de rotation produit dans un instant dt par l'action de deux puissances α & β, sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan de rotation, est $= \frac{dt \int \alpha a dt + dt \int \beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE VIII.

(149.) S'il n'y avoit qu'un seul corps, & qu'il y eût toujours deux

puissances; c'est-à-dire, si l'on avoit $B=0$; dans ce cas, l'expression de l'angle de rotation se réduiroit à $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A} = \frac{dt\int a dt(\alpha+\frac{b}{a}\beta)}{A'^2 A}$.

COROLLAIRE IX.

(150.) On auroit la même expression, si la puissance $\alpha+\frac{b}{a}\beta$, agissoit seule sur le corps A à la distance perpendiculaire a de la direction qui passe par le centre des masses. Donc deux puissances α & β, dont les directions sont paralleles, & qui agissent à des distances perpendiculaires a & b de la direction qui passe par le centre des masses, produisent le même angle de rotation qu'une seule puissance $\alpha+\frac{b}{a}\beta$ qui agiroit à la distance a.

COROLLAIRE X.

(151.) Nous pouvons donc mettre dans l'expression $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$, au lieu de deux puissances α & γ, qui agiroient aux distances a & c, une seule puissance $\alpha+\frac{c}{a}\gamma$, qui agisse à la distance a; ce qui donnera l'angle de rotation produit par trois puissances qui agissent parallélement sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan que les directions des puissances $= \frac{dt(\int\alpha a dt + \int\gamma c dt) + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.} = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE XI.

(152.) Pareillement, si l'on substitue dans cette derniere expression la quantité $\int a dt(\alpha+\frac{d}{a}\delta)$, à la place de $\int\alpha a dt$ seul, on aura l'angle de rotation produit par l'action de quatre puissances qui agissent suivant des directions paralleles sur un nombre quelconque de corps situés dans le même plan de rotation $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE XII.

(153.) On dira la même chose d'un nombre quelconque de puissances qui agissent suivant des directions paralleles sur un nombre quelconque de corps situés dans un même plan de rotation. Donc en général, l'angle de rotation produit, pendant un temps infiniment petit dt, par un nombre quelconque de puissances qui agissent suivant des directions paralleles sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & situés dans le plan même

de la rotation, a pour expression $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt + \&c.}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.
Dans cette expression, on fera négatives les perpendiculaires a, b, c, d, &c. & les puissances α, β, γ, δ, &c. qui doivent l'être (136.)

COROLLAIRE XIII.

Vid. 52. 53 54
55. 56. 57. 58.

(154) Si l'on représente par p la distance perpendiculaire du centre des puissances à la direction qui passe par le centre des masses; & par π la somme des puissances, on aura (104.) $p\pi = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.$ somme des moments, & $dt\int p\pi dt = dt\int dt\,(\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.)$. Donc, en substituant, on aura, pour la valeur de l'angle de rotation produit dans l'instant dt par l'action d'un nombre quelconque de puissances qui agissent, suivant des directions paralleles, sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & qui sont dans le même plan de rotation, la quantité $\frac{dt\int p\pi dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE XIV.

(155.) L'expression $p\pi$ fait voir que l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, quelque situation qu'on donne aux puissances, dans le plan de rotation, soit qu'on les divise, soit qu'on les unisse comme on voudra, pourvu que la somme des puissances qu'on leur substitue, soit toujours égale à la même quantité π; & que la distance perpendiculaire de leur centre à la direction qui passe par le centre des masses soit toujours égale à la même quantité p.

COROLLAIRE XV.

(156.) L'expression du dénominateur $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ fait voir pareillement que la valeur de l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, de quelque maniere qu'on distribue les corps dans le plan de rotation, pourvu qu'on les conserve à la même distance du centre des masses; & si l'on fait varier ces distances en même temps que les corps, l'angle de rotation demeurera encore le même, si la somme $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ des moments d'inertie demeure toujours constante.

COROLLAIRE XVI.

(157.) Si nous supposons que la somme des moments d'inertie $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c. = S$, l'angle de rotation produit pendant l'instant dt, par un nombre quelconque de puissances qui

agissent

agissent parallélement sur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & situés dans le plan même de la rotation, sera $= \frac{dt\int p\pi dt}{S}$. PLANC. I.

COROLLAIRE XVII.

(158.) Pareillement, si l'on représente par P la distance du centre des masses à celui des puissances; & par Σ l'angle que forme la ligne qui joint ces deux centres avec les directions, on aura $1 : \sin\Sigma :: P : p = P \sin\Sigma$. Donc, en substituant, on pourra encore exprimer l'angle de rotation par $\frac{\int(dt\int\pi dt\, P \sin\Sigma)}{S}$, ou par $\frac{P\int(dt\int\pi dt \sin\Sigma)}{S}$, si P est constant. *

PROPOSITION XIX.

(159.) *Le mouvement de rotation sera le même, soit que le systéme soit libre, soit que son centre de masse soit fixe.*

Si l'on suppose qu'une nouvelle puissance, égale à la somme de toutes celles qui agissent sur le systême, agisse dans une direction contraire sur le centre des masses, il est clair que ce centre demeurera en repos (110.): mais cette nouvelle puissance étant appliquée au centre des masses, n'affectera point le numérateur de la formule de l'angle de rotation. Donc le mouvement de rotation du systême se fera de la même maniere, son centre de masse étant fixe, que s'il étoit libre.

PROPOSITION XX.

(160.) *Les formules que nous avons données pour la valeur de l'angle de rotation, ont encore lieu dans le cas où tous les corps, ainsi que toutes les puissances, ne sont pas dans le même plan de rotation.* FIG. 18

Supposons que le systême est composé de trois corps B, C, D, unis entre eux par des lignes inflexibles, & animés par les trois puissances β, γ, δ, dont les directions sont paralleles entre elles, & perpendiculaires à la droite DC qui joint les deux corps D & C. Soit de plus BA perpendiculaire à DC; A le centre des masses des corps C & D; & G celui des trois corps, ou celui des deux B & A, en supposant les deux corps C & D, réunis dans le point A, de maniere à ne faire qu'un seul corps $A = C + D$. Soit encore supposé que le centre des deux puissances γ & δ, se trouve de

* On remarquera que ces expressions sont celles de l'angle de rotation pendant un temps fini t, au lieu que les précédentes n'en expriment que la différencielle, c'est-à-dire qu'elles expriment l'angle de rotation produit pendant un temps infiniment petit dt.

de même en A, afin que le ſyſtême des deux corps C & D ne tourne point, & qu'en conſéquence la ligne CD ſe conſerve dans tout ſon mouvement perpendiculaire aux directions des puiſſances. Par le centre G des maſſes, menons la ligne IH parallele à DC, & enſuite des points D & C abaiſſons ſur IH les perpendiculaires DH & CI; de plus, repréſentons ces perpendiculaires par D' & C', & la ligne AG par A', ce qui donnera $A'=C'=D'$; & ſuppoſons enfin que $\gamma+\delta=\alpha$.

Subſtituant maintenant ces valeurs dans la formule trouvée pour l'angle de rotation produit dans le ſyſtême des deux corps B & A, qui eſt $\frac{dt\int dt \sin z\,(A'\alpha+B'\beta)}{A'^2A+B'^2B}$, cette formule deviendra $\frac{dt\int dt \sin z\,(C'\gamma+D'\delta+B'\beta)}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$, qui eſt l'expreſſion de l'angle de rotation produit dans le ſyſtême des trois corps B, C & D; angle qui eſt le même que celui qui auroit lieu, ſi les trois corps étoient dans le même plan de rotation AB, & placés à des diſtances B', C' & D' du point G : puiſque cette expreſſion de l'angle de rotation eſt identique avec celle qu'on a trouvée précédemment pour ce cas.

COROLLAIRE I.

(161.) On voit évidemment que le corps B peut pareillement ſe diviſer en deux autres corps ſitués aux extrémités d'une ligne parallele à DC, & les ſuppoſer animés par l'action de deux puiſſances, dont la ſomme eſt égale à β. Il en ſeroit de même d'un nombre quelconque de corps, dont ſe trouveroit compoſé un ſyſtême, & qui ſeroient ſitués dans le même plan de rotation AB.

COROLLAIRE II.

(162.) On vient de voir comment deux corps A & B placés dans le même plan de rotation AB, peuvent être diviſés, ou conçus diviſés en pluſieurs autres : par la même méthode, les corps diviſés peuvent auſſi être réunis, ou conſidérés comme réunis dans le même plan AB. Dans l'un & l'autre cas, le centre des puiſſances ſe trouve dans ce plan, & c'eſt ſur ce même plan qu'on exprime la meſure de l'angle gyratoire, ou de rotation.

COROLLAIRE III.

(164.) Le plan de rotation ſera donc, dans les deux cas, celui qui, paſſant par le centre des maſſes, paſſe auſſi par celui des puiſſances, & eſt parallele aux directions de ces dernieres.

COROLLAIRE IV.

(163.) Puiſque le mouvement de rotation du ſyſtême ſe fait de

la même maniere lorſque le ſyſtême eſt libre, que lorſque le centre *G* des maſſes eſt fixe, le ſyſtême tournera donc, dans le cas préſent, de la même maniere que ſi la ligne *HI* étoit fixe. Car, par la ſuppoſition, cette droite *HI* doit ſe maintenir conſtamment parallele à *DC*, & celle-ci doit toujours être perpendiculaire aux directions des puiſſances.

DÉFINITION XXVI.

(165.) La ligne *HI*, conſidérée comme fixe, ſur laquelle le ſyſtême fait ſa rotation, s'appelle *Axe de rotation.*

COROLLAIRE V.

(166.) Si, par l'axe de rotation *HI*, on fait paſſer un plan parallele aux directions des puiſſances; & ſi, des points *D*, *A* & *C*, on abaiſſe des perpendiculaires à ce plan, ces perpendiculaires que nous nommerons d, a & c, ſeront égales entre elles, & à D' *ſin* Σ, A' *ſin* Σ, & C' *ſin* Σ (135.). Subſtituant donc les lettres d, a & c dans la formule de l'angle de rotation, en place des quantités D' *ſin* Σ, A' *ſin* Σ, & C' *ſin* Σ, chacune pour celle qui lui correſpond, cette formule deviendra $\frac{dt\int dt\,(c\gamma+d\delta+b\beta)}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$; expreſſion qui, comme on le voit, eſt la même que celle qu'on a trouvée pour le cas où tous les corps du ſyſtême ſont dans le même plan de rotation *AB*.

DÉFINITION XXVII.

(167.) Nous appellerons *Plan directeur* ce plan qui, paſſant par l'axe de rotation, eſt parallele aux directions des puiſſances.

COROLLAIRE VI.

(168.) Puiſque d, c & b marquent les diſtances perpendiculaires des points *D*, *C* & *B* au plan directeur, ſi nous nommons p la diſtance perpendiculaire du centre de toutes les puiſſances au même plan; & ſi nous repréſentons par π la ſomme des mêmes puiſſances, on aura la ſomme des moments des puiſſances, c'eſt-à-dire, $\gamma c+d\delta+b\beta+\&c.=p\pi$ (104.), d'où l'on tire $\frac{dt\int p\pi dt}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$ pour l'expreſſion de l'angle de rotation, ou enfin en faiſant le dénominateur $C'^2C+D'^2D+B'^2B+\&c.=S$, cette expreſſion deviendra $\frac{dt\int p\pi dt}{S}$: S marquant ici la ſomme des moments d'inertie.*

---

* Il eſt néceſſaire de remarquer que depuis l'*Art.* 160, les moments d'inertie n'expriment

COROLLAIRE VII.

(169.) On verra aiſément, en examinant ces formules, qu'elles n'exigent point que les centres de maſſe des corps pris deux à deux, comme *D* & *C*, ſe trouvent précisément dans la droite *AB*, comme nous l'avons ſuppoſé dans *l'Art.* 160 ; on peut les ſuppoſer plus hauts, ou plus bas, dans la même ligne *CD* ; car cela n'affecte nullement les diſtances *DH*, *AG* & *CI*, & par conſéquent le dénominateur $C'^2C + D'^2D + B'^2B + \&c.$, ni l'angle de rotation n'éprouvent aucun changement. La ſeule choſe qui changera ſera le centre *G* des maſſes ; mais il ſe maintiendra toujours dans la droite, ou axe *HI*.

COROLLAIRE VIII.

(170.) Les mêmes formules n'exigent pas non plus que les centres des puiſſances qui agiſſent ſur les corps pris deux à deux, comme *D* & *C*, tombent préciſément dans la ligne *AB*, ni dans le centre de maſſe des mêmes corps, comme nous l'avons ſuppoſé dans *l'Art.* 160 : elles exigent ſeulement que la diſtance *p* du centre de toutes les puiſſances au plan directeur, reſte toujours la même ; que ce centre ſoit placé en *K*, ou en quelque autre point de la ligne *LKN* parallele à l'axe, il en réſultera toujours le même angle de rotation, puiſque la quantité *p* conſerve toujours la même valeur.

PROPOSITION XXI.

(171.) *Si l'on faiſoit varier le centre des puiſſances, de maniere qu'il ſortît de la ligne, ou plan* GA, *qui, paſſant par le centre des maſſes, eſt perpendiculaire au plan directeur* HI, *le ſyſtême ne tourneroit pas alors ſur l'axe fixe* HI, *mais ſur un autre axe qui, paſſant par le centre de gravité, ſeroit perpendiculaire à un plan parallele aux directions des puiſſances, & paſſant par le centre des maſſes & par celui des puiſſances.*

Suppoſons que les directions des puiſſances ſont perpendiculaires au plan du papier ſur lequel la figure eſt tracée, & que leur centre ſe trouve en *O*. Soit imaginé le plan *GO*, parallele aux directions ; & par le centre *G* ſoit élevé la perpendiculaire *GQ* ſur ce plan, cette perpendiculaire ſera l'axe fixe ſur lequel le ſyſtême fera ſa rotation. Car ſuppoſons que le ſyſtême puiſſe auſſi tourner ſur la

---

plus le produit de chaque corps par le quarré de ſa diſtance au centre des maſſes qui compoſent le ſyſtême, comme notre Auteur les a définis d'après *Léonard Euler*, & comme il les avoit employés avant cet article ; mais ces moments expriment le produit de chaque corps par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation. Cette derniere définition revient à la premiere, lorſque les corps ſont dans un même plan.

ligne *GO* ; dans ce cas, les produits des puiſſances ſituées de part & d'autre du plan *GO*, par leurs diſtances perpendiculaires au même plan, doivent former le numérateur de l'expreſſion de l'angle de rotation ; mais la ſomme de ces produits eſt égale à zéro : donc le ſyſtême ne peut tourner ſur la ligne *GO*, & par conſéquent la ligne *QT* ne peut non plus tourner ſur *GO*. Donc *QT* ſera l'axe fixe ſur lequel le ſyſtême doit tourner. *

COROLLAIRE I.

(172.) Si l'on fait paſſer par *QGT* un plan parallele aux directions des puiſſances, ce plan ſera le plan directeur (167.) ; *p* exprimera la perpendiculaire abaiſſée du centre *O* des puiſſances ſur le plan directeur *QGT* (168.) ; & *GO* ſera le plan de rotation qui, paſſant par le centre *G* des maſſes, & par celui *O* des puiſſances, eſt parallele aux directions de celles-ci (163.).

COROLLAIRE II.

(173.) Comme un corps fini quelconque peut être conçu diviſé en une infinité d'autres corps infiniment petits, & unis entre eux par la nature, il s'enſuit que l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps *dt*, autour d'un axe, par un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent ſur un corps dans des directions paralleles, ſera $=\frac{dt\int p\pi dt}{S}=\frac{P\,dt\int\pi dt\,\sin\Sigma}{S}$: en marquant par *P* la diſtance du centre des puiſſances à l'axe de rotation ; & par Σ l'angle que forme la ligne qui meſure cette diſtance, avec le plan directeur.

COROLLAIRE III.

(174.) Si l'un des corps eſt infini, ce corps reſtera fixe (141.), & ſon centre de gravité concourra avec le centre de gravité du ſyſtême. Le ſyſtême tournera alors autour de ce corps, ou ſur un axe fixe qui, paſſant par ſon centre de gravité, ſera perpendiculaire à un plan parallele aux directions, & qui paſſe par ce point fixe, & par le centre des puiſſances.

COROLLAIRE IV.

(175.) L'expreſſion de l'angle de rotation ſera dans ce cas, comme

---

* Ceci paroîtra d'ailleurs évident, ſi l'on conſidere que le point *O* étant, par l'hypotheſe, le centre des puiſſances, & que le ſyſtême devant tourner ſur ſon centre de gravité *G*, (Voyez les *Articles* 121 & ſuiv. & particuliérement la troiſieme note de l'Article 129) le plan *GO* parallele aux directions des puiſſances, & dans lequel ſe trouve leur réſultante, ſera néceſſairement le plan de rotation. Par conſéquent toutes les parties du ſyſtême décriront des arcs paralleles à ce plan *GO*. Donc le ſyſtême tournera ſur un axe perpendiculaire à ce plan, c'eſt-à-dire, ſur la ligne *QT*.

PLANC. I. ci-dessus, $= \frac{dt\int a\pi dt + dt\int b\pi dt + \&c.... + dt\int e\pi dt}{A'^2 A + B'^2 B + \&c.... + E'^2 E}$; expression qui se réduit, le corps E étant infini, à $\frac{dt\int a\pi dt + dt\int b\pi dt + \&c.}{A'^2 A + B'^2 B + \&c.}$ * $= \frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{P dt\int \pi dt \sin \Sigma}{S}$.

SCOLIE.

(176.) Dans ce cas, le centre de gravité du système est dans l'axe fixe : les distances A', B', C', &c. sont celles des corps au même axe fixe ; a, b, c, &c. & p sont les perpendiculaires abaissées des puissances & de leur centre sur le plan directeur, lequel coïncide avec le même axe fixe ; P est la distance perpendiculaire du centre des puissances à l'axe ; π la somme de toutes les puissances ; & S la somme des produits des corps, ou masses, par le quarré de leurs distances perpendiculaires au même axe fixe.

LEMME III.

(177.) *Si l'on appelle Z la somme des produits des corps, ou masses, par le quarré de leurs distances respectives à un axe qui passe par leur centre de masse, & qui soit en même temps parallele à celui qui passe par le point fixe ; & si de plus on appelle G la distance du même centre des masses à l'axe fixe, on aura* $S = G^2 M + Z$.

FIG. 13. Car soit $IKLN$ un corps qu'on peut regarder comme un système de corps liés entre eux ; H son centre de gravité ; O l'axe fixe perpendiculaire au plan de rotation, que nous supposerons être le même que celui de la figure ; & Q un petit poids, un corpuscule, ou une petite ligne perpendiculaire au plan de rotation, ou parallele aux axes. Cela posé, le quarré de OQ, distance perpendiculaire du corpuscule Q à l'axe fixe O est égal à la somme des quarrés de $OH = G$, & de HQ ; plus à deux rectangles de OH par HT. La même chose aura lieu pour chacun des corpuscules dont le corps est composé. Donc la somme des produits de chaque corpuscule, ou masse élémentaire, par le quarré de sa distance perpendiculaire à l'axe fixe O, sera $= G^2 M + \int HQ^2 . Q + 2G\int HT . Q$; c'est-à-dire que $S = G^2 M + Z + 2G\int HT . Q$. Mais $\int HT . Q$ est la somme des pro-

* Cela est évident ; car, par le Corollaire précédent, la distance E', ainsi que la perpendiculaire e sont chacune égales à zéro.

On voit encore, par ces deux Corollaires, qu'on peut regarder le point fixe sur lequel un système de corps est assujetti à tourner, comme le centre de gravité d'un autre systeme qui auroit un corps de plus ; ce corps additionnel étant supposé infini à l'égard de la somme des autres, & placé sur le point fixe. On voit, par ces formules, que la considération de ce corps infini est inutile relativement à l'angle de rotation, qui par conséquent sera le même dans les deux systêmes. Dans ce cas, comme dans tous les autres, les moments d'inertie sont le produit de chaque corps par le quarré de sa distance à l'axe fixe. Cette note est analogue à celle de l'*Article* 142.

duits des corpuscules, ou masses, par leurs distances au plan directeur YX, & cette somme est égale (120.) au produit de la masse totale M, par la distance du centre des masses H au plan YX, laquelle distance est zéro : donc $\int HT.Q=0$, & par conséquent $G^2M+Z=S$. PLANC. I.

C O R O L L A I R E I.

(178.) En substituant cette valeur de S, dans les expressions de l'angle de rotation, elles deviendront dans le cas d'un axe fixe $=\frac{\int(dt\int p\pi dt)}{G^2M+Z}=\frac{P\int(dt\int\pi dt\sin\Sigma)}{G^2M+Z}$.

C O R O L L A I R E II.

(179.) Lorsque $G=0$; c'est-à-dire, lorsque l'axe fixe passe par le centre des masses, ou que le systême tourne sur son centre de masse, on a $S=Z$; dans ce cas, les expressions ci-dessus se réduisent à celles qu'on a données dans les *Art.* 157 & 158. Donc le systême, ou le corps, étant libre, sa rotation se fait de la même maniere que s'il tournoit sur son centre de masse supposé fixe; c'est ce qui a déjà été démontré, *Art.* 159.

C O R O L L A I R E III.

(180.) Quand le centre des puissances coïncide avec celui des masses, comme il arrive dans les corps pesants, lorsqu'ils descendent par la seule action de la gravité, on a $G=P$. Donc, dans ce cas, l'angle de rotation sur un axe fixe sera $=\frac{\int(dt\int p\pi dt)}{P^2M+Z}=\frac{P\int(dt\int\pi dt\sin\Sigma)}{P^2M+Z}$.

P R O P O S I T I O N XXII.

(181.) *Le centre de gravité dans les corps pesants qui descendent par la seule action de la gravité, en tournant autour d'un point, ou axe fixe, ne peut parvenir au repos qu'en descendant le plus bas qu'il est possible.*

Soit $ABCD$ un corps pesant, qui doit tourner librement autour de l'axe E, par la seule action de la gravité. Soit G le centre de gravité du corps, HO un plan horisontal, & FI un plan vertical, qui passent par l'axe fixe E. Ayant tiré la ligne EG perpendiculaire à l'axe, elle sera $=P$, & l'angle $GEI=\Sigma$. Le seul cas où le corps peut rester sans mouvement, est sans contredit celui dans lequel, au commencement de l'action, la différencielle $\frac{Pdt\int\pi dt\sin\Sigma}{P^2M+Z}$ de l'angle de rotation est égale à zéro. Mais quelle que soit la situation du corps, cette quantité ne peut être zéro que lorsque $P\sin\Sigma=GK=0$, ou lorsque $\Sigma=0$. Donc il faut que le corps parvienne à cette si- FIG. 14.

PLANC. I. tuation pour pouvoir s'arrêter, ou rester en repos. Or cette situation ne peut avoir lieu que lorsque le corps parvient au point où la perpendiculaire $GN = P \cos \Sigma$ a la plus grande valeur, ou est un *maximum*; car, en différenciant, on a pour ce cas $Pd\Sigma \sin \Sigma = 0$, qui donne $P \sin \Sigma = 0$. Donc un corps ne peut rester en repos que lorsque son centre de gravité G est parvenu à sa plus grande distance du plan horisontal HO, ou, ce qui revient au même, que lorsqu'il est descendu le plus bas qu'il est possible.

DES PENDULES.

DÉFINITION XXVIII.

(182.) On appelle *Pendule simple* un corps infiniment petit, ou entiérement réuni dans un point A suspendu à un fil infiniment mince, FIG. 15. ou à une ligne inflexible AC.

DÉFINITION XXIX.

(183.) Le point C étant fixe, si l'on éloigne le corps A de la verticale CB, comme en CA, & qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, le pendule se meut en vertu de la gravité qui est la puissance qui l'anime, & va jusqu'en Ca; ensuite il revient de nouveau en CA, & ainsi continuellement. Chacune de ces allées & venues s'appelle une *Oscillation*.

COROLLAIRE I.

(184.) Comme il n'y a qu'un seul corps dans ce systême, ou pendule simple, & qu'une seule puissance qui l'anime, toutes les quantités qui entrent dans l'expression de l'angle de rotation doivent, dans ce cas, être égales à zéro, excepté une : par conséquent l'angle de rotation du pendule simple $= \frac{d'\int \alpha dt}{A' \cdot A} = \frac{P dt \int \alpha dt \sin \Sigma}{A' \cdot A}$ (ou à cause que $P = A' = CA$) $= \frac{dt \int \alpha dt \sin \Sigma}{CA . A}$.

COROLLAIRE II.

(185.) Comme la puissance α est constante dans les corps qui tombent par l'action de la gravité; & qu'on a (50.) $\frac{\alpha}{A} = \xi$, il s'ensuit que l'angle de rotation du pendule simple sera $= \frac{\xi dt \int dt \sin \Sigma}{CA}$; Σ marquant l'angle BCA que forme le pendule simple avec la verticale CB, à quelque instant que ce soit de son oscillation; de sorte que l'angle total, ou l'oscillation entiere sera $= 2\Sigma = \frac{\xi}{CA} \int (dt \int dt \sin \Sigma)$.

DÉFINITION

PLANC. I.

DÉFINITION XXX.

(186.) On appelle *Pendule composé* tout autre pendule dans lequel le corps, ou le fil, a quelque volume, ou qui est composé de plusieurs corps unis entre eux, comme *A* & *B*. FIG. 16 & 17.

COROLLAIRE I.

(187.) L'angle de rotation du pendule composé est (180.) $= \frac{P\int(dt\int dt \sin\Sigma)}{P^2M+Z}$: ou, à cause que π est constant, & que $\frac{\pi}{M}=\xi$ (50.), $= \frac{P\xi M\int(dt\int dt \sin\Sigma)}{P^2M+Z}$.

COROLLAIRE II.

(188.) Si un pendule simple & un pendule composé font leurs oscillations dans le même temps, & si ces oscillations sont d'ailleurs égales; c'est-à-dire, si l'angle Σ de l'une est toujours égal à l'angle Σ de l'autre, on aura $\frac{\xi\int(dt\int dt \sin\Sigma)}{CA} = \frac{P\xi M\int(dt\int dt \sin\Sigma)}{P^2M+Z}$, ou à cause que la quantité $\xi\int(dt\int dt \sin\Sigma)$, qui se trouve dans l'un & dans l'autre membre de l'équation, est la même de part & d'autre, par les conditions du problême, on aura, en réduisant, $\frac{1}{CA} = \frac{PM}{P^2M+Z}$; expression qui donne la longueur du pendule simple isochrone au pendule composé ; c'est-à-dire, $CA = \frac{P^2M+Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM}$.

COROLLAIRE III.

(189.) Substituant en place de P^2M+Z son égale S, la longueur CA du pendule simple isochrone au pendule composé sera $= \frac{S}{PM}$.

DÉFINITION XXXI.

(190.) Si, dans un pendule composé, on prend, dans la ligne qui joint le centre de gravité & l'axe fixe, un point qui soit éloigné de l'axe fixe de toute la longueur du pendule simple, dont les oscillations sont de la même grandeur & de la même durée que celles du pendule composé, ce point est ce qu'on appelle *Centre d'oscillation*.

COROLLAIRE I.

(191.) Le centre d'oscillation sera donc éloigné du centre de gravité, de la quantité $\frac{Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM} - P$, qui est la différence entre les distances du centre d'oscillation & du centre de gravité à l'axe, ou au point fixe, &c.

PLANC. I

COROLLAIRE II.

(192.) Le centre d'oscillation est donc toujours plus éloigné de l'axe fixe, que le centre de gravité, puisqu'on a $P+\frac{Z}{PM}>P$.

PROPOSITION XXIII.

(193.) *La longueur du pendule simple isochrone est aussi* $=\frac{(A'A^2+B'^2B+C'^2C+\&c.)\sin\Sigma}{A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.}$; Σ *marquant l'angle* DCG *que forme*

FIG. 16. *la verticale* CD, *ou le plan vertical perpendiculaire aux directions, avec la ligne* CG, *qui passe par le centre de gravité* G; & α, β, γ, &c., *les angles* DCA, DCB, &c. *que forme la même verticale, ou le même plan, avec les lignes tirées du point fixe* C *à chacun des corps dont est composé le pendule.*

Car $P\sin\Sigma=p$ (158.), ou $P=\frac{p}{\sin\Sigma}$, en substituant cette valeur dans la formule de l'*Art.* 189, on aura la longueur du pendule simple isochrone $=\frac{S\sin\Sigma}{pM}$. Mettant dans cette expression, pour S, sa valeur $A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.$, & pour pM sa valeur $aA+bB+cC+\&c=A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.$, la longueur du pendule simple isochrone sera $=\frac{(A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.)\sin\Sigma}{A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.}$.

COROLLAIRE.

(194.) Si tous les angles α, β, γ, &c. sont égaux; c'est-à-dire, si tous les corps A, B, &c. sont dans une même ligne, ou plan BAC, qui passe par le point, ou axe fixe, C; & si chacun de ces corps en particulier peut être regardé comme réuni en un seul point de la même ligne, ou du plan, le numérateur & le dénominateur de l'expression pourront alors se diviser par le même sinus, & la longueur du pendule simple deviendra, pour ce cas, $=\frac{A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.}{A'A+B'B+C'C+\&c.}$.

SCOLIE.

(195.) Cette formule que beaucoup d'Auteurs ont donnée comme générale, n'est certaine que dans le cas ci-dessus: dans tous les autres, où les corps qui composent le pendule ne seroient pas réunis dans une ligne qui passât par le point fixe, elle est tout-à-fait sans fondement.

DES LEVIERS.

DÉFINITION XXXII.

(196.) Lorsque deux puissances α & β agissent dans les directions

AD, *BE*, fur un corps inflexible *AB*, appuyé, ou fixé en *C*, cette efpece d'inftrument, ou corps inflexible s'appelle un *Levier*; & le point *C* fur lequel il eft fixé, s'appelle *Point d'appui*, ou *Hypomochlion*. PLANC. I. FIG. 18, 19 & 20.

DÉFINITION XXXIII.

(197.) Lorfque l'hypomochlion eft entre les deux puiffances appliquées en *A* & *B*, on l'appelle *Levier de la premiere efpece*. Si l'hypomochlion eft à l'une des extrémités, la puiffance β étant appliquée en *B*, c'eft-à-dire, la plus éloignée de l'hypomochlion, tandis que l'autre puiffance α, qu'elle eft deftinée à vaincre, eft appliquée en *A*, c'eft-à-dire, plus proche du point d'appui, ce levier s'appelle *Levier de la feconde efpece*. Enfin fi l'hypomochlion étant toujours à l'une des extrêmités, la puiffance β en eft plus proche que la puiffance α qu'elle eft deftinée à vaincre, on l'appelle *Levier de la troifieme efpece*. FIG. 18. FIG. 19. FIG. 20.

COROLLAIRE I.

(198.) L'angle *CAD* étant fuppofé $= \Sigma$, & l'angle $CBE = \sigma$, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt, fera généralement dans les leviers $= \frac{dtfdt(CB.\beta \sin\sigma - CA.\alpha \sin\Sigma)}{S}$ (129); S marquant la fomme de tous les moments d'inertie, ou de tous les produits de chaque particule des maffes mifes en mouvement par le quarré de la diftance au point fixe *C*.

COROLLAIRE II.

(199.) Puifque $CB.\sin\sigma =$ la perpendiculaire *CF*; & que $CA.\sin\Sigma$ = la perpendiculaire *CG*, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt fera auffi $= \frac{dtfdt(CF.\beta - CG.\alpha)}{S}$.

COROLLAIRE III.

(200.) Il fuit de là que plus la perpendiculaire *CF* fera grande à l'égard de la perpendiculaire *CG*, moins il faudra que la puiffance β deftinée à vaincre la puiffance α, foit confidérable. Ce fera la même chofe, plus la perpendiculaire *CG* fera petite à l'égard de la perpendiculaire *CF*.

COROLLAIRE IV.

(201.) Il convient donc que la direction *BE* foit perpendiculaire à la longueur du levier, afin que *CF* parvienne à la plus grande valeur qu'elle puiffe avoir.

COROLLAIRE V.

(202.) Il convient encore que la matiere dont le levier est composé ait le moins de densité qu'il est possible, ou que les efforts qu'il doit soutenir peuvent le permettre; parce qu'alors la masse étant la moindre qu'il est possible, les quantités qui forment le dénominateur, se trouvent diminuées le plus qu'il est possible; ce qui augmente la valeur de l'angle de rotation.

COROLLAIRE VI.

(203.) Si, dès le commencement de l'action des puissances, on avoit $CB.\beta \sin\sigma = CA.\alpha \sin\Sigma$, ou $CF.\beta = CG.\alpha$, l'angle de rotation feroit égal à zéro, & le levier resteroit sans mouvement, c'est-à-dire, en équilibre.

COROLLAIRE VII.

(204.) Ce qu'on vient de dire de deux puissances, doit s'entendre d'un nombre quelconque de puissances qu'on appliqueroit au levier; car on a vu dans *l'Art.* 104, que $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta +$ &c. & par conséquent la somme des moments de toutes ces puissances produit le même effet qu'une seule puissance π placée à la distance p de l'hypomochlion.

COROLLAIRE VIII.

(205.) L'angle de rotation dans le levier pouvant s'exprimer généralement par $\frac{dtf\cdot\pi dt}{S}$, π exprimant une puissance quelconque qui agit à la distance p de l'hypomochlion; & de même par $\frac{udt}{p}$ (131.), en supposant que u représente la vitesse du point auquel la puissance est appliquée : on aura par conséquent $\frac{dtfp\pi dt}{S} = \frac{udt}{p}$; d'où l'on tire, en divisant par dt, & en différenciant, $p^2\pi dt = Sdu$; ce qui donne la puissance $\pi = \frac{Sdu}{p^2 dt}$.

COROLLAIRE IX.

(206.) Lorsqu'un levier tourne sur un point quelconque, l'action qu'il éprouve est proportionnelle à Sdu; c'est-à-dire que cette action est en raison composée de la somme S des moments d'inertie, & de la différencielle du.

COROLLAIRE X.

(207.) Puisque l'angle de rotation, ou la vitesse angulaire est $= \frac{udt}{p}$, la différencielle du sera proportionnelle à la différencielle

de la vîtesse angulaire ; par conséquent l'action que souffre le levier sera en raison composée de la somme S des moments d'inertie, & de la différencielle de la vîtesse angulaire. PLANC. I.

SCOLIE I.

(208.) Lorsqu'un levier est fixé par un quelconque de ses points, sans avoir la liberté de tourner sur ce point, on doit considérer ce point comme *l'hypomochlion*, ou *l'appui* sur lequel le levier tend à tourner ; mais comme, par l'hypothese, il ne tourne pas, il faut qu'il y ait équilibre entre les moments (138.) : d'où l'on voit, que si tous les moments des forces qu'on a employées sont positifs, il faut nécessairement qu'il y en ait d'autres qui soient négatifs. Ces moments négatifs trouvent leur existence dans la masse même du levier, dans ses fibres qui agissent dans une direction contraire, en vertu de leurs forces d'attraction, de cohésion, ou d'une nature quelconque, comme l'expérience le fait voir. Ainsi, si des puissances quelconques agissoient sur le levier CA fixe sur sa base $KEDG$, FIG. 21.
de maniere que leurs efforts réunis tendissent à le faire tourner sur l'axe GE, toutes les fibres, ou tous les points de la même base résisteroient, & le moment de chacune de ces fibres seroit la force effective qu'elle exerce, multipliée par sa distance perpendiculaire à l'axe EG. Si nous appellons donc f cette force effective de chaque fibre, & a, b, c, d, &c. les différentes distances perpendiculaires respectives des fibres à l'axe EG, on aura le moment de la résistance des fibres $=f(a+b+c+d+\&c.)$: donc, par la supposition que le levier ne peut pas tourner, on aura $p\pi=f(a+b+c+d+\&c.)$, ou $f=\frac{p\pi}{a+b+c+d+\&c.}$; π désignant la puissance qui agit sur le levier, & p la distance perpendiculaire de l'axe EG à la direction de cette même puissance.

On observera que, dans ce cas, la lettre f ne désigne pas seulement l'intensité de la force absolue de chaque fibre, mais le produit de cette force, par l'amplitude, ou l'aire de la fibre. Supposant donc $CB=x$, & FH parallele à l'axe $=y$, l'aire de la fibre sera $=dydx$; & si nous représentons par f l'intensité qui en résulte, la force de chaque fibre sera $=fdydx$: par conséquent toute la force de la différencielle HI sera $=fydx$, & son moment $=fyxdx$. Donc, dans le cas où le levier ne tourne pas, on aura $f\int yxdx=p\pi$, ou $f=\frac{p\pi}{\int yxdx}$; bien entendu que dans l'expression $\int yxdx$ on renferme non seulement les moments positifs des fibres du segment

GDE, mais auſſi les moments du ſegment GKE qui agiſſent auſſi poſitivement, & réſiſtent également à la rotation, quoique dans celui-ci les x ſoient négatives; parce que les forces $fydx$ des fibres ſont en même temps négatives : car il eſt facile de voir que dans ce ſegment, les fibres ſe compriment, au lieu qu'elles ſe dilatent, ou tendent à ſe dilater dans l'autre ſegment. Les moments de chacun de ces ſegments ſont égaux (103.) au produit de leur ſurface, par l'intenſité f de la force des fibres, & par la diſtance de leur centre de gravité à l'axe GE. Donc ſi nous ſuppoſons la ſurface $GDE = A^2$, la ſurface $GKE = a^2$, la diſtance du centre de gravité de la premiere à l'axe $= K$, & celle de la ſeconde au même axe $= k$, on aura $\int xydx = KA^2 + ka^2$, & par conſéquent $f = \frac{p\pi}{KA^2+ka^2}$.

COROLLAIRE XI.

(209.) On doit entendre la même choſe, quoique le levier tourne ſur un point quelconque; car quelle que ſoit l'action à laquelle il eſt ſoumis, l'effet de cette action doit néceſſairement ſe manifeſter en quelque ſection comme KD.

COROLLAIRE XII.

(210.) On a vu (205.) que, dans la rotation du levier, on a $\pi = \frac{Sdu}{p^2 dt}$; on aura donc auſſi, dans ce cas, $f = \frac{Sdu}{pdt(KA^2+ka^2)}$; c'eſt-à-dire que l'action qui réſulte ſur les fibres, eſt comme Sdu, ou comme le produit de la ſomme S des moments d'inertie, par la différencielle de la vîteſſe angulaire.

COROLLAIRE XIII.

(211.) Si l'intenſité totale, ou la force effective des fibres qui compoſent le levier, eſt plus grande que $\frac{p\pi}{KA^2+ka^2}$, ou que $\frac{Sdu}{pdt(KA^2+ka^2)}$, le levier réſiſtera; mais il ſe rompra, ſi cette force eſt plus petite.

COROLLAIRE XIV.

(212.) Si l'on ſuppoſe que la baſe $KGDEK$ augmente proportionnellement dans toutes ſes dimenſions linéaires, la quantité KA^2+ka^2 ſera comme $L^2 l$ *, L exprimant le diametre KD, & l celui qui

* On peut aiſément ſe rendre raiſon de ceci. Si l'on repréſente par L' & l' les dimenſions linéaires homologues dans une autre baſe ſemblable à $KGDEK$, il eſt évident que les produits, ou moments correſpondants KA^2, $K'A'^2$, donneront cette proportion $KA^2 : K'A'^2 :: K^3 : K'^3$ (repréſentant les parties homologues des deux baſes, par les mêmes lettres accentuées), ou

lui eſt perpendiculaire. Nous pourrons donc faire $KA^2 + ka^2 = nL^2 l$, n déſignant un nombre quelconque ; ce qui donnera $f = \frac{p\pi}{nL^2 l}$, ou $f = \frac{Sdu}{pdt(nL^2 l)}$.

COROLLAIRE XV.

(213.) Si l'on ſuppoſe dans un levier $f = \frac{p\pi}{nL^2 l}$, & dans un autre $F = \frac{P\varphi}{nL'^2 l'}$, on aura $f : F :: \frac{p\pi}{L^2 l} : \frac{P\varphi}{L'^2 l'}$.

COROLLAIRE XVI.

(214.) Si les leviers ſont d'une même matiere, on aura $f = F$, & $\frac{p\pi}{L^2 l} = \frac{P\varphi}{L'^2 l'}$: d'où il ſuit que les forces π & φ que ces leviers pourront ſupporter, ſeront entre elles comme $\frac{P}{L'^2 l'}$ eſt à $\frac{p}{L^2 l}$, ou comme $\frac{L'^2 l}{p}$ eſt à $\frac{L'^2 l'}{P}$; c'eſt-à-dire, en raiſon directe de $L'^2 l'$, & en raiſon inverſe de P ; ou en raiſon directe de $KA^2 + ka^2$, & en raiſon inverſe de p.

COROLLAIRE XVII.

(215.) Ce qu'on vient de dire de la ſection KD, doit s'entendre d'une autre ſection quelconque, comme LM. L'intenſité de la force des fibres, dans cette derniere ſection, ſera pareillement $F = \frac{P\varphi}{K'A'^2 + k'a'^2} = \frac{P\varphi}{nL'^2 l'}$, avec la ſeule différence que, dans ce cas, P marque la diſtance de l'axe ſitué dans la ſection LM, à la direction de la puiſſance. Donc ſi nous ſuppoſons l'intenſité de la force des fibres en $KD = f = \frac{p\pi}{nL^2 l}$, & l'intenſité en $LM = F = \frac{P\varphi}{nL'^2 l'}$, comme ces deux intenſités F & f ſont égales lorſqu'il s'agit d'un levier homogène, nous aurons $\frac{p\pi}{L^2 l} = \frac{P\varphi}{L'^2 l'}$, ou $\pi : \varphi :: PL^2 l : pL'^2 l'$: ainſi, pour qu'un levier ſoit capable d'une même réſiſtance dans tous ſes points, ou dans toutes ſes diſtances de la baſe, ou pour qu'il puiſſe ſupporter avec une égale force l'action de la même puiſſance $\varphi = \pi$, on doit avoir $PL^2 l = pL'^2 l'$, ou $L^2 l : L'^2 l' :: p : P$; c'eſt-à-dire que les dimenſions linéaires du levier, dans ſes différents points, ou dans ſes différentes ſections, telles que KD, LM, doivent être comme

---

$:: L^3 : L'^3$. Il en ſera de même des produits, ou moments ka^2, $k'a'^2$; donc $KA^2 : K'A'^2 :: ka^2 : k'a'^2$, & par conſéquent $KA^2 + ka^2 : K'A'^2 + k'a'^2 :: KA^2 : K'A'^2$, ou $:: L^3 : L'^3$, ou enfin $:: L^2 L \cdot L'^2 L'$. Mais à cauſe de la ſimilitude des baſes, on a $L : L' :: l : l'$; donc $L^2 L : L'^2 L' :: L^2 l : L'^2 l'$: par conſéquent $KA^2 + ka^2 : K'A'^2 + k'a'^2 :: L^2 l : L'^2 l'$. Donc, &c.

les racines cubiques de leurs distances à la direction de la puissance. *

COROLLAIRE XVIII.

(216.) Il suit de là que, pour que le levier soit également fort dans tous ses points, il doit avoir la forme d'un conoïde, dont les côtés *KL* & *DM*, soient des paraboles du second genre. Car, en supposant que y soit une des dimensions linéaires des sections *KD*, *LM*, x la distance de ces sections à la direction de la puissance, & que Q représente le parametre de la parabole, on doit avoir constamment $y^3 = Q^2 x$, pour que le levier soit capable de la même résistance dans tous ses points. **

COROLLAIRE XIX.

(217.) Si, au lieu d'une seule puissance π agissante sur le levier, il y en avoit plusieurs qui fussent égales entre elles, & également distribuées sur sa longueur, il est évident que la somme des moments qu'elles exerceront à l'égard d'une section quelconque, comme les sections *KD*, *LM*, sera $= \frac{1}{2} x^2 \alpha$; α exprimant une quelconque de ces puissances égales. Donc, pour que des leviers homogènes soient, dans la supposition actuelle, d'une égale force dans tous leurs points, il faut que la quantité $\frac{x^2 \alpha}{y^3}$ soit constante; c'est-à-dire qu'on doit avoir $y^3 = Q x^2$; équation à une parabole du second genre, mais d'une espece différente de celle du Corollaire précédent. ***

---

* Cette conséquence est évidente, d'après tout ce qu'on vient de dire, & particuliérement d'après la note de *l'Art.* 212 : car on a vu que $L^2 l : L'^2 l' :: L^3 : L'^3 :: l^3 : l'^3$: donc, en substituant, $L^3 : L'^3$, ou $l^3 : l'^3 :: p : P$, d'où l'on tire $L : L'$, ou $l : l' :: \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$.

** Pour rendre cette vérité plus sensible, supposons que y représentant une des dimensions linéaires de la section *KD*, y' représente une dimension homologue de la section *LM*; & que x marquant la distance de la premiere section à la direction de la puissance, x' marque la distance de la seconde à la même direction : on aura, par le Corollaire précédent, $y^3 : y'^3 :: x : x'$. Donc si Q^2 est tel qu'en multipliant x, on ait $y^3 = Q^2 x$, on aura aussi $y'^3 = Q^2 x'$. Donc en général $y^3 = Q^2 x$, équation à la parabole du second genre; dont Q est le parametre.

*** Quoique ce Corollaire soit une suite nécessaire de ce qui a été dit dans les deux précédents & dans leurs notes, nous allons cependant le développer davantage en faveur des commençants. Soit x la distance de la section *KD* à l'extrémité du levier; puisqu'on suppose sur tous les points du levier des puissances égales α, qui agissent dans des directions paralleles pour en opérer la rupture, il est évident que la somme des moments de ces puissances à l'égard de la section *KD*; sera égale au moment de leur résultante. Mais cette résultante est égale à la somme $x\alpha$ de toutes les puissances; & sa distance à la section $KD = \frac{1}{2} x$, donc son moment $= \frac{1}{2} x^2 \alpha$. Marquant également par x' la distance de la section *LM* à l'extrémité du levier, on aura $\frac{1}{2} x'^2 \alpha$ pour la somme des moments de puissances à l'égard de cette section.

Ceci posé, si l'on met ces moments à la place de $p\pi$ & de $P\varphi$ (215.), on aura $\frac{\frac{1}{2} x^2 \alpha}{L^2 l} = \frac{\frac{1}{2} x'^2 \alpha}{L'^2 l'}$,

SCOLIE

SCOLIE II.

(218.) La ſituation de l'axe GE peut varier, c'eſt-à-dire que cet axe peut être plus ou moins éloigné du centre de la baſe $KGDEK$. Cela dépend de la figure de cette baſe, de la qualité de la matiere dont le levier eſt composé, de la diſpoſition dans laquelle il eſt aſſujetti, & enfin de la direction de la puiſſance qui agit ſur lui. Cette ſituation de l'axe peut être plus ou moins avantageuſe, ou donner au levier plus ou moins d'avantage pour réſiſter. Suppoſons que l'axe GE puiſſe ſe placer plus voiſin de l'extrémité K de la quantité z : dans ce cas, les moments du ſegment GDE ſeront $= f\int ydx\,(x+z)$; & ceux du ſegment $GKE = f\int ydx\,(x-z)$; c'eſt-à-dire que les premiers ſeront $= f\int yxdx + f\int yzdx$, & les ſeconds $= f\int yxdx - f\int yzdx$. Or, la ſomme de ces moments eſt plus grande que celle que nous avons eue pour le premier cas, dans lequel $z = 0$, de la quantité $fz\int ydx - fz\int ydx$: c'eſt-à-dire, de $fz.\,aire\ GDE - fz.\,aire\ GKE$; & cette quantité ſera plus ou moins grande, ſelon la valeur de z. Donc plus z ſera grand, plus $KA^2 + ka^2$, ou ſon égal nL^2l le ſera auſſi, & par conſéquent plus la valeur de $f = \frac{pr}{KA^2 + ka^2} = \frac{pr}{nL^2l}$ ſera petite. Donc les fibres auront beſoin de moins de force pour réſiſter, ou, ce qui revient au même, elles réſiſteront davantage à un égal degré de force. Donc plus z ſera grand, ou plus l'axe ſera éloigné du point par lequel paſſe un axe qui diviſe la baſe $KGDEK$ en deux parties égales, plus le levier ſera capable de réſiſtance.

SCOLIE III.

(219.) On a ſuppoſé dans tout ce qu'on vient de dire, que la force des fibres, dans la ſection GKE, eſt égale à celle qui a lieu dans l'autre ſection GDE; mais, comme dans la premiere de ces ſections, les fibres réſiſtent à leur compreſſion, & que dans la ſeconde elles réſiſtent à leur dilatation, il n'y a aucune certitude que ces deux eſpeces de réſiſtances ſoient égales dans la nature. Cependant on peut les ſuppoſer ainſi, juſqu'à ce que l'expérience nous faſſe con-

---

dans tous les points d'un levier homogène qu'on ſuppoſe capable d'une égale réſiſtance. y & y' repréſentant des dimenſions linéaires homologues dans les deux ſections, les quantités L^2l & L'^2l', qui ſont proportionnelles à L^3 & L'^3, ſont auſſi proportionnelles à y^3 & y'^3; donc $\frac{\frac{1}{2}x^2\alpha}{y^3} = \frac{\frac{1}{2}x'^2\alpha}{y'^3}$, c'eſt-à-dire que $\frac{\frac{1}{2}x^2\alpha}{y^3}$ eſt une quantité conſtante. Si l'on fait cette quantité $= m$, on aura $y^3 = \frac{\alpha}{2m}.x^2$, ou $y^3 = Qx^2$, en faiſant $\frac{\alpha}{2m} = Q$; équation à la parabole cubique.

PLANC. I. noître la véritable loi ſuivant laquelle les fibres exercent leurs forces de réſiſtance.

CHAPITRE V.

De l'axe & du rayon de Rotation.

DÉFINITION XXXIV.

(220.) ON appelle *Axe de Rotation* la ligne fixe dans un ſyſtême de corps, ſur laquelle tournent tous les corps qui le compoſent, en décrivant de petits arcs de cercle, quand même ce ne feroit que dans un inſtant, ou une différencielle de temps. La diſtance perpendiculaire du centre de gravité du ſyſtème à cet axe, s'appelle *Rayon de Rotation.*

PROPOSITION XXIV.

(221.) *Trouver l'axe de rotation, ou le point ſur lequel tourne un ſyſtême.*

FIG. 21. Soit un ſyſtême libre compoſé d'un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, lequel tourne dans le plan de la Figure; ſoit de plus C le centre de gravité du ſyſtême qu'on ſuppoſe avoir parcouru, ſuivant la direction CI, l'eſpace CD, dans un inſtant, ou différencielle de temps. Suppoſant encore qu'un corps quelconque A paſſe de A en B dans le même inſtant, ſoit tiré les lignes ACE, BDE, prolongées juſqu'à ce qu'elles ſe coupent en E, l'angle AEB ſera l'angle de rotation décrit par le ſyſtême dans le même inſtant, ou différencielle de temps. (*Voyez la note *** de l'Article* 129). Soit pris $EH = ED$, & ſoit mené la ligne DH, enſuite par le point F qui diviſe la ligne CD en deux parties égales, ſoit élevé la perpendiculaire FG, & en faiſant l'angle $CDG = EDH$, le point G ſera celui où ſe trouve l'axe ſur lequel tourne tout le ſyſtême dans l'inſtant, ou la différencielle de temps, que le centre de gravité a employé à paſſer de C en D.

Les triangles HED, CGD, ſont ſemblables par la conſtruction, & par conſéquent l'angle $HED = CGD$. L'angle $ACI = BDI + HED = BDI + CGD$, & l'angle $IDG = DCG + CGD$. En ſommant ces deux égalités, on a $ACI + DCG + CGD = BDI + CGD + IDG$; c'eſt-à-dire, $ACI + DCG = BDI + IDG$, ou $ACG = BDG$: de ſorte que, ſi, donnant un petit mouvement au ſyſtême, on fait tomber C

ſur D, & A ſur B, & la ligne AC ſur BD, à cauſe des angles égaux ACG & BDG, la ligne CG tombera ſur la ligne DG, & le point G ſera demeuré immobile pendant le mouvement. De plus, les triangles ACG, BDG, étant ſemblables & égaux, donnent $AG=BG$, & par conſéquent le corps A aura décrit, dans l'inſtant, ou la différencielle de temps, le petit arc AB, dont le rayon eſt AG.

On démontrera la même choſe de tout autre corps du ſyſtême: donc le point G, où le plan directeur eſt rencontré par la perpendiculaire FG à la direction CI, & menée du centre de gravité, ſera celui où paſſe l'axe de rotation.

COROLLAIRE I.

(222.) A meſure que le centre de gravité paſſe d'un lieu à un autre, l'axe de rotation varie, & il ne peut être fixe, à moins que le centre de gravité ne le ſoit auſſi; & dans ce cas, tout le ſyſtême tourne ſur un axe qui paſſe par ce centre.

COROLLAIRE II.

(223.) Donc il n'y a point d'axe fixe dans le ſyſtême, ſi ce n'eſt pour un inſtant, ou différencielle de temps, lorſqu'il ne tourne pas ſur celui qui paſſe par le centre de gravité.

PROPOSITION XXV.

(224.) *Chacune des lignes* DG, CG, *ou le rayon de rotation, eſt* $=\frac{S\int\pi dt}{PM\int\pi dt \sin\Sigma}$.

Car l'angle $CGD=\frac{CD}{CG}$ (129, *note* ***) eſt égal à AED (221.), qui eſt l'angle de rotation; donc $\frac{CD}{CG}=\frac{P dt\int\pi dt \sin\Sigma}{S}$. Subſtituant, dans cette équation, pour CD, ſa valeur $\frac{dt\int\pi dt}{M}$ (35, 105, ou 116.), on aura $\frac{dt\int\pi dt}{M.CG}=\frac{P dt\int\pi dt \sin\Sigma}{S}$. Donc $CG=\frac{S\int\pi dt}{PM\int\pi dt \sin\Sigma}$.

COROLLAIRE I.

(225.) Comme $P\sin\Sigma=p$ (158.), on pourra encore exprimer le rayon de rotation par $\frac{S\int\pi dt}{M\int p\pi dt}$.

COROLLAIRE II.

(226.) Dans les corps qui tombent librement par la ſeule action de leur gravité, le centre des puiſſances coïncide avec celui de gravité; c'eſt-à-dire que $p=0$: donc le rayon de rotation ſera infini; par conſéquent les corps qui tombent librement par la ſeule

action de leur gravité, ne peuvent jamais avoir de mouvement de rotation. Il en eſt de même d'un corps qui feroit animé par des puiſſances dont le centre coïncideroit avec celui de gravité.

COROLLAIRE III.

(227.) Si la ſomme des puiſſances π eſt égale à zéro, ou ſi elles ſe détruiſent mutuellement par l'oppoſition des quantités poſitives & des quantités négatives, ſans que pour cela l'intégrale $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p\pi dt$ ceſſe d'avoir une valeur, le rayon de rotation ſera auſſi zéro, & par conſéquent le ſyſtême tournera ſur ſon centre de gravité. (110.) *

SCOLIE I.

(228.) M. *Bouguer*, dans ſon *Traité du Navire, Liv. II, Section III, Chap. I*, dit que, ſi une ligne droite eſt pouſſée ou tirée perpendiculairement par deux puiſſances égales, & de directions contraires, appliquées à ſes extrémités, cette ligne tournera ſur ſon centre de gravité. Cette aſſertion eſt vraie non-ſeulement dans ce cas, mais dans tous ceux où les puiſſances ſont égales & de directions contraires, lors même qu'elles n'agiſſent pas perpendiculairement ſur la ligne, & qu'elles ne ſont pas appliquées à ſes extrémités. Il ſuffit, pour cela, comme on vient de le voir, que la ſomme des puiſſances π ſoit $= 0$, comme elle l'eſt en effet lorſque les deux puiſſances ſont égales & de directions contraires. Que les puiſſances ſoient d'ailleurs placées où l'on voudra, & qu'elles agiſſent ſur la ligne, ſous quelque angle que ce ſoit, cela eſt indifférent, pourvu qu'on n'ait pas $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p\pi dt = 0$. Il eſt vrai que ce cas, bien examiné, eſt tout-à-fait imaginaire, & que la formule ne peut lui être appliquée, parce qu'en rigueur une ligne eſt immatérielle; & par conſéquent, dans ce cas, M auſſi-bien que S, ſont zéro. Mais ſi l'on admet qu'il ne s'agit pas d'une ligne mathématique, mais d'un parallélipipede matériel, notre remarque demeure dans toute ſa force.

---

* On remarquera que l'expreſſion $p\pi$, qui repréſente généralement la ſomme des moments des forces, n'eſt pas zéro toutes les fois que la ſomme π des puiſſances eſt zéro par l'oppoſition des puiſſances poſitives & négatives; car on voit (104.) que p eſt alors infini La difficulté diſparoitra, ſi l'on prend pour π, non le zéro abſolu, mais une quantité infiniment petite. En général, $p\pi$ ne peut être zéro, quant à l'angle de rotation, que dans deux cas particuliers, ſçavoir, lorſque $p = 0$, qui eſt le cas du Corollaire précédent, & lorſque la ſomme des puiſſances poſitives eſt non-ſeulement égale à celle des puiſſances négatives, mais encore lorſque le centre des unes coïncide avec le centre des autres, ou, ce qui revient au même, lorſque la réſultante des unes eſt égale & directement oppoſée à celle des autres.

SCOLIE II.

(229.) *Jean Bernoulli*, dans le Tome IV de ses Œuvres, N°. CLXXVII, ne détermine le centre, ou l'axe de rotation que dans le cas où $\mathit{sin}\,\Sigma = 1$; c'est-à-dire, dans le cas où la ligne menée du centre des puissances au centre de gravité, est perpendiculaire à la direction. La valeur du rayon de rotation se réduit, alors, à $\frac{S}{PM}$, qui est l'expression que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule simple, dont les oscillations sont de même grandeur & de même durée que celles du pendule composé, ou pour la distance de l'axe de rotation au centre d'oscillation du pendule, ou du systême (190.); ce qui lui a fait croire que le systême tournoit sur son centre d'oscillation. En effet, si l'on imagine que le systême tourne sur son centre de gravité fixe, comme si c'étoit un pendule, dans ce cas, son centre d'oscillation sera éloigné de son centre de gravité, de la quantité $\frac{S}{PM}$, quoique du côté opposé à celui que nous avons vu que se trouve l'axe de rotation. M. *Bouguer*, dans son *Traité de la Manœuvre des Vaisseaux*, *Liv. I*, *Section II*, *Chap. XIV*, remarque bien que ce point est du côté opposé à celui où l'on place la puissance, par rapport au centre de gravité; mais il donne, pour regle générale, que la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, est en raison inverse de celle de ce même centre à la puissance, ou comme $\frac{S}{PM}$, tandis que l'expression générale de la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, est $\frac{S\int r\,dt}{PM\int r\,dt\ \mathit{sin}\,\Sigma}$; expression qui ne se réduit à $\frac{S}{PM}$, & ne répond par conséquent avec la regle de M. *Bouguer*, que dans le cas où $\mathit{sin}\,\Sigma = 1$, & est constant. Dans tous les autres cas, cette distance est en raison inverse de la distance P, & en raison directe de $\frac{\int r\,dt}{\int r\,dt\ \mathit{sin}\,\Sigma}$. Cette différence vient de ce que, tant M. *Bouguer*, que *Jean Bernoulli*, n'ont cherché le lieu du centre, ou de l'axe de rotation, que dans le premier instant où le systême se met en mouvement. Il est certain que pendant la durée de cet instant, on peut supposer $\mathit{sin}\,\Sigma$ constant, quoiqu'il ne le soit pas dans les suivants. La quantité $\frac{\int r\,dt}{\int r\,dt\ \mathit{sin}\,\Sigma}$ se trouve réduite, pour le premier instant, à $\frac{1}{\mathit{sin}\,\Sigma}$, qui est une quantité constante; & par conséquent la distance du centre de gravité à l'axe de rotation se trouve par-là seulement en raison inverse de la distance P.

CHAPITRE VI.

De la Percussion.

Définition XXXV.

(230.) La *Percussion* est le choc, ou le coup que se donnent les corps, lorsqu'ils se rencontrent, étant mus avec des vitesses, ou des directions différentes.

Définition XXXVI.

(231.) Si, après que le choc a eu son effet, les corps continuent à se mouvoir étant unis, & ne font seulement que se presser, l'action qu'ils exercent s'appelle une *Pression.*

Définition XXXVII.

(232.) Si, dans l'action du choc, aucun des corps ne se détermine à la rotation, le point dans lequel se fait le choc, s'appelle *Centre de percussion.*

On a vu que, dans les corps graves, on appelle *Centre de gravité* le point sur lequel le corps étant appuyé, demeure en équilibre, sans se déterminer à tourner, ni d'un côté ni de l'autre. Dans l'action du choc, on appelle de même *Centre de percussion*, le point dans lequel le corps, étant choqué, demeure en équilibre, sans se déterminer à la rotation, ni d'un côté, ni de l'autre.

Axiome IV.

(233.) Les corps sont impénétrables, c'est-à-dire, ne peuvent se pénétrer de maniere à occuper le même lieu dans le même temps.

Quoique nous voyions journellement qu'un corps s'introduise dans un autre, les particules de matiere du premier n'occupent pas pour cela le même lieu que celles du second : celles de celui-ci cedent leur place à celles du premier, & chaque particule occupe un lieu séparé, tant avant qu'après, & même dans le temps du choc, de sorte que deux particules ne peuvent jamais occuper le même lieu.

Axiome V.

(234.) La nature opere par intervalles, ou par des mouvements successifs.

C'est ce que quelques-uns ont nommé la *Loi de continuité.* Un

corps qui se meut suivant une direction, ne peut passer d'un point à un autre, sans passer successivement par tous les points intermédiaires. Pareillement un corps ne peut passer d'une vîtesse à une autre plus grande ou plus petite, sans avoir eu auparavant & successivement tous les autres degrés de vîtesse intermédiaires : il en est de même de tous les cas à l'infini.

Définition XXXVIII.

(235.) Si un corps en rencontre, ou en choque un autre, comme (233.) ils ne peuvent se pénétrer, & que le corps choquant, en vertu de son inertie, tend à conserver son degré de vîtesse, il doit agir peu à peu, & par des degrés successifs, sur le corps choqué, qui n'en a pas tant, & l'inertie de celui-ci doit s'exercer, avec une direction contraire, à chaque instant de l'action du corps choquant: par conséquent chacun des deux corps doit éprouver, dans le point du contact, ou dans les environs, une force, ou puissance, qui est une force d'action dans le corps choqué, de la part du corps choquant, & une force de réaction dans le corps choquant, de la part du corps choqué ; l'une & l'autre est égale (16.) à la force d'inertie des corps. Cette force, quelle qu'elle soit, s'appelle *Force de percussion.*

Scolie I.

(236.) Si les deux corps étoient parfaitement solides, ou denses; c'est-à-dire, s'il n'y avoit aucuns pores, ou interstices entre les particules de matiere qui les composent; il ne seroit pas possible que le corps choquant agît peu à peu, & par degrés, sur le corps choqué : il faudroit alors que le corps choqué reçût tout d'un coup toute la vîtesse du corps choquant, ce qui est absolument contraire à ce qu'on a dit ci-dessus. (234.)

Cette difficulté a paru à quelques Auteurs une raison suffisante pour ne point admettre, dans la nature, de corps parfaitement solides. Cependant si l'on considere que, dans la division continue des corps, il faut nécessairement qu'on arrive aux atomes primitifs dont ils sont composés, & que ceux-ci sont tout-à-fait privés de pores ; on ne peut gueres souscrire à cette opinion, & par conséquent on ne peut pas exclure de la nature les corps parfaitement durs, ou solides. Il se présente encore d'autres difficultés, à mesure qu'on examine plus profondément les propriétés des premiers éléments de la matiere ; mais ces discussions n'entrent pas dans notre plan, puisque nous nous bornons à traiter des corps déja composés de ces éléments.

Il eſt certain, au reſte, qu'on ne connoit point de corps dans toute la nature, dont les particules intégrantes ne ſoient ſéparées les unes des autres par des pores, ou interſtices.

DÉFINITION XXXIX.

(237.) C'eſt au moyen des pores, ou interſtices, que les premieres particules des corps cedent leur place à l'impulſion du choc, ou de la percuſſion, pour aller occuper des interſtices plus éloignés. Dans certains corps, les particules cedent moins au choc, & dans d'autres elles cedent davantage; c'eſt ce qui fait qu'on dit que les corps ſont plus ou moins durs, ou plus ou moins mous; enſorte qu'un corps eſt d'autant plus dur, que ſes particules cedent moins leur place dans l'impulſion du choc, ou de la percuſſion.

SCOLIE II.

(238.) De là viennent les enfoncements, cavités, ou impreſſions qui ſe forment dans les corps, par le moyen des chocs; de là les introductions, &, pour ainſi dire, les pénétrations des corps les uns dans les autres. Nous diſons tous les jours, quoiqu'improprement, qu'un boulet a pénétré dans un mur, un clou dans une planche, &c.

SCOLIE III.

(239.) Il eſt néceſſaire de ne pas confondre la dureté des corps avec leur denſité. L'or eſt plus denſe que l'acier, mais l'acier eſt plus dur que l'or; le mercure eſt plus denſe que l'argent, & n'eſt cependant point dur; il en eſt de même de beaucoup d'autres corps. On ne prétend pas pour cela établir que la dureté eſt abſolument indépendante de la denſité: le même or, battu avec le marteau, & réduit à un moindre volume, & par conſéquent à une plus grande denſité, acquiert auſſi une plus grande dureté. Si un corps n'avoit pas de pores, où s'il étoit infiniment denſe, aucune de ſes parties ne pourroit céder au choc; par conſéquent il ſeroit auſſi infiniment dur. La dureté peut donc dépendre de la denſité, mais elle peut auſſi dépendre de la cohéſion des parties mêmes. L'expérience eſt le ſeul moyen que nous ayons, juſqu'à préſent, pour connoître le degré de dureté de chaque eſpece de corps.

DÉFINITION XL.

(240.) On appelle *Corps tenaces*, ceux dont les parties ne ſe rompent point, ou ne ſe ſéparent point les unes des autres, en cédant leurs

leurs places ; & la tenacité eſt d'autant plus grande, que les parties réſiſtent davantage à leur ſéparation.

DÉFINITION XLI.

(241.) Les corps dont les parties ne peuvent céder leurs places ſans ſe rompre, ſont appellés *fragiles*, & la fragilité eſt d'autant plus grande, que les parties qui reçoivent le choc, ſe ſéparent, ou ſe rompent plus facilement.

DÉFINITION XLII.

(242.) *L'élaſticité* eſt la force que l'expérience nous a fait découvrir dans les corps, par laquelle les parties qui ont été forcées, ou qui ont cédé à l'impreſſion d'un choc, ou à celle d'une preſſion, tendent à ſe rétablir dans leur lieu reſpectif, telles qu'elles étoient avant le choc, ou la preſſion. C'eſt par cette force qu'une balle de paume ſe releve, lorſqu'elle tombe à terre; c'eſt encore par cette force qu'un reſſort, après avoir été comprimé, tend à ſe rétablir dans ſon premier état ; que l'arc décoche la fleche, &c. &c. &c. Cette force réſide dans toutes les particules de matiere qui cedent à l'impulſion du coup, à moins que, dans l'action, quelques-unes d'elles ne ſe rompent, ou ne ſe ſéparent totalement, ou en partie : car, dans ce cas, elles perdent totalement, ou en partie, leur élaſticité. Enfin cette force agit dans quelque inſtant que ce ſoit du choc, elle concourt avec celle de percuſſion, dont elle fait partie, ou même le tout, & elle tend à ſéparer les corps, en les pouſſant dans des directions oppoſées.

COROLLAIRE I.

(243.) L'élaſticité augmente à proportion que le nombre des parties forcées, ou qui ont cédé à l'impulſion du choc, augmente ; ou, ce qui eſt la même choſe, à proportion que l'impreſſion devient plus grande ; & la force d'élaſticité eſt la plus grande qu'il eſt poſſible, lorſque l'impreſſion eſt parvenue à toute ſa grandeur, ou qu'elle eſt devenue l'impreſſion totale.

COROLLAIRE II.

(244.) C'eſt dans cet état de la plus grande impreſſion, que toute la force d'élaſticité exiſte ; parce qu'ayant été en augmentant par des degrés ſucceſſifs, juſqu'à ce que la plus grande impreſſion fût tout-à-fait formée, elle ne peut s'évanouir (234.) qu'en repaſſant par tous les degrés de diminution. Le corps choquant doit donc continuer à perdre

de sa vitesse, & le corps choqué à en acquérir, jusqu'à ce que les parties déplacées soient revenues entiérement, ou en partie, au lieu qu'elles occupoient avant le choc.

DÉFINITION XLIII.

(245.) Si le rétablissement des parties comprimées est total, c'est-à-dire, si elles reprennent entiérement la situation qu'elles avoient, on dit que l'élasticité est parfaite, ou que le corps est parfaitement élastique; mais si, au contraire, elles ne la reprennent qu'en partie, le corps n'est pas parfaitement élastique. Enfin s'il n'y a aucun rétablissement dans tout le temps du choc, le corps n'est nullement élastique.

SCOLIE IV.

(246.) On sçait par l'expérience que l'effet produit par la percussion, ou le choc, est beaucoup plus grand que celui qui est produit par la pression. Ce fait est trop commun, & se présente trop souvent à nos yeux, pour qu'il n'ait pas été dans tous les temps un sujet de réflexion. *Aristote*, dans la question 20 de sa *Méchanique*, demande pourquoi une hache coupe ou divise un corps par son coup, & qu'elle ne le fait pas quand elle est seulement comprimée, ou pressée? On ne doit pas trouver étonnant que ce Philosophe se soit contenté de faire la question, sans entreprendre d'y répondre, lorsqu'on voit que la difficulté n'est pas encore éclaircie, & a subsisté jusqu'ici, quoiqu'elle ait été le sujet de bien des discussions.

Leibnitz, considérant la diversité des effets, distingua la force que produit la percussion de celle que produit la pression; & il appella la premiere, *Force vive*, & la seconde, *Force morte*. Cette distinction a eu, & a peut-être encore aujourd'hui de grands partisans. *Jean Bernoulli*, dans son *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, *Chap. III*, *Déf. II*, définit les deux forces en ces termes: *La force vive est celle qui réside dans un corps, lorsqu'il est dans un mouvement uniforme; & la force morte, celle que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu'il est sollicité & pressé de se mouvoir, ou à se mouvoir plus ou moins vîte, lorsque le corps est déjà en mouvement.* Cette définition ne fait pas dépendre la force vive du choc, puisque *cette force réside dans un corps, lorsqu'il est dans un mouvement uniforme*, sans exprimer aucunement qu'elle soit dépendante, ou non, de l'action du choc. Le même Auteur s'explique encore plus clairement dans sa *Dissertation sur la veritable notion des*

forces vives, N°. CXLV, §. I, où il dit : *Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi : subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat in quod agat.* La faculté d'agir que nous connoissons dans les corps, est la force d'inertie, ou, pour mieux dire, la force innée de la matiere ; aussi tous ceux qui ont adopté & soutenu cette distinction des forces vives, ne les ont point distinguées des forces d'inertie dont nous avons vu l'action dans le choc, ou au moins sont convenus que ce sont elles qui les produisent. *Bernoulli* convient de cela lui-même, puisque dans le Chap. V, §. 3 du Discours déjà cité, il dit, en parlant de la force vive : *Sa nature est toute différente ; elle ne peut ni naître, ni périr en un instant, comme la force morte ; il faut plus ou moins de temps pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas ; il faut aussi du temps pour la détruire dans un corps qui en a. La force vive se produit successivement dans un corps, lorsque ce corps étant en repos, une pression quelconque, appliquée à ce corps, lui imprime peu à peu, & par degrés, un mouvement local. Ce mouvement s'acquiert par des degrés infiniment petits, & monte à une vîtesse finie & déterminée, qui demeure uniforme à l'instant que la cause qui a mis le corps en mouvement cesse d'agir sur lui. Ainsi la force vive produite dans un corps, dans un temps fini, est équivalente à cette partie de la cause qui s'est consumée en la produisant.* Dans un corps qui en choque un autre qui est en repos, l'inertie du corps choquant est, comme nous l'avons dit ci-dessus, la force qui imprime peu à peu, & par degrés, au corps choqué un mouvement local qui arrive à une vîtesse déterminée ; & par conséquent l'inertie est la pression qui, appliquée au premier corps, ou qui, résidant en lui, produit la force vive dans le second. Il n'est pas nécessaire cependant, d'après cette définition, que ce soit le choc qui produise la force vive ; elle peut naître d'une puissance quelconque. La gravité, par exemple, agissant sur un corps libre, lui imprime peu à peu un mouvement local, ou une force vive, qui réside ensuite dans le corps. Enfin la force vive, suivant ces Auteurs, réside dans les corps, & y est produite par une pression, ou puissance quelconque ; mais elle n'est pourtant pas cette même pression, ou puissance qui la produit : c'est une autre chose dont aucun d'eux n'est encore parvenu à définir, ni à expliquer la nature.

L'obscurité de ces notions, & les doutes qu'elles présentent, ont fait qu'*Euler* (*Tom. I* des *Mémoires de l'Académie Royale de Berlin*) s'est naturellement persuadé que la force vive n'étoit autre chose que la force de percussion ; mais la force de percussion, suivant la défi-

nition que nous en avons donnée, eſt une puiſſance qui agit, & qui, ſuivant les Auteurs cités, ne peut être, tout au plus, que la cauſe productrice de la force vive. Les partiſans de cette force ſont même ſi éloignés de la confondre avec la force de percuſſion, ou de preſſion quelconque, qu'ils ne ceſſent de répéter que la premiere n'eſt comparable en aucune maniere avec la ſeconde, pas plus que le fini ne l'eſt avec l'infini, ou une ligne avec une ſurface, comme le dit *Bernoulli* lui-même.

Mais ſi l'on ne nous a pas donné, juſqu'à préſent, une définition exacte, ou une connoiſſance parfaite des forces vives, au moins nous aſſure-t-on en général qu'elles ſont proportionnelles aux effets qu'elles produiſent; c'eſt-à-dire, à l'impreſſion qui réſulte du choc. Cette notion, toute claire qu'elle paroiſſe, au premier coup-d'œil, ne fait que nous jetter dans de plus grandes difficultés. Une preſſion, quelle qu'elle ſoit, produit auſſi une impreſſion qui eſt bien ſenſible dans les corps mous; & les choſes étant ainſi, comment peut-on les concilier avec l'aſſertion que la force de preſſion, & la force vive, ſont incomparables, de la même maniere que le fini n'eſt pas comparable avec l'infini? Il eſt vrai que la preſſion produit ſon impreſſion relativement au temps; c'eſt-à-dire, qu'à chaque inſtant elle augmente ſon impreſſion d'une quantité infiniment petite, au lieu qu'il ne paroît pas que les partiſans des forces vives demandent que les choſes arrivent ainſi; mais il faudroit pour cela que l'impreſſion fût ſimultanée, c'eſt-à-dire qu'elle ſe fît dans un inſtant indiviſible, ce qui eſt abſolument contraire à ce qui a été dit, *Art.* 234. Et ſi on la ſuppoſe faite dans un temps déterminé, quelque court qu'il ſoit, il eſt clair alors que la force vive agit comme la force de preſſion, qu'elle n'en differe aucunement, & n'en peut par conſéquent être diſtinguée.

Cette queſtion, de quelque façon qu'on l'enviſage, n'eſt donc qu'une queſtion de nom *, & on donne le nom de force vive à un être dont on n'a aucune connoiſſance; par conſéquent cette diſcuſſion ne peut influer, en aucune maniere, ſur la théorie & le calcul du mouvement. Qu'on admette ou qu'on rejette cette force vive, il eſt toujours certain que le mouvement procede de la puiſſance qui agit; quelle que ſoit cette puiſſance, & de quelque façon qu'on

* Cette vérité a été miſe dans tout ſon jour par M. *d'Alembert.* Voyez la préface de ſon *Traité de Dynamique*, ou le mot *force* de l'Encyclopédie, qui en eſt preſque entiérement extrait. Voyez auſſi la quatrieme partie du *Cours de Mathématique* de M. *Bezout*, art. 388.

en considere les effets, les vîtesses qui en résultent, les espaces parcourus, & les temps de la durée de l'action, tant dans un systême que dans l'autre, seront toujours les mêmes. Toute la difficulté consiste donc à sçavoir à quoi on doit donner le nom de force vive; difficulté d'autant plus embarrassante, qu'elle paroît exister même parmi les Auteurs & les partisans de cette force. Nous nous en tiendrons à ce qui a été dit dans *l'Article* 13; &, pour éviter tout doute & toute obscurité, nous n'entendrons autre chose par force, qu'une action, ou une puissance quelconque. On verra dans la suite que si c'est seulement par la grande différence qu'on remarque dans les effets, qu'on a introduit la force vive, on peut bien s'en passer, & même l'abandonner dès à présent, parce qu'on démontrera que la force de percussion suffit, pour rendre raison de tous les phénomenes de cette nature que peut nous présenter l'expérience.

DÉFINITION XLIV.

(247.) Nous appellerons *Profondeur de l'impression*, sa plus grande profondeur mesurée suivant la direction du mouvement; & l'*Amplitude de l'impression* est la plus grande section qu'on peut y faire perpendiculairement à la direction du mouvement.

PROPOSITION XXVI.

(248.) *La force de percussion est en raison composée de la dureté des corps & de l'amplitude des impressions.*

Un corps est d'autant plus dur, que ses particules cedent moins à l'impulsion du coup (237); c'est-à-dire, que la différencielle de la vîtesse pendant un instant dt du choc, est plus grande *. Pareillement, plus le nombre des particules choquées sera grand, ou plus sera grande l'amplitude de l'impression, plus la même différencielle sera grande. Donc cette différencielle sera en raison directe composée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impressions; mais la force qui agit (18.) est comme cette différencielle : donc aussi la force de percussion sera en raison composée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impressions.

COROLLAIRE I.

(249.) Donc il n'y a point dans la nature de corps absolu-

* Car (236.) si les corps étoient parfaitement durs, le corps choqué recevroit, tout d'un coup, toute la vîtesse du corps choquant; alors la différencielle de sa vîtesse dans le choc seroit un *maximum* : donc, plus cette différencielle de vîtesse sera grande, c'est-à-dire, plus elle approchera du *maximum*, plus les corps auront de dureté.

Planc. I. ment mous; parce que n'y ayant point d'altération dans le mouvement, il n'y a point de force qui résiste; & où il n'y a pas de résistance, il n'y a pas de corps.

Corollaire II.

(250.) Il n'y a point de corps qui ne soit élastique; car l'élasticité consistant dans la réaction d'une puissance capable de comprimer le corps, cette compression ne peut s'évanouir, ou devenir nulle, sans passer par tous les degrés de diminution, & par conséquent sans donner lieu aux parties déplacées de se rétablir, selon la direction suivant laquelle elles réagissent. Il pourroit seulement y avoir de la difficulté dans le cas des corps parfaitement durs; mais nous avons déjà dit qu'il n'en existe point de tels dans la nature, si ce ne sont les premiers atômes dont les corps sont composés, & desquels nous ne prétendons pas traiter.

Scolie I.

(251.) Ce ce l'on vient de démontrer a également lieu lorsque les bases des impressions ne sont point planes & paralleles à leurs amplitudes; car, de quelque maniere que se fasse l'impression, il n'y a pas dans l'action d'autres points résistants suivant la direction du mouvement, que ceux qui sont compris dans l'amplitude: & quant à la résistance, c'est la même chose qu'ils soient tous à la même profondeur, ou à des profondeurs différentes, pourvu que la dureté ne soit pas changée par cette circonstance.

Scolie II.

(252.) Malgré la facilité avec laquelle on a déterminé la raison suivant laquelle agit la force de percussion, la détermination de sa mesure exacte est cependant bien difficile; car, malgré que quelques Auteurs aient supposé généralement que la figure de l'impression est la même que celle du corps choquant, il est clair que cette opinion ne peut se soutenir pour les corps durs & tenaces. Dans un grand nombre de ces derniers, l'amplitude de l'impression est toujours beaucoup plus grande. Si un cylindre *AB*, par exemple,
Fig. 23. très-dur, & incapable d'aucune impression sensible, choque un autre corps *CD*, & y forme une impression, cette impression, si le corps choqué est tenace, n'aura point la figure même *EFGB* du cylindre; mais elle sera de la forme *HFBI*: car les parties contiguës aux points *F* & *B* ne se détachant point avec facilité de leurs voisines, malgré que ces points cedent à l'impulsion, il est nécessaire que ces

parties cedent aussi, mais en entraînant avec elles celles qui les touchent, & que celles-ci entraînent de même celles qui les suivent immédiatement, & ainsi successivement; de sorte qu'il se forme, tout autour du cylindre, une cavité *HFE*. L'amplitude de l'impression se forme du diametre *HI*, au lieu du diametre *FB*; ce qui fait qu'il est difficile d'avoir une mesure exacte de l'impression réelle.

Au reste, cette observation, toute vraie qu'elle est, ne peut cependant être appliquée à tous les cas, sans aucune modification; car si le corps *AB*, au lieu d'être un cylindre, étoit une sphere, une cône, ou tout autre corps, dont la base *FB* ne fût point parallele à *HI*, il est certain que la cavité peut, dans ce cas, diminuer beaucoup, & peut-être même s'évanouir entiérement, si le corps *CD* n'étoit pas d'une dureté & d'une ténacité extrêmes. En outre, quoique le corps choqué soit d'une même densité, ou dureté, dans toutes ses parties, cette dureté peut varier par le mouvement des particules supérieures qui s'approchent davantage des inférieures, & par-là il peut y avoir un plus grand nombre de particules dans la base *FB*, à la fin de l'impression qu'au commencement, particuliérement dans les corps tenaces & élastiques. Il arrive de là que la force de percussion qu'on auroit cru constante, parce qu'on ne voit aucune variation dans la base *FB*, ne peut cependant l'être, par quelques-unes des raisons que nous venons de développer.

PROPOSITION XXVII.

(253.) *Trouver la relation entre la force de percussion, la dureté des corps, & l'amplitude de l'impression.*

Si nous exprimons par *H* l'amplitude de l'impression *HI*, & par *D* la dureté du corps *CD*, dans un instant quelconque du choc, la force de percussion sera comme *DH* (248.): mais ceci n'a lieu cependant que dans le cas où le cylindre *AB* seroit extrêmement dur, ou incapable d'impression. Si le rapport de la dureté du cylindre à celle du corps *CD* n'est pas infini, les particules du cylindre dans la base *FB*, seront aussi déplacées, & la différencielle de la vîtesse dépendra aussi de l'aire de la base *FB*, & de la dureté du cylindre. Appellant donc H' cette base, & représentant par D' la dureté du cylindre, la différencielle de la vîtesse dépendra des produits DH & $D'H'$, ou sera en raison composée $DH \cdot D'H'$ des deux: mais lorsque $D'H'$ est infini par rapport à DH, ou, ce qui revient au même, lorsque DH est zero, par rapport à $D'H'$, l'expression doit se réduire à DH; c'est-à dire que la différencielle de la vîtesse doit

PLANC. I. être comme DH. Donc la différencielle de la vîtesse, & par conséquent la force de percussion, est en général comme $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$.

SCOLIE I.

FIG. 24. (254.) Lorsque les premieres particules du corps CD viennent à se rompre, à cause de leur fragilité, il arrive ordinairement que, par leur force élastique, elles compriment les côtés AG, BF de l'autre corps AB, & les aspérités du corps CD forment, dans ces côtés, autant d'autres petites impressions latérales. Ces impressions doivent se considérer comme autant d'autres petites amplitudes d'impression, qui, réunies avec celles de la base GB, feront l'amplitude totale H. Après que l'impression totale est faite, la force d'élasticité qui agit à la base GB, tend à faire rétrograder le corps AB, tandis que les petites impressions latérales résistent à cette rétrogradation. L'action exercée dans ce cas dépendra donc de l'excès de la force élastique en GB, sur celle qui seroit nécessaire pour vaincre la résistance des petites impressions latérales. Si la premiere de ces forces est plus grande que la seconde, le corps AB rétrogradera; & si elle est moindre, il demeurera en repos dès l'instant qu'il aura perdu toute sa vîtesse positive. Mais il est évident que la force d'élasticité en GB, à l'instant que le corps AB cesse de se mouvoir, ne peut manquer d'être plus grande que la force nécessaire pour vaincre les petites impressions latérales, parce qu'elle est égale à la force d'inertie du corps AB, qui a vaincu non-seulement la résistance des parties en GB, mais encore celle des petites impressions latérales: ainsi, de toute nécessité, le corps retournera toujours en arriere aussitôt qu'il aura cessé de se mouvoir. Il peut arriver, à la vérité, que ce ne soit que d'une très-petite quantité, parce que l'élasticité de GB va toujours en diminuant à mesure que le corps AB rétrograde; & elle peut diminuer au point de n'être plus suffisante pour vaincre les petites impressions latérales. On doit entendre la même chose des corps visqueux, tant parce qu'il se forme aussi, dans ces corps, quelques inégalités latérales, que parce que la viscosité même, ou la cohésion des parties les retient. Si le corps AB venoit à pénétrer entiérement dans le corps CD, le nombre des petites impressions latérales seroit alors constant. Dans ce cas, la dureté du corps demeurant la même, ainsi que l'amplitude de l'impression principale, la force de percussion ne peut manquer d'être constante.

SCOLIE II.

(255.) Nous supposerons généralement dans nos calculs, que les deux

deux corps qui ſe choquent, ſe meuvent dans la même direction, ou dans des directions oppoſées ; car, s'ils ſe mouvoient dans des directions différentes, il ſeroit facile de décompoſer leur mouvement, & de faire le calcul pour chaque force ſéparément. Nous ſuppoſerons encore, pour plus de facilité, que les corps ſont uniformément denſes, & qu'ils ſont réguliers, comme deux cylindres, deux ſpheres, deux parallélipipedes, &c., afin qu'étant mus ſuivant la direction de leurs axes, la force de percuſſion, ou du choc, agiſſe dans la même direction. Car les corps ayant une figure égale & ſemblable, & étant uniformément denſes, toutes leurs parties ſeront ſemblablement diſpoſées autour du point dans lequel la force de percuſſion agit, & il n'y a pas de raiſon pour que la force de percuſſion s'incline, ou agiſſe plus d'un côté que de l'autre, attendu que les dimenſions de l'impreſſion en longueur & largeur, doivent être égales dans tous les ſens : par conſéquent la force de percuſſion doit agir également de tous les côtés ; & ainſi elle ne peut produire ſon effet dans une autre direction que celle que tiennent les corps.

Nous ſuppoſerons auſſi que, ſi quelques puiſſances agiſſent ſur les corps, elles ſont appliquées à leurs centres de gravité, afin qu'il n'en réſulte aucun mouvement de rotation, ou que le choc ſe faſſe aux centres de percuſſion, pour éviter également le mouvement de rotation.

Enfin nous ſuppoſerons que les corps ſont d'une grandeur ſuffiſante pour que les impreſſions ne les pénetrent pas, ou ne parviennent pas juſqu'à leurs centres de gravité, afin que le mouvement de ces centres ne ſoit pas affecté par le changement de leur ſituation à l'égard des autres parties du corps.

Nous établirons en général que

A & B ſont les deux corps qui doivent ſe choquer.

z & x les longueurs, ou profondeurs, des impreſſions qui ſe font en eux.

α & β les puiſſances conſtantes qui les animent.

U & V les viteſſes avec leſquelles le choc commence.

u & v les viteſſes dans un inſtant quelconque du choc.

a & b les eſpaces parcourus dans le temps même du choc.

D' & D les *duretés* des corps *.

---

* Tout ce qui précede & tout ce qui ſuit, nous indique qu'il y a, dans cet endroit, une faute typographique dans l'original ; on y trouve le mot *denſité* pour celui *dureté*. On ne peut pas confondre ces deux qualités des corps (2:9) ; cependant, deux corps d'une même matiere, mais dans deux états différents, comme ſeroit du cuivre fondu & du cuivre écroui

H' & H les amplitudes des impressions.

t le temps.

π la force de percussion $= \frac{DH\,D'H'}{DH+D'H'}$.

On suppose que le corps A suit & choque le corps B, & par conséquent que la vitesse U est plus grande que V; sans cela on voit que le choc ne pourroit pas s'effectuer, à moins que la vitesse V ne fût négative. Mais, pour plus de facilité dans le calcul, nous supposerons toujours que les puissances α & β, ainsi que les vîtesses U & V sont positives; car il est très-facile de faire négatives, dans le résultat du calcul, les quantités qui le seroient.

PROPOSITION XXVIII.

(256.) *Trouver la relation entre les impressions & les espaces parcourus par les corps dans le temps du choc.*

Puisque le corps A suit le corps B, & qu'il se forme en eux des impressions dont les longueurs sont z & x, l'espace a parcouru par le corps A, doit être égal à l'espace b parcouru par le corps B, plus les longueurs, ou profondeurs z & x des impressions, lesquelles sont les espaces parcourus par les parties des mêmes corps qui ont cédé. Donc on aura $a=b+z+x$, ou $a-b=x+z$.

COROLLAIRE.

(257.) Si, à la fin de la percussion, les corps viennent à se séparer, parce qu'ils auroient une elasticité presque parfaite, alors $x+z=0$: donc aussi $a-b=0$, ou $a=b$; c'est-à-dire qu'à la fin de la percussion des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-pres, l'espace parcouru, pendant le choc, par le corps A, est toujours égale à l'espace parcouru, dans le même temps, par le corps B.

PROPOSITION XXIX.

(258.) *Trouver la valeur de la différencielle du temps, c'est-à-dire, la valeur de* dt.

De l'équation $a-b=x+z$, on tire $da-db=dx+dz$; mais (29.) $udt=da$, & $vdt=db$: donc $(u-v)dt=da-db$. Donc aussi $(u-v)dt=dx+dz$; d'où l'on tire $dt=\frac{dx+dz}{u-v}$.

COROLLAIRE.

(259.) Lorsque les impressions parviennent à toute leur grandeur,

long-temps à coups de marteaux, pourroient bien avoir leur dureté proportionnelle à leur densité, & on pourroit alors exprimer les duretés relatives, par les mêmes lettres que les densités relatives. C'est à l'expérience à décider ce qui en est.

c'eſt-à-dire, lorſque x & z arrivent à leurs plus grandes valeurs, on a $dx+dz=0$, d'où l'on conclut $u-v=0$, ou $u=v$; c'eſt-à-dire que, dans l'inſtant où s'achevent les plus grandes impreſſions, les corps marchent avec des vîteſſes égales.

PROPOSITION XXX.

(260.) *Trouver la relation entre les vîteſſes des corps.*

Les forces, ou puiſſances, qui animent le corps A, ſont α & π, & comme cette derniere eſt négative, il s'enſuit que $(\alpha-\pi)dt=Adu$ (19.)

Les deux puiſſances qui animent le corps B, ſont β & π, & toutes les deux ſont poſitives; ainſi nous aurons $(\beta+\pi)dt=Bdv$.

En prenant la ſomme de ces deux équations, nous aurons $(\alpha+\beta)dt=Adu+Bdv$; & en intégrant $(\alpha+\beta)t=A(u-U)+B(v-V)$;* d'où l'on tire $Au+Bv=(\alpha+\beta)t+AU+BV$; & par conſéquent $v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$.

COROLLAIRE I.

(261.) Le temps t pendant lequel ſe fait le choc, eſt extrêmement court, comme l'expérience nous l'apprend, & comme nous le démontrerons ci-après. Donc ſi les vîteſſes U & V, ou l'une quelconque d'elles, étoient d'une valeur infinie par rapport au temps t, la quantité $(\alpha+\beta)t$ feroit zéro à l'égard des autres, à moins que $\alpha+\beta$ ne fût infini, & l'on auroit $AU+BV=Au+Bv$.

COROLLAIRE II.

(262.) $AU+BV$ eſt la ſomme des mouvements des corps, avant, ou au commencement du choc, & $Au+Bv$, eſt la ſomme des mouvements des mêmes corps dans un inſtant quelconque du choc: donc la ſomme des mouvements dans un inſtant quelconque du choc, eſt égale à la ſomme des mouvements, avant, ou au commencement du choc.

SCOLIE I.

(263.) Cette propoſition eſt donnée comme généralement vraie, par tous les Auteurs de Méchanique; cependant on vient de voir qu'elle n'eſt certaine que dans le cas où $(\alpha+\beta)t=0$, ou quand cette quantité eſt ſuſceptible d'être négligée à l'égard de U, ou de V.

---

* Cette intégrale eſt $Au+Bv+C$; & comme elle doit convenir à tous les inſtants du choc, il eſt évident qu'elle doit être zéro, en même temps que t; c'eſt-à-dire, lorſque le choc commence: mais dans ce cas $u=v$ & $U=V$; donc $AU+BV+C=0$, ou $C=-AU-BV$; ſubſtituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, elle devient $A(u-U)+B(v-V)$.

Cette condition n'ayant pas lieu, l'équation est $AU+BV+(\alpha+\beta)t=Au+Bv$: d'où l'on voit que lorsqu'il y a des puissances qui agissent, il n'est pas vrai que la quantité de mouvement dans un instant quelconque du choc, soit la même qu'auparavant, ou au commencement du choc.

SCOLIE II.

(264) Il se présente ici une question qui a été le sujet de bien des discussions parmi les Philosophes. On demande si la même quantité de mouvement se conserve ou non. Par ce qui vient d'être démontré, il paroît que l'affirmative est vraie. Le raisonnement de ceux qui soutiennent le contraire, consiste en ce que si l'on fait V négative, on aura, en supposant α & $\beta=0$, $AU-BV=Au+Bv$; que par conséquent, dans ce cas, la différence des deux mouvements AU & BV est égale à la somme de Au & Bv : donc, continuent-ils, en prenant BV positivement, comme le font tous ceux qui soutiennent cette opinion, il n'y pas de doute qu'on n'ait $AU+BV>Au+Bv=AU-BV$; de sorte que la perte totale du mouvement sera $2BV$. Ce raisonnement n'affecte aucunement la rigueur de notre démonstration; car lorsqu'on parle de la somme des mouvements, on entend que ceux qui sont négatifs sont pris négativement, & non positivement; & dans ce cas, la loi, ou le principe, a lieu généralement.

COROLLAIRE III.

(265.) A l'instant où se fait la plus grande impression, on a trouvé (259.) $u-v=0$, ou $u=v$: donc, en substituant l'une ou l'autre valeur dans l'équation $Au+Bv=(\alpha+\beta)t+AU+BV$; il en résulte $u=v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV}{A+B}$; expression de la vitesse des deux corps, à l'instant de la plus grande impression.

COROLLAIRE IV.

(266.) Si la quantité $(\alpha+\beta)t$ est susceptible d'être négligée par rapport aux autres, l'expression précédente deviendra $u=v=\frac{AU+BV}{A+B}$.

SCOLIE III.

(267) Les corps d'une très-petite élasticité, ou qui n'en ont aucune, continuent à marcher avec la vitesse qu'ils se trouvent avoir lors de la plus grande impression, parce qu'il n'y a aucune force dont l'action puisse l'altérer. Donc la vitesse trouvée ci-dessus sera celle avec laquelle les corps d'une très-petite élasticité, ou qui n'en ont aucune, se mouveront après le choc.

SCOLIE IV.

(268.) Il eſt temps préſentement de réſoudre la difficulté dont nous avons parlé dans *l'Art.* 21. Il eſt queſtion de ſçavoir ſi l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$ eſt applicable au cas où une puiſſance α pouſſe un corps *A*. Un Auteur des plus reſpectables de l'Europe, & digne des plus grands éloges, paroît en douter; & pour juſtifier ſes doutes, il ſuppoſe que deux corps ſe choquent, l'un d'eux étant en repos, & raiſonne en cette maniere. Le changement, ou l'altération du mouvement du dernier de ces corps ſera $Bu = Bv = \frac{AUB}{A+B}$, *V* étant ſuppoſé $= 0$. Rien n'eſt plus vrai, c'eſt d'ailleurs une ſuite de ce que nous avons démontré; nous n'éleverons donc aucun doute à ce ſujet. Mais, continue-t-il, pour que l'effet ſoit proportionnel à la puiſſance qui l'a produit, comme on le ſuppoſe dans l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$, il eſt néceſſaire, dans ce cas, que la cauſe qui a produit le changement $\frac{AUB}{A+B}$ ſoit proportionnelle à ce même changement; or c'eſt ce qu'il n'eſt pas poſſible de démontrer.* Notre réponſe à ce raiſonnement, eſt qu'il nous paroît que l'effet total $\frac{AUB}{A+B}$ doit être proportionnel à la ſomme de toutes les actions de la puiſſance durant tout le temps de l'action, & non à une action inſtantanée de cette puiſſance. L'effet qui doit être proportionnel à une action inſtantanée eſt la différencielle, ou l'altération inſtantanée du mouvement. Si c'eſt le corps *A* qui choque le corps *B*, la puiſſance du premier eſt ſon inertie, qui eſt proportionnelle à *Adu*; & l'on aura, dans un inſtant quelconque $-Adu = Bdv$**. En intégrant cette équation, on trouve $A(U-u) = Bv$, en ſuppoſant $V = 0$. Donc auſſi-tôt qu'on arrive, par la continuité de l'action, juſqu'à avoir $u = v$, on a $u = \frac{AU}{A+B}$, & $Bu = \frac{AUB}{A+B}$; c'eſt-à-dire, que tout le mouvement produit dans le corps *B*, pendant la durée de l'action, juſqu'à ce qu'on ait $u = v$, ſera proportionnel à $\frac{AUB}{A+B}$. Ceci ne prouve point que l'action inſtantanée *Adu* ne ſoit pas proportionnelle au

---

* Voyez les Ouvrages cités dans la note de la page 60, & ſur-tout *l'art.* 158 de la *Dynamique* de M. *d'Alembert*.

** Cette équation qui marque l'égalité entre la différencielle du mouvement perdu par le corps *A*, & celle du mouvement gagné par le corps *B*, paroît ſuppoſer ce qui eſt en queſtion; mais elle eſt évidente, puiſqu'on voit qu'en l'admettant on en déduit une vérité dont elle eſt indépendante. On voit d'ailleurs, que les différencielles *du*, *dv* doivent être de ſigne contraire, puiſque la viteſſe du corps *A* diminue de la quantité *du*, tandis que celle du corps *B* augmente de *dv*.

changement inſtantané Bdv; mais prouve, au contraire, que cette proportionalité a effectivement lieu, puiſque de ſa ſuppoſition il réſulte une vérité manifeſte.

PROPOSITION XXXI.

(269.) *Trouver la relation entre les différencielles des viteſſes, & celles des impreſſions.*

De l'équation $(\alpha-\pi)\,dt = A\,du$, & de l'équation $(\beta+\pi)\,dt = B\,dv$, on tire $\frac{(\alpha-\pi)dt}{A} = du$, & $\frac{(\beta+\pi)dt}{B} = dv$: ſouſtrayant la ſeconde équation de la premiere, on a $\left(\frac{\alpha-\pi}{A} - \frac{\beta+\pi}{B}\right)dt = du - dv$; ou $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)\,dt = AB(du - dv)$. Subſtituant la valeur de $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$ (258.), on aura enfin $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)(dx+dz) = AB(u-v)(du-dv)$.

COROLLAIRE I.

(270.) Si l'on integre la quantité $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)(dx+dz)$, toutes les quantités qui en réſulteront ſe trouveront multipliées par x, ou par z; mais à la fin du choc des corps parfaitement élaſtiques, ou à-peu-près, on a $x=0$, & $z=0$. Donc à la fin du choc de ces corps, on a $\int AB(u-v)\,(du-dv) = \frac{1}{2}AB(u-v)^2 - \frac{1}{2}AB(U-V)^2 = 0$*, ce qui donne $U-V = v-u$; c'eſt-à-dire, que les corps parfaitement élaſtiques, ou à-peu-près, ont leur viteſſe relative avant le choc, égale à leur viteſſe relative après le choc.

---

* Cette intégrale eſt facile à trouver; car $\int AB(u-v)(du-dv) = \int AB\,(udu - vdu - udv + vdv)$. Prenant les deux termes $udu - vdu$ affectés de la différencielle du de la même variable, & intégrant comme ſi v étoit une conſtante; on aura $\frac{1}{2}u^2 - vu$: différenciant enſuite cette quantité, & la rétranchant de la différencielle propoſée, on a vdv pour reſte, dont l'intégrale $\frac{1}{2}v^2$ étant jointe avec la premiere, donne $\frac{1}{2}u^2 - vu + \frac{1}{2}v^2$, ou $\frac{1}{2}(u-v)^2$ pour l'intégrale totale : donc en multipliant par AB, & ajoutant une conſtante, l'intégrale cherchée devient $\frac{1}{2}AB(u-v)^2 + C$. Cette regle porte avec elle ſa démonſtration, on peut d'ailleurs voir la quatrieme partie du Cours de Mathématiques de M. *Bézout*, *Art.* 148.

A l'égard de la conſtante C, voici comment on la détermine; cette intégrale étant celle du ſecond membre de l'équation générale de l'*Art.* 269, convient à tous les inſtants du choc, elle doit par conſéquent être zéro lorſque le choc commence; or, dans ce cas, $u=U$, & $v=V$, donc $\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + C = 0$, d'où l'on tire $C = -\frac{1}{2}AB(U-V)^2$. Subſtituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, & rempliſſant la condition du Corollaire, on a l'expreſſion même de l'Auteur. Faiſons encore obſerver que pour que l'expreſſion convienne après le choc, il faut écrire $v-u$ au lieu de $u-v$ que l'équation paroît fournir directement, car alors $u-v$ eſt une quantité négative, qui ne peut être égale, que numériquement, à la quantité poſitive $U-V$; tant que ces quantités ſont au quarré, il n'importe pas dans quel ordre on les écrive; mais lorſqu'elles ſont au premier dégré, il eſt néceſſaire de les mettre dans l'ordre convenable à ce qu'on veut exprimer.

COROLLAIRE II.

(271.) Si l'on substitue, dans l'équation $U-V=v-u$, en place de place v, sa valeur qu'on vient de trouver (260.), qui est $\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$, on aura, pour la fin du choc des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, $U-V+u=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$; d'où l'on tire $u=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$.

COROLLAIRE III.

(272.) Si l'on substitue de même cette valeur dans l'équation $v-U+V=u$, on aura $v-U+V=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$, qui donne $v=\frac{(\alpha+\beta)t+V(B-A)+2AU}{A+B}$.

COROLLAIRE IV.

(273.) Si la quantité $(\alpha+\beta)t$ étoit extrêmement petite, ou négligeable à l'égard des autres, les équations ci-dessus deviendroient $u=\frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, & $v=\frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

COROLLAIRE V.

(274.) Dans la même supposition que $(\alpha+\beta)t$ est négligeable à l'égard des autres quantités, nous aurons aussi $u^2=$ . . . . . . $\frac{U^2(A-B)^2+4BUV(A-B)+4B^2V^2}{(A+B)^2}$; $Au^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4ABUV(A-B)+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$. De même, $v^2=\frac{V^2(B-A)^2+4AUV(B-A)+4A^2U^2}{(A+B)^2}$; $Bv^2=\frac{BV^2(B-A)^2+4ABUV(B-A)+4A^2BU^2}{(A+B)^2}$: par conséquent $Au^2+Bv^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4A^2BU^2+BV^2(B-A)^2+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$, $=\frac{AU^2(A+B)^2+BV^2(A+B)^2}{(A+B)^2}=AU^2+BV^2$. Donc dans les corps parfaitement élastiques, ou à peu près, lorsque $\alpha+\beta$ est négligeable à l'égard des autres quantités, la somme des produits de chaque masse, par le quarré de sa vitesse, est la même au commencement & à la fin du choc, ou la même avant & après le choc.*

PROPOSITION XXXII.

(275.) *Le produit* DHdx *de l'amplitude de l'impression, & de la*

* C'est ce qu'on appelle la *Conservation des Forces vives*. Cette expression est encore admise par la plus grande partie des Géometres, même par ceux qui n'admettent pas la distinction des Forces vives, & des Forces mortes, proposée par *Leibnitz*, & sur-tout son principe sur la mesure de la Force des Corps en mouvement, qui est de multiplier la masse par le quarré de la vitesse. *Voyez* la Préface du *Traité de Dynamique*, de M. *d'Alembert*.

différencielle dx *parcourue par les particules du corps choqué, est toujours égale au produit* $D'H'dz$ *des quantités semblables du corps choquant.*

Le produit DH de la dureté par l'amplitude, est proportionnel au nombre des particules choquées (248.), & la différencielle dx (29.) est comme la vitesse avec laquelle se meuvent lesdites particules : donc le produit $DHdx$ est comme la quantité de mouvement des mêmes particules. $DHdx - D'H'dz$, sera donc, d'après cela, comme la quande mouvement de toutes les particules, laquelle quantité est constante (264.). Mais, au commencement du choc, ce mouvement est zéro. Donc on aura toujours $DHdx - D'H'dz = 0$; ou $DHdx = D'H'dz$, & $dz = \frac{DHdx}{D'H'}$.

PROPOSITION XXXIII.

(276.) *Trouver la relation entre les vitesses & les impressions.*

Si l'on substitue dans l'équation (269.) $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx+dz) = AB(u-v)(du-dv)$, les valeurs de $\pi = \frac{DH \cdot D'H'}{DH+D'H'}$ (253.), & de $dz = \frac{DH}{D'H'}dx$ (275.), on aura l'équation $(\alpha B - \beta A - (A+B)(\frac{DH \cdot D'H'}{DH+D'H'}))(dx + \frac{DH}{D'H'}dx) = AB(u-v)(du-dv)$, qui, en réduisant devient . . . . $(\alpha B - \beta A)(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx - (A+B)\,DHdx = AB(u-v)(du-dv)$, & en intégrant, $(\alpha B - \beta A)\int(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx - (A+B)\int DH\,dx = \ldots \frac{1}{2}AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$. Mais $\int(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx = x+z$ *, substituant donc cette valeur, on a $(\alpha B - \beta A)(x+z) - (A+B)\int DHdx = \frac{1}{2}AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$.

PROPOSITION XXXIV.

(277.) *Trouver la vitesse* u, *avec laquelle se meut le corps* A, *dans un instant quelconque du choc.*

Qu'on dégage de l'équation précédente la valeur de $u-v$, on aura $u-v = \pm((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB})^{\frac{1}{2}}$; qu'on substitue ensuite la valeur de v trouvée dans l'*Art.* 260, qui est $\frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$, & l'on aura $\frac{Au + Bu - AU - BV - (\alpha+\beta)t}{B} = \pm((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB})^{\frac{1}{2}}$ d'où l'on tire $u = \frac{AU+BV+(\alpha+\beta)t}{A+B} \pm \frac{B}{A+B}((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB})^{\frac{1}{2}}$.

---

* Car $\frac{DH+D'H'}{D'H'}dx = \frac{DHdx}{D'H'} + dx = dz + dx$ (275.). Donc, &c.

Le

Le ſigne ſupérieur eſt pour le cas où la plus grande impreſſion n'eſt pas encore parvenue à toute ſa grandeur, & l'inférieur a lieu après que la plus grande impreſſion eſt achevée. *

COROLLAIRE I.

(278.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit ...... $u=\pm\left(U^2+\frac{\alpha(x+\zeta)}{\frac{1}{2}A}-\frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE II.

(279.) Si les deux corps A & B étoient parfaitement élaſtiques, de ſorte que, pendant la rétrogradation du corps A, la quantité DH ne variât point, les deux vîteſſes de ce corps, poſitive & négative, ſeroient égales à diſtances égales de l'origine des x, ou à égales diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion.

COROLLAIRE III.

(280.) Si les corps n'étoient pas parfaitement élaſtiques, comme cela arrive réguliérement dans la nature, la quantité DH ſeroit *plus grande* ** pendant la rétrogradation, à égales diſtances de l'origine des x; & par conſéquent la vîteſſe négative ſeroit moindre que la poſitive, à égales diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion.

COROLLAIRE IV.

(281.) On ne pourra donc pas avoir $u=U$ dans l'origine des x, mais ſeulement $u<U$. Les premieres particules des corps ne pourront donc auſſi retourner entiérement dans leur premiere ſituation: il reſtera par conſéquent une petite impreſſion, lorſque les corps ſe

---

* Cela ſuit de ce qu'après la plus grande impreſſion achevée, la quantité $u-v$ eſt négative.

** Il y a dans l'original, *la quantité* DH *ſeroit moindre*; mais nous croyons que c'eſt une faute typographique: car il eſt évident que, l'élaſticité étant imparfaite, les parties qui ont été forcées & rapprochées les unes des autres par l'action du choc, ne reprennent pas entiérement la même diſpoſition qu'avant le choc: à égales diſtances de l'origine des x, ou du point où ſe termine la plus grande impreſſion, les parties ſeront donc plus rapprochées dans la rétrogradation du corps A, qu'avant la formation de la plus grande impreſſion: donc la dureté D, qui eſt une ſuite du rapprochement des parties, ſera plus grande, & par conſéquent DH le ſera auſſi (252.). Cette correction faite, les conſéquences de ce Corollaire & des ſuivants viennent naturellement, au lieu qu'elles nous paroiſſent devoir être abſolument contraires. En effet, ſi DH étoit réellement moindre dans la rétrogradation, $\frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}$ le ſeroit auſſi; & comme cette quantité eſt à ſouſtraire, il eſt clair que la vîteſſe négative u ſeroit plus grande que la poſitive, & non pas moindre, comme elle doit l'être, & comme le dit l'Auteur, &c. On ſera attention que l'origine des x ou des profondeurs de l'impreſſion, eſt le point de la ſurface du corps choqué dans lequel commence le choc, ou le point du premier contact de ce corps, avant que les parties euſſent été forcées par l'impulſion du choc. Lorſque le corps A, dans la retrogradation, paſſe aux mêmes diſtances de l'origine des x, il eſt auſſi aux mêmes diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion: & c'eſt de ce dernier point que commence la viteſſe négative.

ſépareront, & la vîteſſe, dans cet inſtant, ſera moindre que celle qu'auroit le corps A dans l'origine des x : par conſéquent elle ſera beaucoup moindre que la vîteſſe primitive U.

COROLLAIRE V.

(282.) Comme la puiſſance α agit négativement pendant la rétrogradation, ou retarde le mouvement du corps A, même après qu'il eſt ſéparé du corps B, elle parviendra donc à détruire tout le mouvement du corps A, qui à la fin s'arrêtera, comme on l'a expliqué en parlant du mouvement retardé; & la puiſſance α retournant à agir poſitivement, il ſe fera un ſecond choc, le corps A acquérant (281.), juſqu'au moment de ſa nouvelle rencontre avec le corps B, la même vîteſſe qu'il avoit lorſqu'il s'en eſt d'abord ſéparé, c'eſt-à-dire, une viteſſe moindre que U, & cette nouvelle vîteſſe ſera la vîteſſe primitive relativement à ce ſecond choc.

COROLLAIRE VI.

(283.) L'origne des x ſera auſſi placée plus profondément pour le ſecond choc, puiſque les premieres particules des corps n'ont pas pu, dans le premier choc, retourner préciſément à leur premiere ſituation.

COROLLAIRE VII.

(284.) La même choſe arrivera dans le troiſieme, le quatrieme, & dans tous les chocs ſuivants; la viteſſe primitive ira toujours en diminuant, juſqu'à ce qu'enfin le corps A s'arrête après avoir fait, dans les derniers chocs, des impreſſions d'une quantité infiniment petite; & alors (231.) la force de percuſſion ſe réduira à une ſimple preſſion; c'eſt-à-dire, qu'on aura $\pi = \alpha$.

PROPOSITION XXXV.

(285.) *Trouver la vîteſſe* v, *avec laquelle ſe meut le corps* B, *dans un inſtant quelconque du choc.*

Si l'on ſubſtitue la valeur de u, qu'on vient de trouver, dans l'équation de *l'Art.* 260, qui eſt $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$, après la réduction faite, on trouvera . . . .

$$v = \frac{AU + BV + (\alpha+\beta)t}{A+B} \mp \frac{A}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le ſigne ſupérieur eſt pour le cas où la plus grande impreſſion n'eſt pas encore achevée; & l'inférieur a lieu après qu'elle eſt achevée.

PROPOSITION XXXVI.

(286) *Trouver la valeur de l'impreſſion, en ſuppoſant que la dureté* D *eſt conſtante.*

Puisqu'on suppose la dureté D constante, on aura $\int DHdx = D\int Hdx$; mais $\int Hdx$ est la valeur de l'impression, puisque H désigne son amplitude, & dx la différencielle de sa profondeur : donc, en substituant, dans l'équation de *l'Art.* 276, $D\int Hdx$ en place de $\int DHdx$, & ordonnant, on aura, pour la valeur de l'impression, dans le cas où la dureté D est constante, $\int Hdx = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

PROPOSITION XXXVII.

(287.) *Trouver la valeur de la plus grande impression, dans le cas où la dureté* D *est constante.*

Dans l'instant de la plus grande impression, on a $u-v=0$ (259.): substituant donc cette valeur dans l'expression précédente, & appellant I la plus grande impression, on aura $I = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

COROLLAIRE I.

(288.) Si le corps B étoit immobile, il n'y auroit qu'à supposer $B=\infty$, & $V=0$, & la valeur de la plus grande impression deviendroit, pour ce cas, $I = \frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha(x+z)}{D}$.

COROLLAIRE II.

(289.) Dans les corps qui tombent librement par la seule action de la gravité, on a (52.) $\alpha = 32A$, ou $A = \frac{1}{32}\alpha$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $I = \frac{\frac{1}{64}\alpha U^2+\alpha(x+z)}{D}$. Mais si nous appellons e la hauteur d'où le corps tombe, on aura (52.) $e = \frac{1}{64}U^2$, ou $64e = U^2$. Substituant donc cette valeur de U^2, on aura, pour les corps qui tombent librement par la seule action de la gravité, $I = \frac{\alpha(e+x+z)}{D}$.

COROLLAIRE III.

(290.) Si les quantités x & z étoient assez petites pour être négligeables à l'égard de e, on auroit $I = \frac{\alpha e}{D} = \frac{\alpha U^2}{64D}$; ou, en mettant pour α sa valeur $32A$, $I = \frac{32Ae}{D} = \frac{AU^2}{2D}$. Donc les impressions faites par les corps qui tombent par l'action de la gravité, sont en raison directe composée des corps & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raison directe composée des corps & des quarrés des vîtesses primitives avec lesquelles ils choquent, & en raison inverse des duretés, ou densités.

Scolie I.

(291.) Ces formules ſont parfaitement d'accord avec l'expérience. Pour s'en convaincre, il ne faut que conſulter les Ouvrages des Auteurs qui ont écrit ſur la Phyſique Expérimentale. Le Docteur *'s Graveſande*, dans le 1er. volume de ſon Ouvrage intitulé, *Phyſices Elementa Mathematica*, décrit (§. 833.) une machine pour faire tomber avec préciſion différentes ſphéres de cuivre ſur de l'argille.* Dans la troiſieme expérience, il en fait tomber trois de même diametre, mais d'un poids différent, en ayant fait deux creuſes : leurs poids étoient entre eux comme 1, 2 & 3. La hauteur de la chûte de ces trois ſpheres étoit de 9 pouces; & les impreſſions qu'elles firent, ſe trouverent auſſi comme 1, 2 & 3. Dans la dixieme expérience, (§. 855.), il fit tomber les deux plus peſantes, de 18 pouces de hauteur, & trouva que leurs impreſſions étoient comme 4 à 6, c'eſt-à-dire, doubles des premieres. On voit par-là qu'en effet les impreſſions ſont en raiſon compoſée des poids, ou maſſes, & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raiſon compoſée des poids, ou maſſes, & des quarrés des vîteſſes primitives.

Corollaire IV.

(292.) Si les deux corps qui ſe choquent, étoient égaux & que, dans le choc, ils ne fuſſent animés par aucune puiſſance, on auroit $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$; ce qui réduit la valeur de l'impreſſion (287.) à $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$; & dans le cas de $V = 0$, à $I = \frac{AU^2}{4D}$. On voit donc, comme ci deſſus, que les impreſſions ſont en raiſon directe compoſée des poids, ou des maſſes, & des quarrés des vîteſſes avec leſquelles ils ſe choquent, & en raiſon inverſe des duretés.

---

* Nous traduiſons le mot *Greda* par le mot *Argille*, quoique, d'après l'autorité des différents Dictionnaires que nous avons été à même de conſulter, ce mot ſignifie proprement de la *Craie*. Nous nous ſommes crus fondés à faire cette correction, parce que les expériences du Docteur *'s Graveſande*, dont il eſt ici queſtion, ont été réellement faites en laiſſant tomber les ſpheres de cuivre ſur de l'argille, telle que celle dont ſe ſervent les Potiers pour leurs ouvrages du plus bas prix. Ce ſçavant la prefere aux autres; voici comment il s'exprime dans le §. 821 de l'Ouvrage cité. *Argillâ omnium maximè commodè adhibetur; ſed illam ex quibus vaſa fictilia, maximè vulgaris, & vilioris pretii, efficiuntur, eligimus. Hæc pura deſideratur, & admixtâ aquâ ita temperanda eſt, ut quidem inquinet manus, non autem adhæreat..... Ubi maſſa ex tali Argillâ flectitur, fatiſcit, & in quibuſdam locis ſeparatio partium datur; quando hanc habet proprietatem, partes quæ intropremuntur, dum cedunt, inter adjacentes penetrant.* Et dans le §. 822. *Si aliam argillam magis albam, & ad naturam cretæ accedentem, adhibeamus, non facilè fatiſcit, & partes etiam inter adjacentes penetrant, dum cedunt; ſed has potiùs removent; quod pro diverſâ naturâ Argillæ diverſimodè contingit. Hac de ſolâ cauſâ Argillâ, primùm indicatâ, utor; quia quid huic contingere debeat ratiocinio detegere poſſumus; effectus omnes fixis regulis ſubjiciuntur, prævideri poſſunt, & experimenta ratiocinia confirmant*, &c. &c.

PLANC. II

SCOLIE II.

(293.) Ceci eſt encore confirmé par pluſieurs autres expériences que le Docteur *'s Graveſande* expoſe dans l'endroit cité, & dont il déduit que les effets étant proportionnels aux cauſes, & les mêmes effets aux impreſſions, il eſt néceſſaire que les cauſes qu'il prétend avec *Leibnitz* être les *forces vives*, ſoient auſſi en raiſon composée des maſſes & des quarrés des viteſſes. *

SCOLIE III.

(294.) Puiſque l'expérience s'accorde avec nos formules, non-ſeulement dans le cas des corps mous comme l'argille, mais encore dans celui des corps durs & élaſtiques, lorſque la dureté D eſt conſtante ; il eſt évident que, dans ces cas, la dureté a été au moins ſenſiblement conſtante, & que nous pouvons la ſuppoſer telle. On voit encore, par la conformité de l'expérience avec le calcul, dans lequel nous avons ſuppoſé l'impreſſion de la même figure ſphérique que le corps choquant A; on voit, dis-je, qu'il eſt évident, au moins dans les corps mous tels que l'argille, que, dans ces cas, le creux, ou l'enfoncement latéral HFE, n'a pas eu lieu. Cependant cet enfoncement ne peut manquer d'exiſter dans des corps plus Fig. [illegible]
élaſtiques : il exiſte même dans les corps mous comme l'argille, ſuivant le Docteur *'s Graveſande*, §. 824, lorſque l'amplitude de l'impreſſion eſt très-grande relativement à ſa profondeur, parce que, dans ce cas, les raiſons ſur leſquelles il s'eſt fondé, ne peuvent avoir lieu ; car, de quelque nature que ſoit l'argille, ſes particules cedent latéralement ; ** ce qui prouve que le creux, ou l'enfoncement latéral ſe forme même dans les corps mous, pourvu que la figure du corps choquant ne ſoit pas telle que ſon amplitude augmente par degrés.

PROPOSITION XXXVIII.

(295.) *Déterminer la profondeur de l'impreſſion, dans le cas où l'on auroit* H = Qx ; Q *déſignant une quantité conſtante.*

Si l'on ſubſtitue Qx pour H dans l'équation $\int H dx = \ldots\ldots \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$ (286.) ; & ſi enſuite on integre,

---

* *Voyez*, ſur la meſure des *forces vives*, les Ouvrages cités dans la note de la page 60, ſur-tout la Préface du *Traité de Dynamique* de M. *d'Alembert* ; voyez auſſi la 4e. partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bézout*, *Art.* 388.

** Voici ce §. 824. *Si cavitatis latitudo magna ſit reſpectu profunditatis, ratiocinia in hac ipſa Argilla* (celle qu'il avoit adoptée) *locum non habent ; quia in hoc caſu, quæcumque ſit natura Argillæ, facilè partes lateraliter cedunt, & pars tantùm cavitatis, harum introceſſioni, tribuenda eſt.*

on aura $\frac{1}{2}Qx^2 = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$. Or, dans la supposition de $H=Qx$, on aura aussi $H'=Qz$ *, & l'équation $DHdx = D'H'dz$ (276.) se réduira à $DQxdx = D'Qzdz$, d'où l'on tire, en divisant par Q, & intégrant, $Dx^2 = D'z^2$, & $z = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{D'^{\frac{1}{2}}}x$. Si l'on substitue maintenant cette valeur de z dans l'équation, il en résultera $\frac{1}{2}Qx^2 = \frac{\frac{1}{2}ABD'^{\frac{1}{2}}((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})x}{DD'^{\frac{1}{2}}(A+B)}$, &, en dégageant x, on a

$$x = \frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)} \pm \left(\frac{((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}}))^2}{(DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B))^2} + \frac{AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE I.

(296.) Dans le cas de la plus grande profondeur, ou impression, on a $u-v=0$ (259.); donc on aura la plus grande profondeur . . . .

$$x = \frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)} \pm \left(\frac{((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}}))^2}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)} + \frac{AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE II.

(297.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, la plus grande profondeur x seroit $= \frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q} \pm \left(\left(\frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q}\right)^2 + \frac{AU^2}{DQ}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(298.) Si, outre cela, on avoit aussi $U=0$, la plus grande x seroit alors $= \frac{2\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q}$; c'est-à-dire, en raison directe simple de la puissance α, qui agit sur le corps A.

PROPOSITION XXXIX.

(299.) *Déterminer la profondeur de l'impression, dans le cas où π est constante.*

Qu'on suppose $\pi(A+B) = \frac{DHD'H'}{DH+D'H'}(A+B) = n(\alpha B-\beta A)$, n désignant un nombre quelconque; puisque, dans la supposition présente, DH & $D'H'$ sont des quantités constantes, l'équation (275.) $DHdx = D'H'dz$, donnera, en intégrant, $DHx = D'H'z$, d'où l'on tire $D'H' = \frac{DHx}{z}$. Substituant cette valeur dans la premiere équa-

* Est-il bien certain que si $H=Qx$, on doive en inferer que $H'=Qz$? Nous croyons qu'on peut en douter. Quoiqu'il semble que cela dérive de la supposition qu'on a faite que les duretés sont constantes; cependant il ne nous paroît pas certain qu'on en puisse conclure avec l'évidence mathématique, que si la raison de H à x est Q, celle de H' à z soit aussi Q.

tion, on aura $\frac{DHx(A+B)}{x+z}=n(\alpha B-\beta A)$, ce qui donne ..... $Hx=\frac{n(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}=(286.)\frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$, d'où l'on déduit $x+z=\frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{(n-1)(\alpha B-\beta A)}$; ou en substituant $\frac{\pi(A+B)}{\alpha B-\beta A}$ à la place de n, $x+z=\frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

COROLLAIRE I.

(300.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit $x+z=\frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi-\alpha}$.

COROLLAIRE II.

(301.) Dans le cas de la plus grande impression, on a $u-v=0$: on aura donc, pour ce cas, $x+z=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

COROLLAIRE III.

(302.) Il n'y a donc point alors de plus grande impression, ou, ce qui est la même chose, l'impression n'a point de limite, à moins que $\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)$ ne soit positif, ou que l'on n'ait $\pi(A+B)>\alpha B-\beta A$.

COROLLAIRE IV.

(303.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit la plus grande profondeur $x+z=\frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi-\alpha}$.

PROPOSITION XL.

(304.) *Trouver la valeur de la dureté* D.

Puisque la dureté D a été trouvée constante, ou sensiblement constante, l'équation de *l'Art.* 276 se réduira à .... $(\alpha B-\beta A)(x+z)-D(A+B)\int Hdx=\frac{1}{2}AB((u-v)^2-(U-V)^2)$; d'où l'on tire $D=\frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)\int Hdx}$; & pour le cas de plus grande impression, dans lequel on a $u-v=0$, on aura $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)I}$.

COROLLAIRE I.

(305.) Si l'on avoit $B=\infty$, & $V=0$, comme dans les expériences, rapportées ci-dessus, faites sur l'argille par le Docteur *'s Gravesande*, on auroit $D=\frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha x}{I}=\frac{\alpha(c+x)}{I}$.

SCOLIE

PLANC. A.

(306) Prenons, pour exemple, la premiere expérience, rapportée ci-dessus (291.), dans laquelle on faisoit tomber la sphere la moins pesante de 9 pouces de hauteur, & dans laquelle on a trouvé le diametre de l'impression de $\frac{65}{800}$ *, celui de la sphere étant de $\frac{1}{8}$. Delà on déduit la valeur de $x = \frac{100-(10000-65.65)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$. Celle de $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$; c marquant la circonférence, dont le diametre est

* Les trois spheres avec lesquelles le Docteur 's *Gravesande* a fait ses expériences, avoient 1 pouce $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$ de pied, de diametre (*Physices Elementa mathematica*, §. 833.). Lorsqu'il laissoit tomber la sphere la moins pesante de la hauteur de 9 pouces, ou $\frac{3}{4}$ de pied, elle faisoit une impression sur l'argille, dont le diametre étoit de $\frac{65}{100}$ de celui de la sphere; c'est-à-dire, de $\frac{65}{800}$ de pied (*Ibid.* 855.). Il est aisé, d'après ces données, de concevoir les calculs de ce Scolie. Soit A la sphere, ou le corps choquant de l'expérience citée, AR le corps choqué, ou l'argille sur laquelle on faisoit tomber la sphere A: soit nommé $2a$ le diametre SP de la sphere, $2y$ le diametre GI de l'impression qu'elle formoit sur l'argille, & x la profondeur PK de la même impression, ou la fleche du segment $GPIK$; on aura $a = \frac{1}{16}$, & $y = \frac{65}{1600}$. Ceci posé, par la propriété du cercle $yy = 2ax - xx$, donc $x = a \pm (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$,

FIG. 1.

ou simplement $x = a - (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, puisque, dans le cas dont il s'agit ici, il est évident qu'on a $x < a$. Substituant, dans cette équation, à la place des lettres leurs valeurs numériques, on a $x = \frac{1}{16} - \left(\frac{10000-65.65}{(1600)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{100-(10000-65.65)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$.

La valeur de I, ou de la plus grande impression, est la solidité du segment $GPIK$: pour la calculer, je représente par c la circonférence du cercle dont le diametre est l'unité, alors $2cy$ sera la circonférence qui termine l'impression, & dont $GI = 2y$ est le diametre; $2cy \cdot \frac{y}{2} = cy^2$ en sera la surface; & cy^2dx sera un des éléments de la solidité de la sphere. Substituant pour yy sa valeur $2ax - xx$, cet élément devient $2acxdx - cx^2dx$, & en intégrant, on aura la solidité d'un segment quelconque de la sphere $= \int(2acxdx - cx^2dx) = acx^2 - \frac{1}{3}cx^3 = cx^2(a - \frac{1}{3}x)$. Si l'on fait $x = 2a$, on aura la solidité de la sphere entiere $= 4ca^2(\frac{1}{3}a) = ca^2(\frac{4}{3}a) = \frac{4ca^3}{3}$. Remarquons en passant que l'expression générale que nous venons de trouver, étant traduite en langage ordinaire, fait voir que *la solidité d'un segment sphérique, est égale à celle d'un cylindre dont le rayon de la base est la fleche du segment, & dont la hauteur est le rayon de la sphere moins le tiers de la fleche.* Mettant pour a sa valeur $\frac{1}{16}$, on a $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$. Faisant la même substitution dans la solidité de la sphere, elle devient $\frac{4c}{3.16.16.16}$: mais comme il s'agit ici de la sphere la moins pesante, qui n'est que le tiers de la plus pesante (291), il faut prendre le tiers de cette expression, & on aura $\frac{4c}{9.16.16.16}$ pour cette solidité. Il est évident qu'on peut prendre cette quantité pour représenter A, puisque l'auteur n'a en vue ici que de trouver l'expression de la dureté des spheres que le Docteur 's *Gravesande* a soumises à l'expérience, & de faire voir que toutes les expériences donnent le même résultat: car ces spheres étant d'une même matiere, elles ont leurs masses proportionnelles à leurs volumes. Mais s'il s'agissoit de comparer les duretés de plusieurs spheres de différentes matieres, il seroit absolument nécessaire de prendre pour A le poids absolu de chacune, parce que les poids sont proportionnels aux masses, au lieu que les volumes ne le sont pas. Les calculs du reste de ce Scolie sont si aisés, d'après ce que nous venons de dire, que nous ne croyons pas nécessaire de nous y arrêter plus long temps. Notre résultat est différent de celui de l'Auteur qui donne $D = 200\,\frac{3600}{9936}$; mais il est évident qu'il y a une faute dans l'original.

l'unité. Celle de A, qui est la masse totale de la sphere $= \frac{4c}{9.16.16.16}$, ce qui donne $\alpha = \frac{4.32.c}{9.16.16.16}$ (290.). Ces valeurs de α & de I étant substituées dans l'équation $D = \frac{\alpha(c+x)}{I}$, donnent $D = \frac{c+x}{6x^2(3-16x)} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{200}}{\frac{6.9}{40000}(3-\frac{48}{200})} = 205\frac{1040}{1312}$. On aura le même résultat, à quelques petites différences près, en calculant d'après les autres expériences. On trouvera de la même maniere la valeur de D, avec quelque matiere qu'on fasse les expériences.

COROLLAIRE II.

(307.) Ayant trouvé la valeur de D par l'équation .... $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)I}$, on trouvera de même celle de D': car ayant $D\int Hdx = D'\int H'dz$, ou $DI = D'I'$, I' marquant la grandeur de la plus grande impression faite dans le corps A, on aura $D' = \frac{DI}{I'}$. Calculant donc, d'après l'expérience, la valeur de I', on aura celle de D'.

PROPOSITION XLI.

(308.) *La plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'acheve l'impression totale.*

A l'instant de l'action de la plus grande force de percussion, la différencielle de π, ou de son égale $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$ est $=0$; c'est-à-dire que $\frac{H'dH}{DH+D'H'} + \frac{HdH'}{DH+D'H'} - \frac{HH'(DdH+D'dH')}{(DH+D'H')^2} = 0$; ou en réduisant, . . . $D'H'^2dH + DH^2dH' = 0$; mais cette quantité ne peut être zéro, sans que les différencielles dH & dH' ne soient aussi zéro; c'est-à-dire, sans que les amplitudes H & H', ou les impressions, n'aient reçu toute l'augmentation qu'elles peuvent avoir. Donc la plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'acheve l'impression totale.

PROPOSITION XLII.

(309.) *Trouver l'expression de la force de percussion* π.

La force de percussion, à quelque instant du choc que ce soit, est $\pi = \frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$. Substituant, dans cette équation, la valeur de $D' = \frac{DI}{I'}$ (307.), on aura $\pi = \frac{D^2HIH'}{I'\left(DH+\frac{DIH'}{I'}\right)} = \frac{DHIH'}{HI'+H'I}$. Substituant main-

tenant, dans cette équation, la valeur de $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{(A+B)I}$ (304), & on aura $\pi = \frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{A+B}\right)$. *

SCOLIE.

(310.) On sçait déjà que les quantités I & I' expriment les plus grandes impressions; mais on doit remarquer que les x & z sont aussi les profondeurs des plus grandes impressions, puisque ces quantités sont introduites dans la valeur de π, par la substitution de la valeur de D, prise pour le cas de la plus grande impression (304.). Les quantité H & H' sont donc les seules qu'on doive regarder comme variables dans cette équation, pour obtenir les différentes valeurs de la force π.

COROLLAIRE I.

(311.) La plus grande force de percussion étant celle qui a lieu, lorsque les quantités H & H' parviennent à leur plus grande valeur, il s'ensuit qu'en mettant dans l'équation les plus grandes valeurs de H & H', on aura la plus grande force de percussion.

COROLLAIRE II.

(312.) Dans le cas où $B=\infty$, $V=0$, & $\frac{D}{D'}=0$, d'où il résulte $I'=0$, & $z=0$ **, on aura $\pi=\frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2+\alpha x)$: & dans la chûte des corps par la seule action de la gravité, où l'on a $\frac{1}{2}AU^2=\alpha e$ (46.), $\pi=\frac{H\alpha}{I}(e+x)$.

COROLLAIRE III.

(313.) La force de gravité sera donc à celle de percussion, comme α est à $\frac{H\alpha}{I}(e+x)$, ou comme 1 est à $\frac{H}{I}(e+x)$; ou enfin comme I est à $H(e+x)$.

---

* On pourroit penser que cette valeur de π seroit celle de la plus grande force de percussion, puisqu'on l'obtient en y introduisant la valeur de D prise dans le cas de la plus grande impression, qui concourt avec celui de la plus grande force de percussion (308). Mais il faut remarquer qu'ayant supposé la dureté D constante, on auroit la même valeur pour π, en substituant une valeur de D prise dans une autre circonstance que celle de la plus grande impression, en ayant attention à prendre la valeur de l'impression & de sa profondeur qui correspondent à ce cas. Ainsi cette valeur de π ne peut exprimer la plus grande force de percussion, que dans le cas où H & H' seroient les amplitudes de la plus grande impression.

** On voit facilement que pour avoir $\frac{D}{D'}=0$, il faut que la dureté du corps A soit infinie à l'égard de celle du corps B; alors il est évident que la plus grande impression I', & sa profondeur z faite dans le corps A, sont chacune $=0$.

SCOLIE I.

(314.) Dans les expériences du Docteur *'s Gravesande* sur l'argille, on a $H = cx(\frac{1}{8} - x)$;* & (306. *Voyez aussi la note de cet Art.*) $I = cx^2(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x)$: donc on aura $\frac{H}{I} = \frac{cx(\frac{1}{8} - x)}{cx^2(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x)} = \frac{\frac{1}{8} - x}{x(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x)}$; d'où il suit que la force de la gravité est à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(e+x)(\frac{1}{8} - x)}{x(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x)}$ (313.). Dans la premiere expérience, on avoit $e = \frac{3}{4}$, & l'on a trouvé $x = \frac{3}{200}$. Donc la force de gravité étoit à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(\frac{3}{4} + \frac{3}{200})(\frac{1}{8} - \frac{3}{200})}{\frac{3}{200}(\frac{1}{16} - \frac{1}{200})}$; ou comme 1 est à $97\frac{13}{23}$; de sorte que la force de percussion, quoique dans un corps mou comme l'argille, & la sphere tombant seulement de 9 pouces de hauteur, étoit plus de 97 fois plus grande que celle de la gravité.

COROLLAIRE IV.

(315.) Si $B = \infty$, $V = 0$, & $D = D'$, & qu'on ait à-peu-près $H = H'$, $I = I'$, $z = x$, on aura $\pi = \frac{H}{2I}(\frac{1}{2}AU^2 + 2ax)$; & dans la chûte des corps qui tombent par la gravité, $\pi = \frac{Ha}{2I}(e + 2x)$.

COROLLAIRE V.

(316.) La force de gravité sera donc, dans ce cas, à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{H}{2I}(e + 2x)$.

SCOLIE II.

(317.) Lorsque deux corps très-durs, comme le sont deux corps de fer, viennent à se choquer, l'impression I qui se fait dans chacun, est presque infiniment petite par rapport à $H(e + 2x)$: donc, dans ce cas, la force de percussion est presque infinie, à l'égard de celle de gravité. Prenons pour exemple le coup d'un marteau sur une enclume. Puisque I représente la grandeur de l'impression, qui doit être comme le produit de H, qui est son amplitude, par une quantité proportionnelle à sa profondeur, que nous sçavons par l'expérience être extrêmement petite, nous pouvons supposer $I = H . \frac{1}{k}$, k exprimant un nombre quelconque, tel que $\frac{1}{k}$, soit

---

* H designe l'amplitude de l'impression, ou la surface du cercle qui termine l'impression (247). Or, par la note de l'*article* 306, cette surface est cy^2, qui devient $cx(\frac{1}{8} - x)$ en substituant pour y^2 sa valeur $2ax - xx$, & ensuite pour a sa valeur $\frac{1}{8}$. Le résultat des calculs de ce Scolie est encore erronné ; l'Auteur fait la force de gravité à celle de percussion dans le rapport de 1 à $109\frac{76}{363}$. Il est visible que c'est une faute de calcul.

PLANC. I. encore moindre que la profondeur de l'impression, * qui, lorsqu'elle est la plus grande, ne peut gueres être que de $\frac{1}{15000}$, ou $\frac{1}{12000}$ de pied. Cette valeur de I étant donc substituée dans l'expression, on trouvera que la force de gravité est à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{H}{2H \cdot \frac{1}{k}}(c+2x) = \frac{1}{2}k(c+2x)$; ou, négligeant x, comme étant très-petite, comme 1 est à $\frac{1}{2}kc$. Maintenant si la vîtesse du marteau est équivalente à celle qu'il prendroit en tombant librement de 10 pieds de hauteur; & si nous faisons seulement $k = 12000$, on aura la force de gravité du marteau à celle de percussion du même marteau, comme 1 à 60000; c'est-à-dire que cette derniere force sera 60000 fois plus grande que celle de la gravité; & que l'effet du marteau équivaudra à celui que pourroit causer, sur le même point où s'est donné le coup, un poids 60000 fois plus grand que celui du marteau. Ceci suffit déjà pour ne pas être étonné de l'effet prodigieux de la force de percussion.

SCOLIE III.

FIG. 25. (318.) Cette théorie peut aussi s'appliquer aux cordes; car si l'on imagine que l'une des extrêmités d'une corde soit attachée à un point fixe E, & qu'il y ait à l'autre extrémité un poids A; si on laisse tomber ce poids d'une hauteur quelconque, il est clair que l'action qu'il exerce à la fin de sa chûte, lorsque la corde est étendue dans toute sa longueur, comme en EF, est une véritable percussion. Pour appliquer les mêmes formules à ce cas, H désignera la section perpendiculaire à la corde; D la qualité de la matiere dont elle est faite, ou sa force; I le produit de H par la plus grande quantité dont la corde s'allonge dans l'action; & enfin x la quantité dont elle s'allonge dans un cas quelconque. On remarquera, en outre, que le point fixe E, étant celui sur lequel s'exerce l'action, doit être considéré comme un corps infini: on aura donc $B = \infty$, $V = 0$, $\frac{D}{D'} = 0$, $I' = 0$, & $z = 0$. Ainsi la formule qui convient à ce cas est (312.) $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU + ax)$; U désignant la vîtesse du corps A à l'instant qu'il parvient au point le plus bas de sa chûte; ou bien, en supposant $I = HX$, X marquant

* Ceci suppose que l'impression est moins étendue dans le fond qu'à la surface, ce qui a toujours lieu (252 & 294.). Si l'amplitude étoit la même dans toute la profondeur de l'impression, ce qui ne peut avoir lieu dans les corps durs & tenaces, alors $\frac{1}{k}$ seroit égal à la profondeur de l'impression.

toute la quantité dont la corde peut s'allonger jusqu'à ce qu'elle se rompe, ou qu'elle soit sur le point de se rompre, $\pi = \frac{1}{X}(\frac{1}{2}AU^2 + ax)$; & lorsqu'il s'agit de la chûte des corps qui tombent par l'action seule de la gravité, cette équation devient $\pi = \frac{a}{X}(e+x)$.

Lorsque le corps *A* est seulement suspendu à la corde, pour qu'elle le soutienne, sans qu'il y ait aucune chûte, $e=0$; donc, dans ce cas, $\pi = \frac{ax}{X}$; & si le poids du corps *A* étoit tel qu'il s'en fallût infiniment peu qu'il ne fît rompre la corde, on auroit $x=X$, & $\pi=a$; c'est-à-dire que la force de percussion, qui, dans ce cas, est une force de pression, est égale au poids du corps, que nous pouvons appeller *P*. Soit nommé *p* le plus grand poids dont la même corde puisse supporter l'action, en supposant qu'il tombe de la hauteur *e*; comme cette force de résistance dans la corde est constante, nous aurons $P = \frac{p}{X}(e+X)$ pour le point précis de sa rupture, ou pour celui où elle est infiniment près de se rompre dans la chûte du corps *p* *; c'est-à-dire que le poids *p* qui, par sa chûte de la hauteur *e*, auroit précisément la force nécessaire pour rompre la corde, est donné par l'équation $p = \frac{PX}{e+X}$. La quantité *X* est proportionnelle à la longueur de la corde, puisque chacune de ses parties s'allonge proportionnellement. Donc si nous exprimons par *l* la longueur de la corde, & par $\frac{1}{n}$, le rapport suivant lequel elle s'allonge relativement à sa longueur, on aura $X = \frac{l}{n}$, & $p = \frac{P\frac{l}{n}}{e+\frac{l}{n}} = \frac{Pl}{ne+l}$.

On ne doit pas entendre ici, par l'allongement d'une corde, la quantité dont elle s'allonge effectivement aux premiers efforts qu'elle fait lorsqu'elle est neuve; mais l'allongement dont elle est susceptible, depuis l'état où elle se trouve après s'être rétablie, ayant supporté ces premiers efforts, & qu'elle vient à s'allonger de nouveau par l'action d'une puissance; cet allongement n'étant réellement que la quantité dont la corde raccourcit, en revenant dans sa longueur ordinaire, par l'effet de son élasticité naturelle.

* Cette équation suit naturellement de ce que, dans la rupture de la corde par la seule suspension du poids *P*, on a $\pi=a=P$; & que, dans le cas de la même rupture par la chûte du corps *p* de la hauteur *e*, on $a=p$; ce qui donne $\pi = \frac{p}{X}(e+X)$. Or, comme la résistance dont la corde est capable jusqu'à sa rupture, est constante, de quelque maniere que cette rupture se fasse, on a la puissance π, qui produit cet effet dans le premier cas, égale à la puissance π qui le produit dans le second, ou $P = \frac{p}{X}(e+X)$.

On sçait par l'expérience qu'une corde de chanvre, de 3 pouces de circonférence, peut soutenir, lorsqu'elle est bien faite, jusqu'à la charge de 65 quintaux, & qu'en ce cas elle s'allonge de $\frac{1}{10}$. On aura donc $P=65$, & $\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$, ou $n=10$, ce qui donne $P=\frac{65l}{10e+l}$. Si l'on suppose donc que la corde ait 100 pieds de longueur, & qu'on laisse tomber le poids p qui lui est attaché, de cette même hauteur de 100 pieds, on aura $p=\frac{6500}{1000+100}=\frac{65}{11}=5$ quintaux $\frac{10}{11}$; c'est le moindre poids qui puisse faire rompre la corde *. On voit, par la formule, & par tout ce que nous venons de dire, que plus la corde sera longue, plus elle résistera dans la percussion; ou, comme disent les Marins Espagnols, dans *l'Estrechon* : car si, au lieu de 100 pieds de longueur, la corde en avoit seulement 50, on auroit $p=\frac{65\cdot 50}{1000+50}=\frac{65}{21}=3$ quintaux $\frac{2}{21}$; ce poids tombant de la même hauteur de 100 pieds, feroit suffisant pour rompre la corde.

PROPOSITION XLIII.

(319.) *Trouver le temps de la durée du choc.*

Ayant vu (258.) que $dt=\frac{dx+dz}{u-v}$, & (277.) que $u-v=\ldots$ $\pm\left((U-V)^2+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB}-\frac{(A+B)D\int Hdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura, en substituant cette valeur dans l'équation précédente, ...

$$dt=\frac{dx+dz}{\pm\left((U-V)^2+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB}-\frac{(A+B)D\int Hdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

; ou en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\left(\frac{\frac{1}{2}AB}{(A+B)D}\right)^{\frac{1}{2}}$, ...

$$dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}(dx+dz)}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

COROLLAIRE I.

(320.) Dans le cas où l'on auroit à très-peu près $z=0$, & $dz=0$, on auroit

$$dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

---

* Ce poids est le moindre qui puisse faire rompre la corde lorsqu'on le fait tomber de la hauteur de 100 pieds; mais si on le faisoit tomber d'une hauteur plus considérable, ce qui pourroit avoir lieu, dans la supposition présente, en disposant le point de suspension de maniere qu'il ne gênât pas le corps dans sa chûte; alors e pourroit être $=2l$, & il est évident que p pourroit alors n'être que de 3 quintaux $\frac{2}{21}$: c'est le moindre poids possible qui puisse faire rompre la corde.

COROLLAIRE II.

(321.) Dans le cas où $z=x$, & $dz=dx$, on a . . . . :

$$dt=\frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

COROLLAIRE III.

(322.) Pour déduire de ce second cas le précédent, il ne sera donc nécessaire que de diviser par 2 le terme dans lequel se trouve $\alpha B-\beta A$, & de diviser ensuite toute l'expression du temps, pareillement par 2.

SCOLIE.

(323.) Il ne reste donc qu'à intégrer pour avoir la valeur de t. Cette opération dépend de la valeur qu'on donnera à H, & celle-ci dépend de la figure, de la disposition, & de la dureté réciproque des deux corps choqués. Pour cela nous pouvons supposer $\int Hdx$ égale à une fonction quelconque de x avec des constantes; car quoiqu'il ne soit pas possible que cette supposition convienne à tous les corps, il s'en trouvera toujours un, ou quelques-uns auxquels elle correspondra.

PROPOSITION XLIV.

(324.) *Trouver la valeur de la durée du choc, en supposant* $\int Hdx=Qx^2$, $z=x$, & $dz=dx$; Q *étant une constante.*

L'équation de *l'Art.* 319 se réduit, dans ce cas, à . . . . . . :

$$dt=\frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-Qx^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

: ou, en divisant le numérateur & le dénominateur par $Q^{\frac{1}{2}}$, à $dt=\frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{QD(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Faisant, dans cette expression, $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{Q^2D^2(A+B)^2}=R^2$, on aura $dt=\frac{\left(\frac{2AB}{R^2QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}Rdx}{\left(R^2-\left(x-\frac{(\alpha B-\beta A)}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; & en intégrant, on trouvera $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}+Arc\,sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$, pour le temps dans lequel se forme, ou augmente, l'impression; & . . . .

$$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+\text{Arc fin}\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}-\text{Arc fin}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right),$$

pour le temps dans lequel l'impression va en diminuant, en comptant pareillement depuis le commencement du choc, C marquant la demi-circonférence d'un cercle, dont le rayon est l'unité. *

COROLLAIRE I.

(325.) Ces deux temps doivent être égaux à l'instant où s'acheve la plus grande impression, puisque ce cas correspond à l'un & à l'autre : donc au moment de la plus grande impression, on aura

$$\text{Arc fin}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)=C-\text{Arc fin}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\ldots\ldots$$

ou $\text{Arc fin}\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)=\frac{1}{2}C$. Substituant cette valeur dans l'une quelconque des deux expressions du temps, on aura, pour tout le

---

* Comme les calculs de cette Proposition pourroient embarrasser quelques Lecteurs, nous allons les développer un peu plus que l'Auteur ne l'a fait.

Le dénominateur de l'expression $dt=\dfrac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{QD(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ contient le quarré de x, & un autre terme affecté de x au premier degré. Si l'on ajoute, & si l'on retranche de ce dénominateur le quarré de la moitié du multiplicateur de x, on n'en changera point la valeur, & il contiendra alors un quarré parfait ; c'est-à-dire que ce dénominateur sera $\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2-\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{QD(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=$ $\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Faisant maintenant ... $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2=R^2$, & substituant dans la valeur de dt, on aura ...

$$dt=\frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(R^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ceci posé, supposons que EI représente un arc quelconque, CI son sinus, & l'arc infiniment petit Ii sa différencielle ; si nous menons ic parallele à CI, & la perpendiculaire Ir, ainsi que le rayon IL, le triangle Iri pourra être considéré comme rectiligne, & semblable au triangle ICL, ce qui donnera $CL : IL :: ri : Ii$. Faisant donc $CI=u$, $IL=r$, l'arc $EI=a$, nous aurons $Ii=da$, $ri=du$, $CL=(IL^2-CI^2)^{\frac{1}{2}}=(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$; par conséquent la proportion précédente se change en celle-ci $(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}} : r :: du : da=\frac{rdu}{(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}$; expression générale de l'élément d'un arc de cercle, dont le sinus $=u$, & le rayon $=r$. Remarquons maintenant que da est également la différencielle de l'arc FI supplément de EI, & que pour cet arc supplémentaire, le sinus CI augmentant de du, l'arc diminue de da ; donc da est alors négative : par conséquent $\frac{rdu}{\pm(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}$ est l'élément d'un arc de cercle, ou de son supplément.

Si l'on multiplie par R un des facteurs du numérateur de la valeur de dt, & si l'on divise

temps

temps que les corps emploient à former la plus grande impression, PLANC. A.

$t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Arc\ sin \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

---

en même temps l'autre facteur aussi par R, cela n'en changera point la valeur, & donnera FIG. 2.

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{R^2 DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} R dx}{\pm\left(R^2 - \left(x - \frac{\alpha B - \beta A}{DQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2AB}{R^2 DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R dx}{\pm\left(R^2 - \left(x - \frac{\alpha B - \beta A}{DQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right);$$

expression dont le second facteur est absolument identique avec $\frac{r du}{\pm(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}$, & par conséquent ce second facteur représente l'élément d'un arc de cercle, dont le sinus est $= x - \frac{\alpha B - \beta A}{DQ(A+B)}$ & le rayon $= R$; ou bien l'élément de son supplément à 180°.

Pour réduire l'expression de cet élément à ce qu'elle seroit, si le rayon du cercle étoit l'unité, il est évident qu'il ne s'agit que de la diviser par R; ou, ce qui revient au même, de diviser son numérateur par R^2, & son dénominateur par R, afin que l'expression du sinus se trouvant aussi divisée par R, la forme nécessaire à l'intégration soit conservée. Faisant donc cette division, & multipliant en même temps le premier facteur de dt par la même quantité R, pour que la valeur de dt ne soit pas changée, nous aurons . . . .

$$dt = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{dx}{R}}{\left(1 - \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right);$$

quantité dont le second facteur représente l'élément d'un arc de cercle, dont le rayon $= 1$, & le sinus $= \frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}$.

Donc, si l'on integre cette équation, on aura $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Arc\ sin\ \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right) + M$. ($M$ représentant la constante qui complette l'intégrale).

Maintenant si l'on considere que cette quantité doit être zéro au commencement du choc; c'est-à-dire, lorsque $x = 0$, & qu'alors $sin\left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$ devient $- sin \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}$, on aura $\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(- Arc\ sin\ \frac{(\alpha B - \beta A)}{RDQ(A+B)}\right) + M = 0$, & par conséquent $M = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Arc\ sin\ \frac{\alpha B - \beta A}{RQD(A+B)}\right)$. Substituant cette quantité dans la valeur de t, on aura enfin $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Arc\ sin\ \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right) + Arc\ sin\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$; c'est la premiere valeur donnée par l'Auteur. Pour trouver la seconde, on se rappellera ce que nous venons de dire, sçavoir, que le second facteur de la valeur de dt, considéré comme affecté du signe $-$, représente l'élément du supplément d'un arc de cercle dont le sinus $= \frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}$; or cet arc a pour expression $C - Arc\ sin\left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, C désignant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$. Intégrant donc l'équation précédente sous ce dernier point de vue, & ajoutant la même constante pour compléter l'intégrale, on aura . . . . $t = \left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + Arc\ sin\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)} - Arc\ sin\ \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$.

On remarquera qu'on a ajouté la même constante dans cette seconde intégration que dans la premiere, afin que le temps t soit toujours compté depuis le commencement du choc, c'est-à-dire, avant qu'il y eût aucune impression de formée. Si l'on avoit cherché une constante

Corollaire II.

(326.) Dans les corps parfaitement élastiques l'impression diminue au point que x devient $=0$: donc, en substituant cette valeur de x dans la seconde équation du temps, on aura, pour l'expression de toute la durée du choc, lorsque les corps sont parfaitement élastiques, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

Corollaire III.

(327.) Il suit des deux Corollaires précédents, que pour les corps parfaitement élastiques, le temps de toute la durée du choc est double de celui qu'ils emploient à former la plus grande impression; ou, ce qui est la même chose, le temps qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit achevée, est égal à celui qui s'écoule depuis le moment de cette plus grande impression, jusqu'à la fin du choc.

Corollaire IV.

(328.) Comme les corps qui n'ont que peu, ou point d'élasticité sensible, terminent leur choc au moment de la plus grande impression, le temps de la durée du choc de ces corps sera donc .... $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RQD(A+B)}\right)$.

Corollaire V.

(329.) Si l'on avoit $\alpha=0$ & $\beta=0$, on auroit pour le temps dans lequel se forme la plus grande impression, ou pour le temps de la durée du choc des corps qui n'ont aucune élasticité sensible, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}C$; & pour celui de la durée du choc des corps d'une élasticité parfaite, ou à très-peu près parfaite, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot C$.

Corollaire VI.

(330.) On voit que la quantité R, qui est l'unique qui contienne

---

particuliere à ce second cas, qui n'a lieu qu'après que la plus grande impression est formée, c'est-à-dire, dans la rétrogradation (277.), on auroit trouvé la même expression que la précédente, mais avec des signes contraires, comme cela doit être; alors t auroit marqué, dans ce second cas, le temps écoulé depuis l'instant où la plus grande impression est achevée jusqu'à la fin du choc; ce qui auroit fait voir aussi que ce temps est le même que celui qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit tout-à fait formée; vérité que l'Auteur démontre plus bas, *Art.* 327. On voit encore clairement que le second temps que nous avons trouvé est plus grand que le premier, comme cela doit être, d'après la théorie de la percussion.

les vîteſſes primitives U & V, ne ſe trouve point dans ces expreſſions du temps ; il faut en conclure que dans les corps qui ſe choquent, ſans être animés par des puiſſances, la durée du choc ne dépend en aucune maniere des vîteſſes avec leſquelles ils ſe choquent ; & cette durée ſera toujours la même, quelles que ſoient ces vîteſſes.

COROLLAIRE VII.

(331.) Si l'impreſſion ſe formoit par la ſeule preſſion, ou action des puiſſances α & β, les vîteſſes U & V étant $=0$, comme il arrive dans les corps peſants, lorſqu'un corps eſt poſé ſur un autre, & le preſſe ſeulement par ſon poids, on auroit $R=\frac{(\alpha B-\beta A)}{DQ(A+B)}$. Cette valeur de R étant ſubſtituée dans les expreſſions du temps $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\text{Arc}\,\text{ſin}\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,\text{Arc}\,\text{ſin}\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, on aura le temps dans lequel ſe forme la plus grande impreſſion, & ſon double, qui eſt celui de toute la durée du choc dans les corps d'une élaſticité parfaite, ou à peu près, lorſque U & $V=0$; & ces expreſſions ſont $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.C$, & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\,2\,C$.

COROLLAIRE VIII.

(332.) Les temps de la durée du choc des corps, lorſqu'ils ne ſont animés que par les puiſſances, ſans le concours d'aucune vîteſſe primitive, ſont donc doubles des temps de la durée du choc des mêmes corps, lorſqu'aucune puiſſance ne les anime, & que ce ſont ſeulement les vîteſſes primitives qui produiſent le choc.

COROLLAIRE IX.

(333.) Comme les expreſſions du temps, dans le cas où les corps ne ſont animés que par l'action des puiſſances, ne renferment point ces puiſſances, il eſt évident que ce temps ſera le même, quelles que ſoient ces puiſſances.

COROLLAIRE X.

(334.) Si nous ſuppoſons la profondeur de la plus grande impreſſion $=X$, on aura $QX^2=I$ (286, 287 & 324.), ce qui donne $Q=\frac{I}{X^2}$; & par conſéquent (304) $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)2X}{(A+B)I}$ * ; d'où

---

* On ne doit pas perdre de vue la ſuppoſition qui a été faite, *Art.* 321, & au commencement de cette Propoſition, *Art.* 324, qui eſt que $x=z$, & par conſéquent que $x+z=2x$, ou que $X+Z=2X$, lorſqu'il s'agit des plus grandes impreſſions.

il résulte $DQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)2X}{X^2}$. Cela posé, prenons l'équation $R^2=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{D^2Q^2(A+B)^2}$, & nous en déduirons $R^2D^2Q^2(A+B)^2=\frac{1}{2}ABDQ(A+B)(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)^2=\frac{\frac{1}{4}A^2B^2(U-V)^4+AB(U-V)^2(\alpha B-\beta A)X+(\alpha B-\beta A)^2X^2}{X^2}$ *, d'où l'on tire $RDQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}{X}$. Substituant ces valeurs de $DQ(A+B)$, & de $RDQ(A+B)$, dans les expressions du temps $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\text{Arc fin}\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$; . . . . & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,\text{Arc fin}\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, elles deviendront . . . .
$t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\text{Arc fin}\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$: &
$t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,\text{Arc fin}\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$.

COROLLAIRE XI.

(335.) Si l'on avoit $\alpha=0$ & $\beta=0$, le temps dans lequel se forme la plus grande impression, seroit $t=\left(\frac{4X^2}{(U-V)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}C=\frac{CX}{U-V}$.

SCOLIE.

(336.) Soit, par exemple, la vitesse respective $U-V$, avec laquelle se choquent deux corps sphériques, d'un pied par seconde. Puisque $C=3,14$, on aura $t=3,14.X$: & si l'on suppose que la profondeur de l'impression faite en eux pendant le choc, soit de $\frac{1}{314}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, t sera $=\frac{1}{100}$ de seconde $=36^{\text{iv}}$; temps véritablement beaucoup trop court pour qu'il puisse jamais être sensible. Si la dureté des deux corps étoit plus grande, l'impression seroit alors moins profonde, & par conséquent le temps plus court; ensorte que si la dureté étoit presque infinie, le temps seroit presque infiniment petit.

COROLLAIRE XII.

(337.) Si les corps agissoient seulement par la pression, c'est-à-dire, seulement par l'action des puissances, on auroit $U=0$ & $V=0$, ou $U-V=0$; ce qui réduit le temps dans lequel se forme la plus grande impression, à $t=\left(\frac{ABX}{(\alpha B-\beta A)}\right)^{\frac{1}{2}}C$**. Si, outre cela, on avoit $B=\infty$,

* Il est très-aisé de voir qu'on trouve cette expression, en mettant dans le second membre de la précédente, pour $DQ(A+B)$ sa valeur, & en réduisant le tout en fraction.

** Car cette expression devient $t=\left(\frac{ABX}{\alpha B-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+\text{Arc fin}(1)\right)=\left(\frac{ABX}{\alpha B-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}}.C$, puisque Arc fin $(1)=\frac{1}{2}C$.

cette expreſſion ſe réduiroit à $t=(\frac{AX}{\alpha})^{\frac{1}{2}}\cdot C$. Mais, dans les corps graves, on a (52.) $A=\frac{1}{32}\alpha$; donc $t=(\frac{1}{32}X)^{\frac{1}{2}}C$. Si donc on ſuppoſe qu'un corps poſé ſur un autre, fait une impreſſion dont la profondeur eſt de $\frac{1}{19,7192}$ *, ou d'un peu plus de $\frac{1}{20}$ de ligne $=\frac{1}{144\cdot 2\cdot 3,14\cdot 3,14}$ de pied, le temps dans lequel ſe formera la plus grande impreſſion ſera $=(\frac{1}{32\cdot 2\cdot 144\cdot 3,14\cdot 3,14})^{\frac{1}{2}}\cdot 3,14=(\frac{1}{8.12})$ de ſeconde, $=37^{iv}\frac{1}{2}$.

COROLLAIRE XIII.

(338.) Si $B=\infty$, & $V=0$, l'expreſſion du temps dans lequel ſe formera la glus grande impreſſion, ſera . . . . $t=(\frac{2AX^2}{\frac{1}{2}AU^2+2\alpha X})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+\text{Arc}\,\text{ſin}\,\frac{\alpha X}{\frac{1}{2}AU^2+\alpha X})$: ou, s'il s'agit des corps graves dans leſquels $A=\frac{1}{32}\alpha$, & $\frac{1}{2}AU^2=\alpha e$ (46.), e exprimant la hauteur d'où doit tomber le corps pour acquérir la viteſſe U, on aura $t=(\frac{X^2}{16(e+2X)})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+\text{Arc}\,\text{ſin}\,\frac{X}{e+X})$.

COROLLAIRE XIV.

(339.) Si X étoit ſuſceptible d'être négligée à l'égard de e, cette expreſſion du temps ſe réduiroit à $t=\frac{cX}{8\sqrt{e}}$. Si donc un corps de fer faiſoit, en tombant ſur une enclume, une impreſſion dont la profondeur fût de $\frac{1}{314}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, le temps qu'il emploiroit à faire cette impreſſion, ſeroit $t=\frac{1}{800\sqrt{e}}$: de ſorte que ſi ce corps étoit tombé de 36 pieds de hauteur, on auroit $t=\frac{1}{4800}=45^{v}$.

COROLLAIRE XV.

(340.) On peut trouver de la même maniere les temps dans leſquels ſe forment les plus grandes impreſſions, dans la ſuppoſition de $z=0$, & $dz=0$; c'eſt-à-dire, dans le cas où l'un des corps ſeroit infiniment dur par rapport à l'autre ; car, par ce qui a été dit (322.), l'expreſſion donnée, *Art.* 334, ſe réduit, pour ce cas, à $t=(\frac{ABX^2}{AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+\text{Arc}\,\text{ſin}\,\frac{(\alpha B-\beta A)X}{AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X})$. Il en ſera de même pour tout autre cas, en intégrant l'expreſſion générale donnée dans l'*Art.* 319.

---

* Le dénominateur de cette fraction eſt le double du quarré de 3,14 ; c'eſt-à-dire qu'il eſt $=2\cdot 3,14\cdot 3,14$.

Plano. I.

Proposition XLV.

(341.) *Trouver le temps de la durée du choc, dans le cas où la force de percussion π seroit constante.*

Ayant trouvé ci-dessus (269.) $(\alpha B-\beta A-\pi(A+B))dt=AB(du-dv)$: en intégrant cette équation (260, *note.*), & divisant par $\alpha B-\beta A-\pi(A+B)$, il en résultera $t=\frac{AB((u-v)-(U-V))}{\alpha B-\beta A-\pi(A+B)}$.

Corollaire I.

(342.) Dans le cas de la plus grande impression, on aura... $t=\frac{-AB(U-V)}{\alpha B-\beta A-\pi(A+B)}=\frac{AB(U-V)}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

Corollaire II.

(343.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, il en résulteroit $t=\frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$; & dans le cas de la plus grande impression, $t=\frac{AU}{\pi-\alpha}$.

Proposition XLVI.

(344.) *Trouver le centre de percussion.*

Supposons le corps divisé en un nombre infini de petits corps, ou considérons-le comme un système composé d'un nombre infini de petits corps A, B, C, &c. liés entre eux, lequel tourne sur un axe quelconque donné & fixe E, avec une vîtesse angulaire déterminée. Supposons encore qu'à chacun des petits corps A, B, C, &c., il y ait une puissance α, β, γ, &c. qui retarde son mouvement, & que toutes ces puissances agissent suivant des directions paralleles DA, FB, GC, &c. Soit de plus P la distance de l'axe au plan parallele au plan directeur qui passe par le centre de gravité; u la vîtesse que perdroit ce centre; A', B', C', &c. les distances EA, EB, EC, &c. de chacun des corps A, B, C, &c. à l'axe; & δ, ϵ, ξ, &c., les angles EAD, EBF, ECG, que ces distances forment avec les directions suivant lesquelles les puissances agissent. (Fig. 26.)

Cela posé, nous aurons $P:u::A':\frac{A'u}{P}$, vîtesse que perdra le corps A dans le sens de la perpendiculaire à EA : par la même raison, $\frac{B'u}{P}$ & $\frac{C'u}{P}$, &c. seront celles que perdront les autres corps sélon les perpendiculaires à EB, EC, &c.; & par conséqnent $\frac{A'u}{P\sin\delta}$, $\frac{B'u}{P\sin\epsilon}$, $\frac{C'u}{P\sin\xi}$, &c. sont les vîtesses que doivent imprimer

les puissaces α, β, γ, *&c.*, pour qu'il en résulte les premieres *. Nous aurons donc (32.) $\alpha t = \frac{AA'u}{P\,\text{sin}\,\delta}$, $\beta t = \frac{BB'u}{P\,\text{sin}\,\epsilon}$, $\gamma t = \frac{CC'u}{P\,\text{sin}\,\xi}$, *&c.* d'où l'on déduit $\alpha = \frac{AA'u}{Pt\,\text{sin}\,\delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{Pt\,\text{sin}\,\epsilon}$, $\gamma = \frac{CC'u}{Pt\,\text{sin}\,\xi}$, *&c.*

Supposons maintenant que x soit la distance de l'axe au plan parallele au plan directeur dans lequel se trouve le centre de percussion. Par cette supposition, $x - A'\,\text{sin}\,\delta$, $x - B'\,\text{sin}\,\epsilon$, $x - C'\,\text{sin}\,\xi$, *&c.* seront les distances de chacunes des puissances à ce même plan; par conséquent les moments de chaqne puissance, relativement au centre de percussion, seront $\frac{AA'u(x - A'\,\text{sin}\,\delta)}{Pt\,\text{sin}\,\delta}$, $\frac{BB'u(x - B'\,\text{sin}\,\epsilon)}{Pt\,\text{sin}\,\epsilon}$, $\frac{CC'u(x - C'\,\text{sin}\,\xi)}{Pt\,\text{sin}\,\xi}$, *&c.*: & pour qu'il n'y ait point de rotation sur ce centre, il faut (138.) que la somme de ces moments soit égale à zéro; ou en divisant par $\frac{u}{Pt}$, il faut qu'on ait $\frac{AA'(x - A'\,\text{sin}\,\delta)}{\text{sin}\,\delta} + \ldots\ldots$ $\frac{BB'(x - B'\,\text{sin}\,\epsilon)}{\text{sin}\,\epsilon} + \frac{CC'(x - C'\,\text{sin}\,\xi)}{\text{sin}\,\xi} + \text{\&c.} = 0$; d'où l'on tire ..... $\frac{AA'x}{\text{sin}\,\delta} + \frac{BB'x}{\text{sin}\,\epsilon} + \frac{CC'x}{\text{sin}\,\xi} + \text{\&c.} = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \text{\&c.}$; & par conséquent $x = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \text{\&c.}}{\frac{AA'}{\text{sin}\,\delta} + \frac{BB'}{\text{sin}\,\epsilon} + \frac{CC'}{\text{sin}\,\xi} + \text{\&c.}}$, distance du centre de percussion au plan directeur qui coïncide avec l'axe.

COROLLAIRE I.

(345.) Le dénominateur $\frac{AA'}{\text{sin}\,\delta} + \frac{BB'}{\text{sin}\,\epsilon} + \frac{CC'}{\text{sin}\,\xi} + \text{\&c.}$ est comme la somme des puissances $\alpha = \frac{AA'u}{Pt\,\text{sin}\,\delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{Pt\,\text{sin}\,\epsilon}$, *&c.*, & le numérateur est comme la somme de leurs moments : donc x sera la distance de l'axe au centre desdites puissances, & par conséquent (104 & 154.) une puissance égale à la somme de toutes les autres, placée au centre de percussion fera le même effet : ensorte que s'il y avoit un obstaplacé au point où se trouve le centre de percussion, la perçussion se feroit entiérement sur lui, & l'équilibre requis auroit lieu.

COROLLAIRE II.

(346.) Si le corps qui tourne étoit un plan coïncidant avec l'axe,

---

* Car la vitesse que peut produire la puissance α, qui tend à retarder le mouvement du corps A suivant la direction DA (75 & 129, *premiere note*), est à la vitesse perpendiculaire à EA qui en résulte :: $1 : \text{sin}\,\delta$. Or cette vitesse perdue perpendiculairement à EA, est $\frac{A'u}{P}$: donc celle que doit imprimer la puissance α, pour que celle-ci ait lieu $= \frac{A'u}{P\,\text{sin}\,\delta}$; & ainsi des autres.

PLANC. I. on auroit $\sin \delta = \sin \epsilon = \sin \xi = \&c.$; & par conséquent ...... $x = \frac{\sin \delta (AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \&c.}{AA' + BB' + CC' + \&c.}$, ou $\frac{x}{\sin \delta} = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \&c.}{AA' + BB' + CC' + \&c.} = (157.)$ $\frac{S}{PM}$, P exprimant la distance de l'axe au centre des masses : donc, dans ce cas (189.), le centre de percussion & celui d'oscillation sont à la même distance de l'axe *.

COROLLAIRE III.

(347.) Si on suppose l'axe à une distance infinie, ce qui est la même chose que de supposer que le corps ne tourne point, comme il arrive dans les corps qui tombent par la seule action de la gravité ; dans ce cas les deux centres coïncideront ensemble, & avec le centre de gravité : car, dans cette supposition, tous les angles δ, ϵ, ξ, &c. sont égaux, & ce cas se réduit à celui qui est donné dans le Corollaire précédent **.

COROLLAIRE IV.

(348.) Dans tout autre cas où les angles δ, ϵ, ξ, &c. ne seroient pas égaux, on n'auroit pas $PM = \frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \&c.$ Donc les deux centres d'oscillation & de percussion ne seroient pas alors à la même distance de l'axe.

COROLLAIRE V.

(349.) Si le corps, au lieu de choquer l'obstacle par son centre de percussion, le choquoit dans un point plus proche de l'axe ; comme si le levier EB, au lieu de choquer l'obstacle par le point F, où l'on suppose qu'est le centre de percussion, le choquoit par le point A ; dans ce cas l'obstacle ne souffriroit que la percussion résultante des moments d'inertie de EA, & autant de la partie AB. L'excès des
FIG. 27. moments de la partie AB sera supporté entiérement par les fibres du levier, de la maniere que nous l'avons expliqué (208.), avec cette seule différence que, dans l'endroit cité, il ne s'agit que de

* Il faut faire attention que $\frac{x}{\sin \delta}$ est la distance du centre de percussion à l'axe fixe, puisque cette distance est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont un des angles $= \delta$, & le côté opposé à cet angle $= x$. Donc $\sin \delta : 1 :: x : \frac{x}{\sin \delta}$.

** D'ailleurs ceci se déduit immédiatement de la formule ; car, dans le cas présent, toutes les distances étant $= A'$, le numérateur & le dénominateur peuvent se diviser par A' : par conséquent la formule se réduit à celle qu'on a trouvée (95.) pour la distance du centre de gravité à un axe quelconque. On voit encore que tous les angles δ, ϵ, ξ sont égaux ; car les lignes AE, BE, CF sont censées paralleles.

l'effet

l'effet d'une seule pression, au lieu qu'il s'agit ici de celui d'une percussion qui, selon les circonstances, peut être beaucoup plus grande, comme on l'a déjà vu. PLANC. A.

SCOLIE.

(350.) Tous les Auteurs (1) qui ont traité cette matiere, ont enseigné, jusqu'à présent, que les centres d'oscillation & de percussion sont toujours les mêmes. Il faut cependant en excepter *Jean Bernoulli*, qui a donné quelques idées qui annoncent qu'il pensoit que cette proposition pouvoit n'être pas généralement vraie.

Pour être absolument convaincu sur ce point, il suffit de considérer que le centre d'oscillation d'un triangle isocelle, qui tourne latéralement autour de son sommet, est éloigné de ce sommet de la quantité $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{4a}$, a marquant la hauteur du triangle, & b sa base, tandis que le centre de percussion en est seulement éloigné de $\frac{3}{4}a$ *.

---

(1) *Christiani Wolfii Elementa Matheseos*, Tom. 1. *Elementa Mechanicae*, Ch. XII, Theor. LXXXI.

Analyse des infiniment petits, par M. Stone, Sect. VII.

Physices Elementa Mathematica, par le Dr. 's Gravesande, T. 1, L 2, Ch. 5, N°. 1080.

Johannis Bernoulli opera omnia, Tom. 4. *Remarques sur l'Analyse des infiniment petits*.

* La formule pour trouver la distance du centre d'oscillation d'un corps quelconque à l'axe fixe, est $\frac{S}{PM}$ (189.), S marquant la somme des moments d'inertie; c'est-à-dire, la somme des produits de chaque particule du corps par le quarré de sa distance à l'axe fixe: P la distance du centre de gravité du corps au même axe; & M la masse du corps. Pour appliquer cette formule à l'exemple que l'Auteur propose, soit le triangle isocelle ABC, tournant latéralement autour de son sommet, c'est-à-dire, autour d'un axe qui passant par son sommet, est perpendiculaire à son plan; & soit nommé a la hauteur BD de ce triangle, & b sa base AC. Pour trouver S, je considere que le moment d'inertie d'une particule quelconque m de ce triangle, c'est-à-dire, de la differencielle dM de sa masse, est $= dM.mB^2$, & par conséquent $\int dM.mB^2 = S$. Maintenant, si, par l'axe fixe, on concoit deux plans EF, BD perpendiculaires entre eux, & si de chaque point m de la masse du corps, ou, dans le cas présent, de la surface du triangle, on abaisse des perpendiculaires mt, mr sur chacun de ces deux plans, il est évident que $mB^2 = mr^2 + mt^2 = mr^2 + rB^2$, & que $dM.mB^2 = dM.mr^2 + dM.rB^2$, & par conséquent $S = \int dM.mr^2 + \int dM.rB^2$; c'est à-dire que, pour avoir S, il faut prendre la somme de tous les moments d'inertie par rapport au plan, ou à l'axe BD, plus, la somme des mêmes moments par rapport au plan, ou à l'axe EF perpendiculaire à BD. FIG. 3.

Pour trouver la premiere somme de moments, soit mené deux lignes infiniment voisines gh, ik, paralleles à BD, soit fait $ik = y$, & $kD = x$: alors $hk = dx$, & $y dx$ représentera la somme de toutes les particules dM comprises dans l'espace differenciel $ghik$, & par conséquent $x^2.ydx$ sera la somme de leurs moments d'inertie; & en intégrant, $\int x^2.ydx$ sera la somme des moments d'inertie du triangle rectangle ADB. Les triangles semblables Aki & ADB donnent $AD : BD :: Ak : ki = \frac{BD.Ak}{AD}$. Substituant à la place de ces lignes leurs valeurs algébriques, on a ki, ou $y = a - \frac{2ax}{b}$, & par conséquent $\int x^2.ydx = \int\left(ax^2dx - \frac{2ax^3dx}{b}\right) = \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^4}{2b}$. Cette intégrale se réduisant à zéro, lorsque $x = 0$, il n'y a point de constante. Si

Ainsi on voit que si b est plus grand que a, le centre d'oscillation tombe hors du triangle, & que par conséquent il est impossible qu'il

---

ajouter ; faisant donc $x = \frac{1}{2}b$, afin d'avoir tous les moments du triangle ADB, on a $\frac{ab^3}{96}$ pour la somme des momens d'inertie de ce triangle.

Si dans la même expression on fait $x = -\frac{1}{2}b$, il est évident qu'on aura la somme des moments d'inertie du second triangle DBC, & cette somme sera $= -\frac{7ab^3}{96}$. Cette derniere somme étant retranchée de la précédente, puisqu'elle appartient à un corps situé de l'autre côté de l'axe BD, on aura la somme totale des moments du triangle ABC par rapport à l'axe BD, ou $\int dM.mr^2 = \frac{ab^3}{12}$.

Pour avoir maintenant la même somme par rapport au plan, ou à l'axe EF, je mene les lignes qf, ps infiniment proches, je fais $qf = y'$, $BO = x'$; en conséquence la somme des particules comprises dans l'espace différenciel $pqfs$ sera $= y'dx'$; & $x'^2.y'dx'$ sera la somme des moments d'inertie de toutes les particules comprises dans cet espace; & l'intégrale $\int x'^2 y'dx'$ sera la somme des moments d'inertie pour tout le triangle ABC. Les paralleles AC, qf, donnent $BD : BO :: AC : qf$, ou $a : x' :: b : y' = \frac{bx'}{a}$; substituant cette valeur de y' dans l'expression précédente, elle devient $\int \frac{bx'^3dx'}{a} = \frac{bx'^4}{a}$. Faisant $x' = a$, on a $\frac{ba^3}{4}$, pour la somme des moments d'inertie de tout le triangle ABC, par rapport au plan, ou à l'axe EF, ou $\int dM.rB^2 = \frac{ba^3}{4}$. Ajoutant donc cette somme de moments avec la précédente, on a $S = \frac{ba^3}{4} + \frac{ab^3}{12} = \frac{3ba^3 + ab^3}{12}$.

Chacun sçait que $P = \frac{2}{3}a$; on peut d'ailleurs le déduire aisément de ce qui a été dit dans l'*Art.* 124. $M = \frac{1}{2}ab$; ainsi $PM = \frac{a^2b}{3} = \frac{4a^2b}{12}$. Donc $\frac{S}{PM} = \frac{3ba^3 + ab^3}{4a^2b} = \frac{3}{4}a + \frac{bb}{4a}$; quantité que l'Auteur donne pour la distance du centre d'oscillation du triangle isocelle ABC à l'axe fixe.

On trouvera, par des procédés absolument semblables, que la distance du centre de percussion au sommet du triangle est de $\frac{3}{4}a$, lorsque la percussion est un *maximum*; ce qui justifie la remarque de notre Auteur. On voit combien il est important, dans la recherche de ces sortes de centres de distinguer les plans mus, ou balancés, sur un axe qui leur est parallele, de ceux qui sont mus, ou balancés, sur un axe qui leur est perpendiculaire, *in latus*, comme dit *Huygens*. Si l'on avoit cherché le centre d'oscillation du triangle autour d'un axe parallele à son plan, tel que l'axe EF, le centre d'oscillation auroit été confondu avec celui de percussion (340.); car alors $S = \frac{ba^3}{4}$ & $\frac{S}{PM} = \frac{3}{4}a$. On remarquera, en passant, que *Descartes* avoit, long-temps auparavant *Huygens*, distingué ces deux sortes d'oscillations. Voyez *ses Lettres* 85, 86 *& suiv. Tome III.*

La principale, & même la seule difficulté de ces sortes de recherches, consiste à trouver la somme des moments d'inertie. Or cette détermination devient très-aisée, lorsque la nature du corps peut être exprimée par des équations. Il faut toujours suivre un procédé analogue à celui que nous venons d'exposer. Les deux formules $\int x^2.ydx$, & $\int x'^2.y'dx'$ sont générales pour tous ces corps, en faisant attention que y & y' ne représentent pas des lignes, lorsqu'il s'agit des solides, mais les surfaces produites par les plans ik, qf paralleles aux plans perpendiculaires BD, EF, qui passent par l'axe de rotation, & que x & x' sont les distances de ces surfaces aux mêmes plans. Appellant donc Y & Y' ces surfaces, les formules générales seront $\int xxYdx$ & $\int x'x'Y'dx$, Si le corps n'est pas susceptible d'être exprimé par des équations, on pourra le diviser en parties, comme des pyramides, des parallélipipedes, &c. & chercher séparément la somme des moments d'inertie de chaque partie; la réunion de ces différentes sommes sera la valeur de S. On remarquera encore que le calcul ne donne pour S qu'une quantité relative au volume, & non à la masse du corps : ainsi lorsqu'il s'agira de comparer ensemble plusieurs mouvements de rotation de corps d'une densité différente, il faudra multiplier la valeur de S trouvée pour chaque corps par la densité de ce corps, qui est toujours relative à celle d'un autre corps (12.)

coïncide avec le centre de percussion ; puisque le triangle ne peut toucher, & par conséquent choquer un obstacle, par un point qui est hors de lui-même. Si nous réduisons le triangle à une moindre hauteur, relativement à sa base, à mesure que cette hauteur diminuera, le centre d'oscillation s'éloignera de plus en plus de l'axe ; tandis que ce sera le contraire du centre de percussion : ensorte que, si la hauteur du triangle devenoit infiniment petite, le centre d'oscillation seroit à une distance infinie de l'axe, tandis que le centre de percussion resteroit toujours à $\frac{1}{4}a$, & par conséquent dans la disposition qui convient pour l'équilibre des moments autour du point où se fait le choc. PLANC. I.

CHAPITRE VII.

Du Mouvement des Corps posés sur des surfaces.

(351.) Nous ferons abstraction, dans ce Chapitre, des impressions qui doivent se former dans les corps, par l'action des puissances qui les compriment, afin que les calculs soient, pour ce moment, plus faciles. Nous supposerons, pour la même raison, que les corps sont également denses, & que les puissances sont appliquées à leurs centres de gravité.

PROPOSITION XLVII.

(352.) *Trouver les espaces que parcourent deux spheres poussées par une puissance.*

Si deux spheres A & B se touchent en D, & que l'une A soit poussée dans la direction AC par la puissance α appliquée à son centre de gravité A, cette sphere ne tournera point (138.), & la puissance α peut être décomposée en deux autres, l'une qui agisse suivant la tangente DE, & l'autre suivant la perpendiculaire AD qui passe par les centres des deux spheres A & B. Nommant Σ l'angle DAE, la puissance qui agit suivant DE sera $= \alpha \sin \Sigma$, & celle qui agit suivant $AD = \alpha \cos \Sigma$. En vertu de cette puissance, dont la direction passe par les centres A & B, la sphere A doit se mouvoir dans la direction AD ; mais elle ne peut le faire sans pousser l'autre sphere B dans la même direction, laquelle passant par son centre B, ne produira, dans cette sphere, aucun mouvement de rotation, mais seulement un mouvement dans la même direction. Les deux spheres suivront donc précisément la direction AB, en vertu FIG. [illegible]

PLANC. I. de la puissance $\alpha \cos \Sigma$, sans pouvoir se déranger d'aucun côté, & doivent parcourir l'une & l'autre l'espace différenciel $\frac{dt\int dt \alpha \cos \Sigma}{A+B}$ (35.). Quant à l'autre puissance $\alpha \sin \Sigma$, elle ne peut agir que sur la sphere *A*, à cause de sa direction parallele à la tangente *DE*, suivant laquelle elle ne peut avoir d'action sur la sphere *B*. Donc l'espace différenciel que parcourra le centre de gravité de la sphere *A*, suivant cette direction, sera $= \frac{dt\int \alpha dt \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE I.

FIG. 29. (353.) Si la sphere *B* est d'une grandeur infinie, sa surface dans le point du contact coïncide avec le plan tangent *DE* : dans ce cas, l'espace différenciel que parcourront les centres de gravité des deux spheres, suivant la perpendiculaire *AD*, sera, comme auparavant, $\frac{dt\int \alpha dt \cos \Sigma}{A+B}$; & celui que parcourra la sphere *A*, suivant la direction de la tangente, ou du plan *DE*, sera $= \frac{dt\int \alpha dt \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE II.

(354.) Si l'on suppose la sphere *B*, non-seulement d'une grandeur infinie, mais encore d'une quantité de matiere, ou d'une masse infinie, l'espace parcouru par son centre de gravité sera $\frac{dt\int dt \alpha \cos \Sigma}{A+\infty} = 0$; d'où l'on voit que, dans ce cas, la surface de la sphere *B*, ou le plan tangent *DE* demeurera immobile ; la sphere *A* n'aura de même aucun mouvement suivant la direction *AD*, & il lui restera seulement le mouvement suivant la tangente, lequel lui fera parcourir l'espace différenciel $= \frac{dt\int \alpha dt \sin \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE III.

(355.) Supposant que la sphere *A* étant posée sur une surface quelconque immobile, plane, ou courbe *BC*, soit animée par la puis-
PLANC. II. sance α, appliquée à son centre de gravité, & agissant suivant la
FIG. 30. direction *EA* ; si l'on mene la tangente, ou le plan tangent *FG* par le point de contact *C*, on peut supposer que ce plan est la surface d'une sphere infinie en grandeur & en masse, sur laquelle est posée l'autre sphere *A* : par conséquent cette derniere sphere n'aura d'autre mouvement que celui suivant la tangente *FG*, en vertu de la puissance $\alpha \sin \Sigma$, Σ exprimant l'angle *AEH* que forme la direction *EA*, avec la perpendiculaire *EH* à la tangente.

COROLLAIRE IV.

(356.) On démontrera la même chose de tout autre point de la surface courbe sur laquelle se trouve la sphere. Ainsi, prenant le point B de la courbe pour l'origine, & les abscisses x sur la ligne BL parallele à la direction EA; & nommant a la longueur de la courbe BC, on aura $CM = dx$; $CN = da$, & le sinus de l'angle $AEH = CNM = \sin \Sigma = \frac{dx}{da}$; d'où il suit que la puissance qui anime la sphere A, suivant la direction de la tangente dans tous les points de la surface courbe sur laquelle elle est posée, ou suivant les espaces différenciels sur lesquels elle se trouve, sera $= \frac{\alpha dx}{da}$.

COROLLAIRE V.

(357.) Supposons que u soit la vîtesse qu'acquiert la sphere dans un point quelconque de la surface; nous aurons (19.) $\frac{\alpha dx dt}{Ada} = du$; mais (29.) $u = \frac{da}{dt}$: donc, en multipliant les deux équations, on aura $\frac{\alpha dx}{A} = udu$, & en intégrant $u^2 - U^2 = \frac{2\int \alpha dx}{A}$; ou $u^2 = \frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2$ U marquant la vîtesse qu'avoit la sphere à l'origine B.

COROLLAIRE VI.

(358.) Si α est constante, comme l'est la gravité à de petites distances de la surface de la terre, on aura $u^2 = \frac{2\alpha x}{A} + U^2$; ou, en substituant la valeur de $\alpha = 32A$ (52.), $u^2 = 64x + U^2$: c'est-à-dire que les vîtesses avec lesquelles les corps graves tombent le long des surfaces, ne dépendent en aucune maniere de la nature de ces surfaces, de leur plus ou moins grande courbure, ni de leur plus ou moins grande inclinaison par rapport à l'horison, mais seulement de la hauteur x d'où ils tombent, & de la vîtesse initiale U, avec laquelle ils commencent leur chûte.

COROLLAIRE VII.

(359.) Si cette vîtesse primitive U étoit zéro, ou si la sphere commençoit à tomber depuis le repos, on auroit, dans ce cas, $u^2 = 64x$, ou $u = 8\sqrt{x}$, comme on l'a vu, *Art.* 52.

COROLLAIRE VIII.

(360.) Si B étant l'origine, la sphere, ou le corps grave, avoit à descendre le long de différentes surfaces planes ou courbes,

PLANC. II. FIG. 31. BL, BC, BD, BE, avec la même vîtesse initiale ; la vîtesse qu'auroit ce corps en arrivant à l'horisontale LE, seroit toujours la même, & dans tous les cas $= \sqrt{64x + U^2}$; ou, lorsque $U = 0$, $= 8\sqrt{x} = 8\sqrt{BL}$.

COROLLAIRE IX.

(361.) Si la sphere avoit à parcourir le plan DE, l'angle DBE étant droit, on auroit $\frac{dx}{da} = \frac{DB}{DE}$; & l'équation $\frac{adxdt}{Ada} = du$ se réduiroit à $\frac{adt\,DB}{A.DE} = du$; & en intégrant, dans le cas des corps graves, à $\frac{32t.DB}{DE} = u - U$: ensorte que les différences des vîtesses qu'acquerra la sphere dans sa chûte par le plan DE, sur sa vîtesse initiale, BE étant horisontale, seront en raison composée du temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du sinus de l'angle DEB que forme le plan avec l'horisontale.

CO R O L L A I R E X.

(362.) Si l'on substitue dans l'équation $u = \frac{da}{dt}$, ou $udt = da$, la valeur de u trouvée ci-dessus (357.), qui est $u = \left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $da = dt\left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$; ou si l'on suppose $U = 0$, $da = dt\left(\frac{2\int adx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Et l'on trouve ensuite pour les corps graves, qui tombent librement depuis le repos, $da = 8dt\sqrt{x}$; & s'ils tomboient par le plan DE, comme dans ce cas, $\frac{DB}{DE} = \frac{x}{a}$, ou $x = \frac{a.DB}{DE}$, on auroit $\frac{da}{\sqrt{a}} = 8dt\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on tire, en intégrant, $2\sqrt{a} = 8t\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $a = \frac{16t^2 DB}{DE}$; c'est-à-dire que les espaces parcourus par un corps grave qui descend, depuis le repos, sur un plan incliné, sont en raison composée des quarrés des temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du sinus de l'angle DEB qne forme le plan avec l'horison.

CO R O L L A I R E XI.

(363.) De l'équation précedente $da = dt\left(\frac{2\int adt}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ on déduit aussi $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou si l'on avoit $U = 0$, $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int adx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$, équation qui, dans le cas des corps graves, devient $dt = \frac{da}{8\sqrt{x}}$; & si c'est par

le plan DE que la ſphere fait ſa chûte, on aura $dt = \frac{da}{8\sqrt{\frac{a.DB}{DE}}}$; & en intégrant, $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a.DE}{DB}}$. PLANC. II.

COROLLAIRE XII.

(364.) Si la ſphere, ou le corps peſant, tomboit librement, ou verticalement, on auroit $a = x$, & $dt = \frac{dx}{8\sqrt{x}}$; ou, en intégrant, $t = \frac{1}{4}\sqrt{x}$: c'eſt auſſi ce qu'on a vu à *l'Art.* 52.

PROPOSITION XLVIII.

(365.) *Trouver la durée de la chûte des corps graves par la Cycloïde.* FIG. 33.

Suppoſons que ce ſoit la Cycloïde $DABE$, que la ſphere, ou le corps grave, doit parcourir en tombant, $FHIE$ étant ſon cercle générateur, dont $FE = D$ eſt le diametre. Soit A le point d'où le corps commence à tomber depuis le repos ; & ſoit enfin $FG = b$, & $GC = x$. Par la propriété de la Cycloïde, ſon arc $BE = 2IE$; c'eſt-à-dire que l'arc BE de la Cycloïde eſt égal à deux fois la corde IE de ſon cercle générateur *. Mais, par la propriété du cercle, on

* Chacun ſçait que la *Cycloïde*, autrement dite *Trochoïde*, ou *Roulette*, eſt la courbe $DMBE$, décrite par un point D de la circonférence d'un cercle DTS qui roule ſur une droite DF. Chaque clou des roues des voitures décrit en l'air une Cycloïde, lorſque la voiture ſe meut en roulant ſur une même ligne. On voit, par cette génération, que la ligne DF, qui eſt la *demi-baſe* de la Cycloïde, eſt égale à la demi-circonférence du cercle générateur, puiſque tous les points de la demi-circonférence DbS ſe ſont appliqués ſur la ligne DF, tandis que le point décrivant D a tracé la demi-Cycloïde $DMBE$. Le point E s'appelle le *point culminant*, & la ligne FE l'*axe* de la Cycloïde. On voit encore que, ſi par différents points M, B de la courbe, on mene des ordonnées MO, BC perpendiculaires ſur l'axe, les parties MP, BI de ces ordonnées compriſes entre la Cycloïde & la circonférence du cercle générateur décrit ſur l'axe comme diametre, ſont reſpectivement égales aux arcs EP, EI compris entre le point culminant & ces ordonnées. Car ſi l'on ſuppoſe le cercle générateur DTS parvenu en N, dans la poſition NMR, le point décrivant D ſera parvenu en M, tous les points de l'arc NM ſe ſeront appliqués ſur DN, & l'on aura $DN = Arc\ NM = Arc\ FP$, par conſéquent $FN = Arc\ EP$. Mais $FN = OQ = OP + PQ = QM + PQ = MP$: donc $MP = Arc\ EP$. On démontrera la même choſe pour tous les autres points. Venons à la démonſtration de la propriété dont notre Auteur fait uſage. PLANC. A. FIG. 3.

Soit mené les deux ordonnées BC, bc, infiniment voiſines, qui coupent la circonférence du cercle générateur aux points I, i ; par les points B, I ſoit abaiſſé ſur bc les perpendiculaires Bq, Ir, & par le point B ſoit mené la parallele Bs au petit arc Ii ; les triangles Iri, Bqb pourront être regardés comme rectilignes, & l'eſpace $IiBs$ ſera un parallélogramme. Cela poſé, ſi l'on fait le ſinus verſe de l'arc EI, ſçavoir, $EC = x$, $CI = y$, $EF = D$; on aura $FC = D - x$, $Cc = Ir = Bq = dx$, $ri = qs = dy$, & l'équation du cercle générateur ſera $yy = Dx - xx$. Par la nature de la Cycloïde nous venons de voir que $BI = Arc\ EI$, & que $bi = Arc\ Ei$; donc $bi - BI = Arc\ Ei - Arc\ EI$, ou $bi - is$, ou $sb = Ii$, & par conſéquent $qb = qs + sb = ri + Ii = dy + Ii = dy + da'$, en nommant a' l'arc EI. Si, par le centre L, on mene le rayon LI, les triangles ſemblables CLI, riI donnent IC, ou $(Dx - xx)^{\frac{1}{2}} : IL$, ou $\frac{1}{2}D$: :

PLANC. II. FIG. 33.

a $IE=\sqrt{D(D-b-x)}$: donc l'arc $BE=2\sqrt{D(D-b-x)}$; & sa différencielle $da=\frac{-dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$, qui donne celle de l'arc $BA=da=\frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$ *. On aura donc, dans la Cycloïde (363.), lorsque le corps grave commence à tomber depuis le repos, $dt=\frac{dx\sqrt{D}}{8\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: ou, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\frac{1}{2}(D-b)$, $dt=\frac{\sqrt{D}}{4(D-b)}\cdot\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & en intégrant $t=\frac{\sqrt{D}}{4(D-b)}\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$. Mais $\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$, est l'arc de cercle dont le diametre est $D-b=GE$, & x le sinus verse (*Voyez la premiere note de cet Article.*). Donc, si sur le diametre GE on décrit le cercle GKE, on aura l'*Arc* $GK=\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & par conséquent dans la Cycloïde on aura $t=\frac{\sqrt{D}.(Arc\ GK)}{4(D-b)}$.

COROLLAIRE I.

(366.) Si le corps parcouroit dans sa chûte tout l'arc ABE, l'arc GK deviendroit le demi-cercle entier GKE, & $\frac{GKE}{D-b}=\frac{GKE}{GE}$, sera le rapport de la demi-circonférence au diametre. Appellant

---

Ir, ou dx : $Ii=da'=\frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; expression générale de l'élément d'un arc de cercle dont x est le sinus verse, & D le diametre. Substituant cette valeur de da' dans celle de bq, on aura $bq=dy+\frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; mais, en différenciant l'équation du cercle, on a $dy=\frac{\frac{1}{2}Ddx-xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; donc $qb=\frac{\frac{1}{2}Ddx-xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}=\frac{Ddx-xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$. Par la propriété du triangle rectangle $Bb^2=Bq^2+qb^2$; nommant donc a l'arc EB, & mettant à la place des lignes leurs valeurs algébriques, on a $da^2=dx^2+\frac{D^2dx^2-2Dxdx^2+x^2dx^2}{Dx-xx}=\frac{D^2dx^2-Dxdx^2}{Dx-xx}=\frac{Ddx^2}{x}$, en divisant le numérateur & le dénominateur par $D-x$. Donc $da=dx\sqrt{\frac{D}{x}}$; expression générale de l'élément d'un arc de Cycloïde, d'où l'on tire, en intégrant, $a=2\sqrt{Dx}$: c'est la valeur de l'arc EB de la Cycloïde. Mais, par la propriété du cercle EF, ou $D:EI::EI:GE$, ou x ; donc $EI^2=Dx$, & $EI=\sqrt{Dx}$; donc l'arc BE est double de la corde EI.

Il suit de là, que la longueur de la demi Cycloïde DE est double du diametre EF du cercle générateur, ou que la longueur entiere de la Cycloïde est quadruple du diametre EF. Cette courbe qui a fixé l'attention des plus célebres Géometres, a une foule de très-belles propriétés, par exemple, la tangente qu'on meneroit par le point B, est toujours parallele à la corde EI ; & l'aire de l'espace Cycloïdal compris entre la courbe & sa base, est triple de l'aire du cercle générateur, &c &c. Nous n'entrerons point dans ces détails, qui ne sont pas immédiatement de notre objet. Nous nous contentons d'avoir démontré les propriétés sur lesquelles notre Auteur s'appuie, & dont il paroit supposer la connoissance a ses Lecteurs.

* La différencielle de l'arc BE est égale à celle de l'arc BA, à cette différence près, que la premiere est négative, & l'autre positive : car x ou GE augmentant, l'arc BE diminue de da, & l'arc AB augmente de la même quantité da.

donc

donc C la circonférence du cercle dont le rayon eſt l'unité, on aura $\frac{GKE}{D-b} = \frac{\frac{1}{2}C}{2} = \frac{1}{4}C$; & le temps t employé à parcourir l'arc entier ABE de la Cycloïde, ſera $= \frac{C}{16} \sqrt{D}$.

COROLLAIRE II.

(367.) Comme la quantité b qui détermine la poſition du point A, ne ſe trouve point dans cette expreſſion, il s'enſuit que, de quelque point de la Cycloïde que le corps commence à tomber, il emploîra toujours le même temps $t = \frac{C\sqrt{D}}{16}$ pour parvenir en E.

COROLLAIRE III.

(368.) Si deux corps tomboient dans le même temps, l'un par la Cycloïde, & l'autre librement, ou verticalement, on auroit (364.) $\frac{C\sqrt{D}}{16} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{4} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2 D}{16}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourra un corps grave, en tombant librement, ou verticalement, pendant le même temps qu'un autre corps emploie dans ſa chûte par l'arc d'une Cycloïde, dont le diametre du cercle générateur eſt D, ſera $x = \frac{C^2 D}{16}$.

COROLLAIRE IV.

(369) Si les oſcillations d'un pendule ſont fort petites, les arcs décrits par le corps oſcillant coïncident avec des arcs de Cycloïde: en conſéquence, les demi-oſcillations d'un tel pendule ſe font dans le même temps que celui qu'un corps emploîroit à tomber par l'arc de la même Cycloïde; c'eſt-à-dire que ces demi-oſcillations ſe font dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{16}$; & les oſcillations entieres dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{8}$.

COROLLAIRE V.

(370.) Si un corps tombe librement, ou verticalement, pendant le temps que le pendule emploie à faire une oſcillation, nous aurons $\frac{C\sqrt{D}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{2} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2 D}{4}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourt un corps grave qui tombe librement, ou verticalement, pendant la durée d'une oſcillation entiere d'un pendule qui décrit des arcs coïncidants avec ceux d'une Cycloïde, dont le diametre du cercle générateur eſt exprimé par la quantité D, eſt $= \frac{C^2 D}{4}$.

COROLLAIRE VI.

(371.) Soit l la longueur du pendule, ou $2l$ le diametre du cercle dont il décrit les arcs; il eſt clair que $\sqrt{2lx}$ ſera l'une quelconque de ſes cordes, en ſuppoſant que x repréſente la hauteur verticale CE, dont deſcend le pendule dans la demi-oſcillation. Mais, puiſque nous ſuppoſons les arcs de cercle décrits par le pendule, confondus avec ceux de la Cycloïde, cette corde eſt égale à celle de la Cycloïde, & de plus, égale à ſon arc correſpondant $BE = 2\sqrt{Dx}$; à cauſe qu'ils ſont l'un & l'autre infiniment petits. Donc $2\sqrt{Dx} = \sqrt{2lx}$, ce qui donne $D = \frac{1}{2}l$: cette valeur de D étant ſubſtituée dans l'équation $x = \frac{C^2D}{4}$ (370.) la réduit à $x = \frac{C^2l}{8}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourra librement, ou verticalement, un corps grave, pendant le temps qu'un pendule, dont la longueur $= l$, fait une petite oſcillation entiere, eſt $= \frac{C^2l}{8}$.

COROLLAIRE VII.

(372.) Si dans l'équation $t = \frac{C}{16}\sqrt{D}$ (366.) on ſubſtitue la valeur de $D = \frac{1}{2}l$, on aura $t = \frac{C}{16}\sqrt{\frac{1}{2}l}$, ou en quarrant $t^2 = \frac{C^2l}{16^2.2}$; c'eſt-à-dire que les longueurs des pendules ſont entre elles comme les quarrés des durées de leurs oſcillations.

SCOLIE.

(373.) Le rapport de la circonférence au diametre, ou $\frac{C}{2}$ eſt $= 3,1416$ &c : donc $\frac{C^2}{8}$ ſera $= 4,93482528$ &c.; ce qui donne l'eſpace que le corps parcourroit librement, ou verticalement, dans le temps que le pendule de la longueur l feroit une oſcillation entiere, c'eſt-à-dire, $x = l.4,9348$ &c.

La longueur du pendule ſimple qui bat les ſecondes au niveau de la mer, varie ſelon les différentes Latitudes des lieux. Sous l'équateur elle eſt à très-peu près de 439 lignes du pied de Paris, & ſous le pôle elle eſt à peu près de 442. Si nous prenons une longueur moyenne, elle ſera de 440 lignes, longueur qui eſt fort peu moindre que celle du pendule ſimple qui bat les ſecondes en Eſpagne, au bord de la mer, & nous aurons, pour l'eſpace que les corps parcourent en Eſpagne, en tombant librement, ou verticalement, pendant la premiere ſeconde de leur chûte, $\frac{440 \cdot 49348}{10000}$ lig. du pied de Paris, ou 15 pieds, 0 p. 11 l. $\frac{312}{1000}$, ce qui fait 16 p. 0 p. 9 l. $\frac{21}{100}$ du pied anglais.

Sous l'équateur, où la longueur du pendule ſimple eſt de 439 lignes, les corps peſants parcourent, pendant la premiere ſeconde de leur chûte, 16 pieds 0 p. 3 l. $\frac{911}{1000}$, & ſous le pôle, 16 pieds 1 p. 7 l. $\frac{725}{1000}$; d'où l'on voit que la différence des eſpaces parcourus dans la chûte des corps graves pour les différentes latitudes, eſt extrêmement petite, puiſque, lorſqu'elle eſt la plus grande, elle n'excede pas un pouce 4 lignes : c'eſt pour cette raiſon que nous l'avons établie (57.) de 16 pieds juſte. Ce nombre étant quarré, eſt très-commode pour les calculs dont nous avons beſoin. * PLANC. II.

PROPOSITION XLIX.

(374.) *Trouver les puiſſances perpendiculaire & parallele à la tangente, qui agiſſent ſur un corps quelconque placé ſur une ſurface.*

Soit A un corps quelconque placé ſur la ſurface BCG, & α la puiſſance qui agit ſur lui ſuivant la direction AD. On peut décompoſer cette puiſſance en deux autres, l'une ſuivant AC, qui aura pour expreſſion $\frac{AC.\alpha}{AD}$, & l'autre ſuivant la tangente FG, qui ſera exprimée par $\frac{CD.\alpha}{AD}$. La premiere de ces deux puiſſances $\frac{AC.\alpha}{AD}$ peut encore ſe décompoſer en deux autres, l'une ſuivant AH, ayant pour expreſſion $\frac{AH.\alpha}{AD}$, & l'autre ſuivant la tangente FG, exprimée par $\frac{HC.\alpha}{AD}$. Le plan FG ne pouvant détruire, ou empêcher, l'action des forces qui lui ſont paralleles, la ſomme $\frac{CD.\alpha}{AD} \pm \frac{HC.\alpha}{AD} = \frac{HD.\alpha}{AD}$ ſera la puiſſance qui agit ſur le corps ſuivant la direction de la tangente. Nom- FIG. 34 & 35.

---

* Cette différence dans la longueur du pendule qui bat les ſecondes par différentes Latitudes, vient de ce que la peſanteur varie à différentes diſtances du centre de la terre. La premiere obſervation de ce genre eſt due à M. *Richer*, qui étant allé à Cayenne en 1672 pour y faire des obſervations aſtronomiques, s'apperçut que le pendule à ſecondes qu'il avoit apporté de Paris, retardoit très-ſenſiblement : il fut obligé de remonter la lentille de 1 ligne $\frac{1}{4}$ pour lui faire battre de nouveau les ſecondes. Cayenne eſt par 4° 56′ de Latitude boréale. Il conjectura d'après l'examen des différentes cauſes qui pouvoient produire cet effet, que Cayenne étoit plus éloigné du centre de la terre que Paris, qu'en conſéquence la terre étoit applatie vers les pôle. Cette conjecture s'eſt complettement verifiée par les obſervations des Académiciens faites au pôle & à l'équateur. (*Voyez* la relation de leur voyage, & ſur-tout le *Traité de la figure de la Terre* par le celebre M. *Bouguer*, qui étoit un de ceux que l'Académie envoya au Pérou en 1732. *D. Georges Juan* étoit de cette entrepriſe, avec *D. Antonio de Ulloa*, & a publié une relation très-intéreſſante de ſes obſervations, intitulée: *Obſervaciones Aſtronomicas*, &c).

D'après les obſervations de ce genre qui ont été répétées pluſieurs fois, il reſulte qu'à Quito (Latitude méridionale 0° 25). La longueur du pendule à ſeconde eſt de 438,83 lignes. A Portobello (Latitude boréale 9° 33′) de 439, 12. Au Petit Goave dans l'iſle de Saint-Domingue, (18° 27′ Latitude boréale) 439,33. Au Caire (30° 2′ de Latitude boréale) 440,25. A Rome (41° 44′) 440,28. A Paris (48° 51′) 440,57. A Londres (51° 31′) 440,65. A Archangel (64° 35′) 441,13. A Pello (66° 48′) 441,17. Par 79° 50′ de Lat. bor. 441,38.

PLANC. II. mant donc, comme ci-devant, Σ l'angle que forme la direction AD avec la perpendiculaire AH à la tangente, cette puissance sera aussi $= \alpha \sin \Sigma$. L'autre puissance suivant la perpendiculaire AH, sera $= \frac{HA.\alpha}{AD} = \alpha \cos \Sigma$.

COROLLAIRE I.

(375.) Puisque la puissance qui anime le corps suivant la direction de la tangente, est la même que lorsque le corps est sphérique, il s'ensuit que les propriétés qui concernent la vitesse & l'espace parcouru par un corps quelconque placé sur une superficie plane ou courbe, seront les mêmes que celles qu'on a trouvées pour les corps sphériques.

COROLLAIRE II.

(376.) En vertu de la puissance $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha \cos \Sigma$, le corps doit tourner, l'angle giratoire étant $= \frac{\pm dt \int CH \, \alpha dt \cos \Sigma}{S}$; car la réaction de la puissance $\alpha \cos \Sigma$ dans le point C, est égale & contraire à cette puissance, & agit à la distance perpendiculaire $p = \pm CH$. Donc (142.) elle doit produire l'angle giratoire $\frac{\pm dt \int CH.\alpha dt \cos \Sigma}{S}$, le signe $+$ étant pour le cas où le point H tombe du côté de D par rapport à C, & le signe $-$ pour celui où il tombe du côté opposé : dans le premier cas, le mouvement de rotation du corps se fera vers D; & dans le second, il se fera du côté opposé.

COROLLAIRE III.

(377.) Si donc on avoit $CH = 0$; c'est à-dire, si l'angle ACH étoit droit, ou si la ligne AH coïncidoit avec AC, le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(378.) Si le corps A étoit appuyé sur la superficie dans deux points C & F, la puissance $\alpha \cos \Sigma$, se distribueroit entre ces deux FIG. 36. points, de façon que la partie de cette puissance qui appartient au point C, seroit, par la propriété du centre de gravité, à celle qui appartient au point F, comme HF est à HC. La partie de la puissance α qui agit en C, sera donc $= \frac{\alpha.FH.\cos\Sigma}{FC}$, & celle qui agit en F $= \frac{\alpha.CH.\cos\Sigma}{FC}$, d'où il suit que l'angle giratoire qu'elles produiront toutes deux sera $dt \int \left(\frac{CH.\alpha.FH - FH.\alpha.CH}{S.FC}\right) dt \cos \Sigma = 0$.

Planc. II.

Corollaire V.

(379.) On démontrera encore la même chose, quel que soit le nombre de points par lesquels le corps porte sur la surface, pourvu cependant que le point H tombe entre ces points, afin que les différentes rotations soient les unes positives, & les autres négatives.

Corollaire VI.

(380.) Quoique la rotation soit zéro, la puissance $\alpha \sin \Sigma$, dont l'action est dirigée suivant DE, demeure toujours pour faire mouvoir le corps suivant le plan; mouvement qui doit avoir son effet, quelque petite que soit cette puissance, ou l'angle Σ.

Scolie.

(381.) Telles sont les loix, ou regles générales que tous les Auteurs donnent pour le mouvement des corps sur les surfaces; mais, comme nous l'avons vu, ces loix sont fondées sur l'abstraction qu'on a faite des impressions que doit former, sur les mêmes surfaces, la puissance perpendiculaire $\alpha \cos \Sigma$. Lorsqu'on veut avoir égard à ces impressions, les choses sont bien différentes, comme on va le voir dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

Du Frottement, & de l'altération qu'il produit dans le le mouvement des corps placés sur des surfaces.

Définition XLV.

(382.) On appelle *Frottement* cette résistance qu'éprouvent les corps pour se mouvoir parallélement aux surfaces sur lesquelles ils sont posés, lorsqu'ils sont poussés, ou tirés, par une ou plusieurs puissances.

Scolie.

(383.) Le parallélipipede A animé par une puissance quelconque α, dont la direction AD est oblique au plan BE, doit, suivant ce qui a été dit dans le Chapitre précédent, se mettre en mouvement, quelque petit que puisse être l'angle HAD, que nous nommons Σ: mais, en établissant cette théorie, on a fait abstraction de l'impression que doit faire, sur le plan, la puissance $\alpha \cos \Sigma$, dont l'action Fig. 37.

PLANC. II. FIG. 38.

eſt dirigée ſuivant *AH*. Cette puiſſance comprime le parallélipipède & le plan, & forme dans celui-ci l'impreſſion *GCFI*, & l'obſtacle *FI*, que la puiſſance α *ſin* Σ, qui eſt dirigée parallélement au plan *BE*, doit vaincre néceſſairement, pour que le mouvement du parallalélipipede puiſſe avoir ſon effet. En outre, il eſt certain, par l'expérience, que quelque ſoin qu'on prenne pour rendre liſſes & polies les ſurfaces du parallélipipede & du plan, elles reſtent toujours hériſſées d'un grand nombre de petites aſpérités qu'on apperçoit très-diſtinctement avec un microſcope. Or ces inégalités doivent former, dans la baſe, autant de petites impreſſions, en vertu de la puiſſance α *coſ* Σ; & ces impreſſions, ainſi que l'obſtacle *FI*, doivent produire une réſiſtance au mouvement ſuivant le plan *BE*.

Si l'on conſidere ces effets avec attention, on verra qu'ils ne différent en rien de ceux que nous avons expliqués (254.), & qui ont puiſſamment lieu dans le choc de deux corps, lorſque les premieres particules ſe rompant, les corps demeurent, pour ainſi dire, cloués l'un à l'autre. La puiſſance α *coſ* Σ fait ici le même effet que l'élaſticité latérale, dans le cas des corps qui ſe choquent, & produit, dans le plan & dans le parallélipipede, des impreſſions réciproques qui correſpondent à celles que nous avons nommées alors petites impreſſions latérales. La puiſſance α *ſin* Σ équivaut ici à celle que nous avions repréſentée par α, & qui produiſoit l'impreſſion totale. Il manque ſeulement ici, pour la parfaite reſſemblance de ces deux cas, les petites impreſſions dans la partie ſupérieure du parallélipipede, & que tout le côté *FK* ne rencontre un corps qui lui réſiſte. Au lieu de ce corps, on a ſeulement l'élevation, ou l'obſtacle, *FI*; mais ceci n'altere pas les loix de la réſiſtance, qui ſe trouve ſeulement diminuée: enſorte que cette même réſiſtance que la pratique a manifeſtée dès qu'on a fait les premieres expériences, & qu'on nomme communément *Frottement*, ne differe en rien de la force de percuſſion, & eſt identiquement la même choſe.

Nous diſtinguerons deux cas dans le Frottement; l'un dans lequel le parallélipipede ne fait ſeulement que forcer les aſpérités, & l'obſtacle *FI*, ſans les vaincre entiérement, & ſans ſe déterminer au mouvement; & l'autre, dans lequel ces aſpérités étant forcées, vaincues, ou rompues, le corps commence à ſe mouvoir. Dans le premier cas, la force des aſpérités & de l'obſtacle ſera plus grande que la plus grande force de percuſſion, que nous nommons maintenant de *Frottement*; enſorte qu'il eſt néceſſaire que le parallélipipede prenne ſon mouvement; que celui-ci arrive au

maximum ; qu'il diminue enſuite juſqu'à ce que u devienne $=0$; qu'il ſoit enſuite négatif, & qu'enfin le cas de l'équilibre entre la puiſſance & le Frottement, ou dans lequel le mouvement ceſſe entiérement, ait lieu ; c'eſt-à-dire que le Frottement ſoit égal à la puiſſance $\theta\, sin\, \Sigma$, celle-ci étant compoſée comme on voudra. Dans le ſecond cas, la force des aſpérités & de l'obſtacle eſt moindre que la plus grande force de percuſſion ou de Frottement. Le parallélipipede ſurmontera donc cette derniere force ; il ſe mettra donc en mouvement, & continuera de ſe mouvoir tant qu'on aura $\alpha\, sin\, \Sigma >$, ou $= \pi$, & il s'arrêtera lorſqu'on aura $\alpha\, sin\, \Sigma < \pi$, comme on l'a démontré, *Art.* 302 & 303, lorſqu'on a ſuppoſé conſtante la force de percuſſion, ou de Frottement.

PROPOSITION L.

(384.) *Trouver la force, ou la réſiſtance réunie de l'obſtacle & des aſpérités.*

La force de percuſſion eſt (309.) $\pi = \frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(X+Z)}{A+B}\right)$. Qu'on faſſe dans cette expreſſion $B=\infty$, & $V=0$, à cauſe que le plan BE eſt immobile ; & qu'on mette enſuite $\alpha\, cos\, \Sigma$, pour la puiſſance qui eſt dirigée ſuivant AH. Après cela, ſi l'on ſubſtitue en place de U ſeul, la quantité $U\, cos\, \Sigma$ pour la viteſſe qui demeure ſuivant AH, on aura, pour l'expreſſion de la force de percuſſion dont le parallélipipede ſupporte l'effet ſur ſa baſe CF, $\pi = \ldots\ldots$ $\frac{HH'}{HI'+H'I}(\frac{1}{2}AU^2 cos\, \Sigma^2 + \alpha\, sin\, \Sigma\,(X+Z))$. Nommant maintenant h l'amplitude de l'obſtacle & des aſpérités ; i l'impreſſion qui ſe fait ſur l'un & ſur l'autre ; & φ la force de percuſſion dont ils ſupportent l'effort, celle-ci ſera (309.) $\frac{Dh.ih'}{hi'+h'i}$: mais ayant pareillement $\frac{DH.IH'}{HI'+H'I} = \pi$, nous aurons cette analogie $\ldots\ldots$ $\frac{HIH'}{HI'+H'I} : \frac{hih'}{hi'+h'i} :: \frac{HH'}{HI'+H'I}(\frac{1}{2}AU^2 cos\, \Sigma^2 + \alpha\, cos\, \Sigma\,(X+Z)) : \varphi$; d'où l'on tire la percuſſion, la force, ou la réſiſtance réunie de l'obſtacle & des aſpérités, c'eſt-à-dire, $\varphi = \ldots\ldots$ $\frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 cos\, \Sigma^2 + \alpha\, cos\, \Sigma(X+Z))$.

SCOLIE.

(385) Il n'y a, dans cette équation, comme on l'a dit, *Art.* 310. (*Voyez auſſi la note de l'Art.* 309.) que les quantités h & h' qui ſoient variables, toutes les autres quantités ſont cenſées avoir leur plus grande

PLANC. II. valeur : de sorte qu'en substituant, ou en considérant les quantités h & h' comme l'expression des plus grandes amplitudes, on aura aussi la plus grande valeur de φ.

COROLLAIRE.

(386.) Cette quantité est donc le Frottement que doit vaincre la puissance θ *sin* Σ, pour mettre le parallélipede en mouvement. Car la plus grande résistance étant une fois surmontée, & l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités ne variant point, la résistance demeure aussi constante, & le parallélipipede continue de se mouvoir avec la vîtesse qui lui demeure après avoir surmonté le Frottement : & cette vîtesse sera considérée comme la vîtesse primitive pour la continuation du mouvement, qui se fera suivant les regles établies dans *l'Art.* 299; puisque le Frottement, ou la percussion, demeure constant.

PROPOSITION LI.

(387.) *Trouver la force de Percussion que produit, ou peut produire la puissance* α *sin* Σ.

FIG. 38. La vîtesse avec laquelle le parallélipipede est dirigé suivant CF, étant $= U$ *sin* Σ ; la puissance qui l'anime suivant la même direction, étant $= \alpha$ *sin* Σ ; les plus grandes profondeurs des impressions étant $= x$ & z * ; & les quantités h, i désignant l'amplitude & la grandeur des mêmes impressions, à quelque instant que ce soit du choc : en substituant ces valeurs dans l'expression de la Percussion (309.); faisant de plus $B = \infty$, $V = 0$, & nommant Φ la force de Percussion que peut produire la puissance α *sin* Σ, on aura $\Phi = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{hh'}{hi' + h'i}(\frac{1}{2}AU^2 \sin\Sigma^2 + \alpha \sin\Sigma(x+z))$.

COROLLAIRE I.

(388.) Ayant donc $\Phi < \varphi$, le parallélipipede ne pourra commencer son mouvement le long du plan ; il parviendra seulement à former sur l'obstacle & les aspérités sa plus grande impression i ; la force d'élasticité le fera ensuite retourner en arriere avec une vîtesse négative, jusqu'à ce que cette vîtesse devenant aussi $= 0$, le parallélipipede

* On ne doit pas perdre de vue que x & z sont les profondeurs des plus grandes impressions faites dans l'obstacle FI, & le parallélipipede, suivant la direction CF du mouvement, en vertu de la puissance α *sin* Σ, & de la vîtesse primitive U *sin* Σ ; tandis que X & Z représentent les profondeurs des plus grandes impressions dans le plan & le parallélipipede, dans la direction AH, en vertu de la puissance α *cos* Σ, & de la vitesse U *cos* Σ qui demeure dans cette direction. On fera la même remarque pour les quantités h, i & h', i', relativement aux quantités H, I & H', I'.

lélipipede revienne à prendre la vîtesse positive ; & il continuera ainsi d'aller & venir par des oscillations répétées, qui doivent diminuer continuellement, à mesure que l'élasticité va en diminuant, & par conséquent il doit arriver que le parallélipipede cesse entiérement de se mouvoir, comme on l'a dit, *Art.* 383.

COROLLAIRE II.

(389.) Au contraire, si l'on avoit $\Phi > \varphi$, le parallélipipde commenceroit à se mouvoir le long du plan, & il continueroit, sans s'arrêter, si l'on avoit $\theta \sin \Sigma =$, ou $> \varphi$.

COROLLAIRE III.

(390.) Le terme auquel le parallélipipede, cessant déja de pouvoir se soutenir sur le plan sans se mouvoir, est près de se déterminer au mouvement, sera celui dans lequel $\Phi = \varphi$, ou $\frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 \cos\Sigma^2 + \alpha \cos\Sigma(X+Z)) =$ .... $\frac{hh'}{hi'+h'i}(\frac{1}{2}AU^2 \sin\Sigma^2 + \alpha \sin\Sigma(x+z))$; équation d'où l'on tire, en divisant par $\frac{i(hh')}{hi'+h'i}$, $\frac{1}{I}(\frac{1}{2}AU^2 \cos\Sigma^2 + \alpha \cos\Sigma(X+Z)) =$ ...... $\frac{1}{i}(AU^2 \sin\Sigma^2 \alpha + \sin\Sigma(x+z))$.

COROLLAIRE IV.

(391.) Les variables h & h' ne se trouvant plus dans cette équation, il s'ensuit qu'à quelque instant que ce soit du choc, on aura l'égalité des deux forces Φ & φ, & par conséquent l'effet qu'on se propose.

COROLLAIRE V.

(392.) Si l'on avoit $U = 0$, cette équation deviendroit $\frac{\alpha \cos\Sigma(X+Z)}{I} = \frac{\alpha \sin\Sigma(x+z)}{i}$; mais à cause de la similitude des impressions faites par les mêmes corps, on a $\frac{X+Z}{I}$ est à $\frac{x+z}{i}$ comme $\frac{1}{H}$ est à $\frac{1}{h}$: substituant ces valeurs, on aura $\alpha \sin\Sigma = \frac{h\alpha\cos\Sigma}{H}$; c'est-à-dire que la puissance $\alpha \cos\Sigma$, qui presse le parallélipipede perpendiculairement sur le plan, est à la puissance $\alpha \sin\Sigma$, qui surmonte le Frottement, comme l'amplitude H de l'impression, est à l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités.

COROLLAIRE VI.

(393.) Plus le nombre & la grandeur des aspérités sera grand, plus la puissance $\theta \sin\Sigma$, qui doit vaincre le Frottement, doit être grande ; & réciproquement, &c.

COROLLAIRE VII.

(394.) Le nombre des aspérités suivant une certaine régularité dans ses augmentations & ses diminutions, nous pouvons le supposer proportionnel à l'amplitude H de l'impression, particuliérement dans les corps qui ne sont pas beaucoup élastiques; l'amplitude des aspérités sera donc, dans ce cas, $= nH$, n marquant un nombre quelconque dépendant de la grandeur des mêmes aspérités. Supposant en outre que l exprime la longueur de l'impression, & k sa largeur, on aura $H = lk$, ce qui donne $h = nlk + kX$, kX exprimant l'amplitude de l'obstacle *. Nous aurons donc, d'après cela, $\alpha \cos \Sigma : \alpha \sin \Sigma :: lk : nlk + kX$, ou $:: l : nl + X$, & par conséquent $\alpha \sin \Sigma = \frac{(nl + X)\alpha \cos \Sigma}{l}$.

COROLLAIRE VIII.

(395.) Plus l'impression aura de longueur, moins il faudra de force à la puissance $\alpha \sin \Sigma$ qui doit vaincre le Frottement.

COROLLAIRE IX.

(396.) Si on suppose les corps extrêmement lisses, & que par conséquent on puisse faire abstraction des aspérités, on aura $n = 0$, & par conséquent $\alpha \cos \Sigma : \alpha \sin \Sigma :: l : X$; ou $\alpha \sin \Sigma = \frac{X\alpha \cos \Sigma}{l}$.

SCOLIE I.

(397.) De l'équation $\alpha \sin \Sigma = \frac{h\alpha \cos \Sigma}{H}$, ou, en divisant par α, de $\sin \Sigma = \frac{h \cos \Sigma}{H}$, on peut tirer, d'après l'expérience, la valeur de $\sin \Sigma$, ou bien celle de h; mais, comme il est difficile, dans la pratique, de se procurer une valeur exacte de h, ce qui n'a pas lieu pour celle de Σ, qui peut se mesurer avec une grande facilité, on déduira la valeur de h par cette équation $h = \frac{H \sin \Sigma}{\cos \Sigma}$. Pour avoir la valeur de Σ, on n'a qu'à élever le plan peu à peu & très-doucement, par une de ses extrêmités, depuis la situation horisontale, jusqu'à ce que le parallélipipede commence son mouvement; & mesurer l'angle que forme le plan avec l'horison dans cette derniere situation, ce sera la valeur de Σ, d'où dépend celle de $h = \frac{H \sin \Sigma}{\cos \Sigma}$. La valeur de H étant celle de l'amplitude de l'impression, on peut la mesurer à très-peu près. En procédant de cette maniere, on pourra trouver la valeur de h, non-

* Ceci est évident, puisque X, qui marque la profondeur de la plus grande impression faite dans le plan, est égale à la hauteur de l'obstacle, & que k en représente la largeur.

ſeulement celle qui correſpondra à différentes puiſſances, mais encore à différentes dimenſions, tant en longueur qu'en largeur, du parallélipipede, & on en pourra former des Tables qui ſeront d'un grand uſage dans la pratique. Si l'on met un corps mou entre le plan & le parallélipipede, de ſorte que ce corps, en rempliſſant la capacité de l'impreſſion, empêche que le parallélipipede ne touche au plan; dans ce cas, l'obſtacle, ainſi que les aſpérités qu'il faut vaincre, ſe formeront des parties du corps mou, dont la réſiſtance eſt beaucoup moindre, & par conſéquent il faudra une moindre puiſſance pour la ſurmonter. Ceci eſt une conſéquence que l'expérience juſtifie journellement; & avec d'autant plus de préciſion, qu'on ſçait mieux choiſir & varier le corps mou qu'on interpoſe, relativement aux deux corps qui ſe frottent, ſelon l'eſpece & la variété de ceux-ci. Tout cela vient de ce que le corps mou interpoſé doit ſeul empêcher le contact des deux corps qui ſe frottent. Pour les corps légers & polis, l'huile ſuffit; mais pour les corps fort peſants & raboteux, il eſt néceſſaire d'employer de la graiſſe, ou du ſuif, & encore doit-on allier ces ſubſtances, & leur donner différentes préparations, ſelon la nature des différents corps.

COROLLAIRE X.

(398.) L'action peut procéder de deux puiſſances dont il réſulte un mouvement compoſé dans le parallélipipéde, l'une étant perpendiculaire au plan, & l'autre lui étant parallele. Suppoſons que la puiſſance α ſoit celle qui agit perpendiculairement au plan, avec la vîteſſe primitive U, & que la puiſſance θ agiſſe parallélement au même plan, avec la vîteſſe primitive V; ſi l'on ſubſtitue, dans l'équation de *l'Art.* 384, α en place de $\alpha \cos \Sigma$, & ſi l'on fait $\Sigma = 0$, on aura $\varphi = \frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z))$. Faiſant de même, dans l'équation de *l'Article* 387, $\theta = \alpha$, $\sin \Sigma = 1$, & $U = V$, on aura $\varphi = \ldots$ $\frac{hh'}{hi'+h'i}(\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+z))$.

COROLLAIRE XI.

(399.) Le parallélipipede ſera donc au point de commencer ſa marche, lorſque $\frac{1}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z)) = \frac{1}{i}(\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+z))$: ou à cauſe que $I : i :: H(X+Z) : h(x+z)$, lorſque $\frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(X+Z)}{H(X+Z)} = \ldots$ $\frac{\frac{1}{2}AV^2 + \theta(x+z)}{h(x+z)}$.

COROLLAIRE XII.

(400.) Si l'on avoit $U=0$, & $V=0$, l'équation deviendroit $\frac{\alpha}{H}=\frac{\theta}{h}$, ou $\theta=\frac{h\alpha}{H}$; c'est-à-dire que la puissance α qui agit sur le parallélipipede perpendiculairement au plan, est à la puissance θ qui surmonte le Frottement, comme l'amplitude H de l'impression, est à l'amplitude h de l'obstacle & des aspérités: c'est le même résultat que celui qu'on a trouvé ci-dessus (*392.*).

COROLLAIRE XIII.

(401.) Si l'on avoit seulement $U=0$, on auroit $\frac{\alpha}{H}=\frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)}{h(x+z)}$ ou $\frac{h\alpha}{H}-\frac{AV^2}{2(x+z)}=\theta$, d'où l'on voit combien, dans ce cas, la puissance θ, qui doit vaincre le Frottement, peut être diminuée.

COROLLAIRE XIV.

(402.) Si l'on avoit donc $\frac{h\alpha}{H}-\frac{AV^2}{2(x+z)}=0$, on auroit aussi $\theta=0$; c'est-à-dire que le parallélipipede n'auroit pas besoin, pour vaincre le Frottement, de l'action d'une puissance qui agît sur lui parallélement au plan; il le surmonteroit par l'action que produit la vîtesse V.

COROLLAIRE XV.

(403.) Pour que le Frottement soit vaincu, & que le parallélipipede commence à se mouvoir, il faut donc seulement avoir $\frac{h\alpha}{H}<\frac{AV^2}{2(x+z)}+\theta$.

COROLLAIRE XVI.

(404.) Si le plan étoit horisontal, & si α étoit la gravité de la masse A, il seroit nécessaire, pour vaincre le Frottement, qu'on eût $\frac{h}{H}<\frac{V^2}{64(x+z)}+\frac{\theta}{\alpha}$, (52.); ou si l'on avoit $\theta=0$, il faudroit avoir $\frac{h}{H}<\frac{V^2}{64(x+z)}$; ou bien, en prenant e pour la hauteur d'où devroit tomber le corps pour acquérir la vîtesse V, il faudroit avoir $\frac{h}{H}<\frac{e}{x+z}$: ou $\frac{h(x+z)}{H}<e$, (52.).

COROLLAIRE XVII.

(405.) Dans les corps durs, la quantité $h\ (x+z)$ étant extrêmement petite à l'égard de H, on voit qu'il ne faut au parallélipipede qu'une vîtesse primitive très-petite, pour vaincre le Frottement, & se mettre en mouvement.

COROLLAIRE XVIII.

(406.) Si l'on avoit $V=0$, la puiſſance α étant toujours ſuppoſée l'action de la gravité ſur la maſſe A, il ſeroit néceſſaire d'avoir $\frac{h}{H}<\frac{\theta}{\alpha}$ pour que le parallélipipede ſurmontât le Frottement ; ou ce qui revient au même, il faudroit que la raiſon de la gravité à la puiſſance θ qui doit vaincre le Frottement, fût moindre que $\frac{H}{h}$.

SCOLIE II.

(407.) Si on conſulte les Auteurs qui ont écrit, juſqu'à préſent, ſur ce ſujet, on verra qu'on a généralement cru, & qu'on croit encore que le Frottement eſt ſeulement proportionnel à la puiſſance qui agit ſur le parallélipipede perpendiculairement au plan, abſtraction faite des aſpérités. Cette opinion eſt fondée ſur quelques expériences faites par différents Auteurs, particuliérement par M. *Amontons*, de l'Académie des Sciences de Paris, & par M. *Bilfinger*. Le premier dit avoir toujours trouvé la puiſſance θ, qui eſt ſur le point de vaincre la réſiſtance du Frottement, égale à la troiſieme partie de α, ou de la puiſſance qui agit ſur le parallélipipede perpendiculairement au plan ; c'eſt-à-dire, $\theta=\frac{1}{3}\alpha$; mais le ſecond fait ſeulement $\theta=\frac{1}{4}\alpha$. Cette différence dans les réſultats auroit dû faire douter que la réſiſtance du Frottement fût ſeulement proportionnelle à la puiſſance α ; mais conſidérant que les aſpérités plus ou moins grandes des plans dont on s'eſt ſervi pour faire les expériences, pouvoient être la cauſe de ces différences, on adopta facilement cette opinion : de ſorte qu'il paroit certain que ces déterminations ont été établies en faiſant abſtraction des aſpérités. Mais, dans cette ſuppoſition même, ces déterminations ne s'accordent point avec nos formules. Selon ces formules (396.), $\theta=\frac{X\alpha}{l}$: par conſéquent, ſelon M. *Amontons*, on devroit toujours avoir $\frac{X}{l}=\frac{1}{3}$; ou, ſelon M. *Bilfinger*, $\frac{X}{l}=\frac{1}{4}$; c'eſt-à-dire que la profondeur de l'impreſſion devroit être, dans tous les cas, ſuivant le premier Auteur, la troiſieme partie de la longueur du parallélipipede ; & la quatrieme partie, ſuivant le ſecond ; conſéquence dont l'abſurdité eſt tellement évidente, qu'il n'eſt pas néceſſaire de s'arrêter à la démontrer.

Nous ne devons cependant pas révoquer en doute les expériences faites par ces deux célebres Auteurs. Tout peut ſe concilier, en ſuppoſant qu'ils ne ſe ſoient pas étendus juſqu'à les faire avec différents corps d'une même peſanteur & d'une même amplitude dans leur baſe,

mais de différentes dimensions en longueur & largeur, & de différentes duretés. Ce soupçon ne paroîtra pas sans fondement, si l'on se rappelle une expérience très-commune. Si un couteau, par exemple, porte sur un plan par son tranchant, & qu'en appuyant sur lui, on veuille le faire mouvoir, dans cette situation, perpendiculairement à son plan, il tend plutôt à s'incliner qu'à se mouvoir, & on a de la peine à le maintenir droit sur le plan. Mais si, au contraire, on veut le faire mouvoir directement dans le sens de son plan, il marche avec très-peu d'effort : ce qui fait voir clairement combien le Frottement est moindre dans ce second cas que dans le premier *.

Pour nous approcher de ce que les deux Auteurs cités ont établi, d'après leurs expériences, nous devons, au contraire, admettre qu'il existe toujours des aspérités, quelque lisses & polis que puissent être les corps ; & que l'obstacle, sur-tout dans les corps durs, est insensible, ou est presque susceptible d'être négligé. Dans ce cas, on aura (400.) $\theta = \frac{h\alpha}{H}$; ou en substituant (394.) les valeurs de $H = lk$, & de $h = nlk + kx$, on aura $\theta = \frac{\alpha k(nl+X)}{lk} = \frac{\alpha(nl+X)}{l}$: de sorte qu'en négligeant la quantité X qui provient de l'obstacle, comme étant infiniment petite, par rapport à nl, qui provient des aspérités, on aura $\theta = n\alpha$; c'est-à-dire, selon M. *Amontons*, $n = \frac{1}{3}$, & selon M. *Bilfinger*, $n = \frac{1}{4}$: différence qui n'implique alors aucune contradiction, puisque n exprime la grandeur des aspérités. Ceci prouve combien notre théorie est d'accord avec les expériences ; mais il faut observer que si l'on peut regarder l'obstacle

---

* On peut expliquer en cette maniere pourquoi le couteau se meut sur le plan, avec plus de facilité, dans la direction de son tranchant, que dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame.

La puissance qui surmonte le Frottement, est, d'après ce qui a été dit précédemment, $\theta = \frac{\alpha(nl+X)}{l}$ (394 & 398.) ; & comme, dans l'impression que forme le tranchant du couteau sur le plan, les aspérités sont nulles à l'égard de l'obstacle qui en résulte, on a $n = 0$, & par conséquent $\theta = \frac{\alpha X}{l}$: donc plus la longueur l de l'impression sera grande, plus la quantité $\frac{\alpha X}{l}$, ou son égale θ, sera petite. Mais lorsqu'on veut que le couteau se meuve perpendiculairement au plan de sa lame, la longueur de l'impression est alors $= k$ (394.) ; quantité plus petite que l, qui en exprime la largeur : donc, dans ce cas, on a $\frac{\alpha X}{k} > \frac{\alpha X}{l}$, qui est la puissance nécessaire pour surmonter le frottement dans le premier cas. Donc la puissance nécessaire pour faire mouvoir le couteau dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame, doit être plus grande que celle qu'il faut employer pour le faire mouvoir dans la direction de son tranchant.

On remarquera que quand on parle ici de la longueur de l'impression, on n'entend pas parler de la quantité X, mais de la quantité l, qui est la longueur de l'amplitude de l'impression, prise dans la direction du mouvement du corps sur le plan, suivant ce que l'Auteur a établi, *Art.* 394.

comme nul dans les corps très-durs, on ne peut faire cette supposition lorsqu'il s'agit de corps mous, ou qui ne sont pas extrêmement durs. Dans ces cas, loin que cette supposition soit légitime, ce sont, au contraire, les aspérités qu'on doit supposer comme nulles, par rapport à l'obstacle, & par conséquent le parallélipipede éprouvera moins de résistance, en se mouvant dans une direction perpendiculaire à son plus petit côté, que s'il se meut dans une direction perpendiculaire à son plus grand côté.

Des Effets qui ont lieu après que la résistance du Frottement est vaincue.

Proposition LII.

(408.) *Trouver la relation entre la vîtesse* u, *& l'espace parcouru par le corps* A.

On a déjà vu (389.) que toutes les fois qu'on aura $\Phi > \varphi$, le parallélipipede se mettra en mouvement. On a encore vu (383.), que, si dans le même temps, la puissance θ, ou $\alpha \sin \Sigma$ qui agit sur le parallélipipede parallélement au plan, est plus grande que la force de résistance de l'obstacle & des aspérités, il continuera de se mouvoir, sans qu'il y ait aucune limite à son mouvement; & que le Frottement sera constant pendant la durée du mouvement, à cause que l'amplitude de l'obstacle & des aspérités ne reçoit aucune augmentation (391.)*. D'après tout ceci, la vitesse correspondante sera (278.) $u = \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A} \right)^{\frac{1}{2}}$, ou, en substituant θ pour α, & h pour H, on aura $u = \left(U^2 + \frac{2\theta(x+z)}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$; mais, dans le cas présent, $z = 0$ par rapport à x, cette expression devient donc $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$, U désignant la vîtesse primitive qu'avoit le corps lorsqu'il a surmonté le Frottement.

Corollaire I.

(409.) S'il n'y avoit qu'une seule & unique puissance α, qui animât le parallélipipede, il seroit nécessaire de mettre $\alpha \sin \Sigma$ pour θ, & l'on auroit $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x \sin \Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$.

---

* Puisque (391.) les quantités h & h' disparoissent dans la supposition de $\Phi = \varphi$, elles disparoîtront également lorsque $\Phi > \varphi$; ce qui fait voir que ces quantités h & h' sont constantes. En outre, il ne faut pas oublier que l'Auteur a supposé la dureté constante dans les formules de la percussion, qu'il applique ici à la théorie du Frottement.

COROLLAIRE II.

(410.) Comme de la ſuppoſition de $z=0$, il réſulte que D' doit être comme infini par rapport à D, on aura (253.) la force de l'obſtacle & des aſpérités $\varphi=\frac{DhD'h'}{Dh+D'h'}=Dh$: on pourra donc ſubſtituer φ à la place de Dh, & on aura encore . . . . , $u=\left(U^2+\frac{2\theta x}{A}-\frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; & dans le cas où il n'y auroit que la puiſſance α qui animât le parallélipipede, on auroit $u=\left(U^2+\frac{2\alpha x \sin \Sigma}{A}-\frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(411.) Pour que le parallélipipede s'arrête dans le cours de ſon mouvement, il faut que $u=0$: donc, pour ce cas, on aura $U^2+\frac{2\theta x}{A}-\frac{2Dhx}{A}=0$; ou $U^2=\frac{2x}{A}(Dh-\theta)=\frac{2x}{A}(\varphi-\theta)$. D'où l'on voit clairement que, pour que le parallélipipede s'arrête, il faut qu'on ait $\varphi=Dh>\theta$; ſans cela, $\varphi-\theta$ feroit négatif, & par conſéquent U imaginaire, ce qui eſt contre la ſuppoſition; ou bien $\varphi-\theta$ feroit $=0$, & par conſéquent auſſi $U=0$, ce qui eſt pareillement contre la ſuppoſition.

COROLLAIRE IV.

(412.) Le point dans lequel s'arrêtera le parallélipipede, ſera donc celui où l'on aura $x=\frac{AU^2}{2(Dh-\theta)}=\frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$.

PROPOSITION LIII.

(413.) *Trouver le rapport entre l'eſpace parcouru par le corps* A, *& ſa viteſſe.*

L'équation qui correſpond à ce cas, eſt (300.) $x+z=\frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi+\alpha}$, laquelle ſe réduit à $x=\frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\theta)}=\frac{A(U^2-u^2)}{2(Dh-\theta)}$, en ſubſtituant φ à la place de π, & θ à celle de α, & faiſant de plus $z=0$; & ſi l'on avoit $\theta>\varphi$, cette équation feroit $x=\frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-\varphi)}=\frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-Dh)}$ *

* Ces ſecondes expreſſions que l'Auteur donne pour le cas où la puiſſance θ qui anime le corps ſur le plan, eſt plus grande que la réſiſtance φ qu'il doit vaincre, ne nous paroiſſent pas abſolument eſſentielles; les premieres nous ſemblent ſuffiſantes pour ce qu'il a deſſein d'exprimer dans ce moment. Car puiſque le corps éprouve, dans ſon mouvement ſur la ſurface, une réſiſtance moindre que la puiſſance qui l'anime, ſa viteſſe ira en augmentant; & à quelque inſtant que ce ſoit de la marche du corps, ſa viteſſe u ſera plus grande que la viteſſe primitive U; & alors U^2-u^2 eſt une quantité négative. Mais, dans ce même cas, $\varphi-\theta$ eſt auſſi négative : donc x ſera poſitive, & aura la même valeur que celle qu'on obtient des ſecondes expreſſions; les premieres

COROLLAIRE.

(414.) Dans le cas où x parvient à sa plus grande valeur; c'est-à-dire, lorsqu'il représente le plus grand espace; on aura $u = 0$ *, & par conséquent $x = \frac{AU^2}{2(\varphi - \theta)} = \frac{AU^2}{2(Dh - \theta)}$, comme on l'a trouvé ci-devant (412.).

PROPOSITION LIV.

(415.) *Trouver la relation entre le temps t de la durée du mouvement du corps A, & l'espace qu'il a parcouru.*

L'équation (258.) $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$ se réduit, dans ce cas où $z = 0$, & $v = 0$, à $dt = \frac{dx}{u}$; substituant, dans cette équation, la valeur de u trouvée, (408.), on aura $dt = \frac{dx}{\left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$; d'où l'on tire, en intégrant, $t = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta - Dh))^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta - Dh} = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta - \varphi))^{\frac{1}{2}} - AU}{\theta - \varphi}$ **.

---

conviennent donc aussi bien au cas où $\theta > \varphi$, qu'à ceux où θ est $=$, ou $< \varphi$ (383.). On ne doit pas perdre de vue ce qui a été dit dans *l'Art.* 387, *& sa note*, que, dans cette Proposition, aussi bien que dans la précédente, x marque la profondeur de l'impression faite dans l'obstacle, & par conséquent l'espace parcouru par le parallélipipede le long du plan, puisque z est supposé $= 0$.

* Cela s'appercevra facilement, si l'on fait attention que, pour que x soit le plus grand qu'il est possible, il faut que sa valeur $\frac{A(U^2 - u^2)}{2(\varphi - \theta)}$ soit aussi la plus grande qu'il est possible; mais, pour cela, il faut que $u = 0$, puisque toutes les autres quantités qui entrent dans cette expression, sont constantes (386). On remarquera qu'il faut, pour ce cas, que $\varphi > \theta$; car autrement il n'y auroit point de limite pour x (302 & 303.).

** Pour trouver cette intégrale, je mets la valeur de dt sous cette forme, $dt = \ldots\ldots$ $dx\left(U^2 + \left(\frac{2\theta - 2Dh}{A}\right)x\right)^{-\frac{1}{2}}$; je fais $U^2 + \left(\frac{2\theta - 2Dh}{A}\right)x = y$, d'où je tire $x = \frac{Ay - AU^2}{2\theta - 2Dh}$, & par conséquent $dx = \frac{Ady}{2\theta - 2Dh}$. Substituant maintenant ces quantités en place de leurs correspondantes, j'ai $dt = \frac{Ady}{2\theta - 2Dh}\, y^{-\frac{1}{2}} = \frac{Ay^{-\frac{1}{2}}dy}{2\theta - 2Dh}$, & en intégrant $t = \frac{Ay^{\frac{1}{2}}}{\theta - Dh} + C$; mettant pour $y^{\frac{1}{2}}$ sa valeur $\left(U^2 + \left(\frac{2\theta - 2Dh}{A}\right)x\right)^{\frac{1}{2}}$, on trouve $t = \frac{A\left(U^2 + \left(\frac{2\theta - 2Dh}{A}\right)x\right)^{\frac{1}{2}}}{\theta - Dh}$ $+ C = \frac{(A^2U^2 + 2Ax(\theta - Dh))^{\frac{1}{2}}}{\theta - Dh} + C$.

Pour trouver la valeur de la constante C, je remarque que cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, ou lorsque $x = 0$; or si l'on éleve tout le numérateur de la valeur de t à la puissance $\frac{1}{2}$, le premier terme sera AU, & tous les autres seront affectés de x; donc ils s'évanouiront tous, à l'exception du premier, par la supposition de $x = 0$. On a donc $\frac{AU}{\theta - Dh} + C = 0$, ou $C = \frac{-AU}{\theta - Dh}$. Substituant cette valeur de C dans celle de t, on trouve précisément l'expression donnée par l'Auteur.

COROLLAIRE.

(416.) Pour le cas du plus grand espace parcouru, dans lequel on a $Dh > \theta$, ou $\varphi > \theta$, nous avons trouvé (412 & 414.) $x = \ldots \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$: cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donnera, pour le temps dans lequel le corps parcourt le plus grand espace, $t = \frac{AU}{Dh-\theta} = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSITION LV.

(417.) *Trouver la relation entre l'espace* x *que parcourra le corps* A, *& le temps* t.

Multipliant l'équation précédente $t = \frac{(A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}}-AU}{\theta-\varphi}$ par $\theta-\varphi$, ajoutant AU de part & d'autre, & quarrant, il en résulte $A^2U^2+2AUt(\theta-\varphi)+t^2(\theta-\varphi)^2 = A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi)$: d'où l'on tire, en soustrayant de part & d'autre A^2U^2, & en divisant par $2A(\theta-\varphi)$, $x = Ut + \frac{t^2(\theta-\varphi)}{2A} = Ut + \frac{t^2(\theta-Dh)}{2A}$.

PROPOSITION LVI.

(418.) *Trouver le temps* t *qu'emploie le corps* A *dans son mouvement, par sa relation avec la vîtesse.*

L'équation qui correspond à ce cas est (343.) $t = \frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$. Substituant θ pour α, & φ pour π, elle devient $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$.

COROLLAIRE.

(419.) Dans le cas de la plus grande impression, ou du plus grand espace parcouru, on aura $t = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSITION LVII.

(420.) *Trouver la vîtesse qu'aura le corps* A, *par sa relation avec le temps de la durée du mouvement.*

Multipliant par $\theta-\varphi$, l'équation $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$, divisant par A, & ajoutant U de part & d'autre, on aura $u = U + \frac{t(\theta-\varphi)}{A}$.

COROLLAIRE.

(421.) Supposons que le parallélipipede A descende le long du plan, par la seule action de la gravité α; que n soit un nombre quelconque, de sorte qu'on ait $\alpha \sin\Sigma - \varphi = \theta - \varphi = n\alpha$; nous aurons

$u = U \pm \frac{nat}{A}$: mais (52.) $A = \frac{1}{32} \alpha$; donc $u = U \pm 32nt$ *.

S C O L I E.

(422.) Dans le volume des *Mémoires de l'Académie Royale de Berlin*, de l'année 1748, on trouve un Mémoire de *Léonard Euler*, sur la maniere dont on peut concevoir la résistance du Frottement. Ce Sçavant conclud que cette résistance est moindre dans le cas du mouvement que dans celui de l'équilibre ; ce qui est absolument contraire à nos résultats. Pour concevoir & rendre raison de cette différence, il suffira de dire que ce sçavant Auteur ne développe point, dans la théorie qu'il expose, ce en quoi il fait consister le Frottement ; il dit seulement ce qui peut servir à en concevoir les effets. Il suppose qu'il provient uniquement des aspérités du plan & du parallélipipede ; & en aucune maniere de l'obstacle *FI*, que nous avons déjà vu avoir nécessairement lieu, en vertu de la puissance perpendiculaire $\alpha \, cos \, \Sigma$, sur le même parallélipipede. Il suppose encore que les aspérités du parallélipipede & du plan sont autant de petits plans inclinés, ou autant de dents semblables, afin que les dents du plan puissent s'engrener, ou s'ajuster parfaitement, avec celles du parallélipipede. Dans cette supposition, il est clair que la puissance qui agit sur le parallélipipede, étant d'une grandeur suffisante, obligera ce corps, ou ses petites dents à ramper le long de celles du plan, jusqu'à ce qu'elles se soutiennent sommets contre sommets. Ce point étant passé, elles s'engreneront de nouveau, par la chûte du parallélipipede, avec les dents suivantes, chacune avec sa correspondante : après quoi elles recommenceront à s'élever ; & continuant ainsi, le Frottement se fera, comme on voit, par sauts d'une dent à l'autre ; de sorte que la premiere fois que les dents du parallélipipede montent le long de celles du plan, c'est alors qu'on éprouve le Frottement total ; & les chûtes étant une action opposée, ou négative, le premier Frottement, qui est celui qui a lieu dans le cas d'équilibre, est diminué. Cette façon de considérer le Frottement peut être propre à en faire concevoir facilement les effets ; mais on apperçoit en même temps ses inconvénients, & les fortes objec-

---

* Plusieurs Lecteurs n'appercevront peut-être pas tout d'un coup pourquoi l'Auteur emploie ici le double signe dans l'équation $u = U \pm \frac{nat}{A}$: mais la difficulté disparoîtra, si l'on considere qu'il a voulu réunir dans cette équation le cas où la force φ de l'obstacle & des aspérités excede la puissance agissante θ, cas où la quantité $\theta - \varphi$ qu'il a représentée par $n\alpha$, est négative. Ainsi, sous cette forme, l'équation convient à tous les cas ; on voit que u peut être positif, puis égal à zéro, & ensuite négatif (383.).

PLANC. II. tions qu'on peut élever contre elle. Les dents du parallélipipede ne peuvent absolument point monter le long de celles du plan, & parvenir au point d'être sommets contre sommets, ni même proches de cette situation, sans qu'il ne se soit fait une impression réciproque dans ces mêmes dents, & par conséquent qu'il ne se soit formé un nouvel obstacle à vaincre, sans que jamais il puisse arriver que cet obstacle soit nul, & qu'il puisse y avoir de chûte; & par la même raison, il ne peut y avoir de diminution dans le Frottement, dans le cas du mouvement.

Une expérience, dit le même sçavant Auteur, favorise cette détermination; la voici. Il ne peut jamais arriver que le parallélipipede se meuve sur le plan, avec beaucoup de lenteur, quelque soin qu'on apporte à ne donner au plan que l'inclinaison nécessaire pour mettre le parallélipipede en mouvement. Il dit, au contraire, qu'une fois qu'il a commencé à se mouvoir, son mouvement s'accélere avec une grande rapidité, & que, par conséquent, il faut que le Frottement diminue par le mouvement; mais on va voir qu'il n'est point d'expérience qui s'accorde plus parfaitement avec notre théorie.

L'équation $u = U \pm 32nt$, est celle qui correspond précisément au cas dont il est ici question. Si nous faisons $n = \frac{1}{32}$, elle deviendra $u = U \pm t$; & si l'on éleve le plan avec toute la lenteur possible, & qu'on fasse, en conséquence, $U = 0$, il restera cependant encore $u = t$; c'est-à-dire que la vîtesse u que prendra le corps A, lors même qu'on ne donne au plan que l'inclinaison nécessaire pour qu'il le mette en mouvement, sera encore d'autant de pieds par seconde, qu'il y a de secondes dans le temps t: ensorte qu'à la fin de la premiere seconde de temps, il marchera déjà avec une vîtesse d'un pied par seconde; & à la fin des deux premieres secondes de temps, sa vîtesse sera de deux pieds par seconde, & ainsi de suite.

FIG. 37. Il ne faut maintenant que faire voir qu'en supposant $n = \frac{1}{32}$, on ne suppose dans le plan BE qu'un mouvement très-petit; c'est-à-dire que l'angle $BEL = \Sigma$ n'est augmenté que d'une très-petite quantité, l'inclinaison du plan étant déjà supposée telle que le corps soit sur le point de se mettre en mouvement; auquel cas on a $\alpha \, \sin \Sigma = \varphi$.

Supposons maintenant qu'on augmente l'angle BEL d'inclinaison d'une différencielle $d\Sigma$; c'est-à-dire qu'il devienne $= \Sigma + d\Sigma$: le sinus de cet angle BEL sera $= \sin \Sigma + d\Sigma \cos \Sigma$, & son cosinus $= \cos \Sigma - d\Sigma \sin \Sigma$. La puissance qui anime le corps parallélement au plan sera, dans ce second cas, $= \alpha \sin \Sigma + \alpha d\Sigma \cos \Sigma$; par conséquent plus grande que celle du premier cas de $\alpha d\Sigma \cos \Sigma$. On aura

pareillement la puissance qui l'anime perpendiculairement $= \alpha \cos \Sigma - \alpha d\Sigma \sin \Sigma$. La puissance capable de vaincre le Frottement dans ce second cas, est (392.) $= \frac{h\alpha \cos \Sigma}{H} - \frac{h\alpha d\Sigma \sin \Sigma}{H}$. L'amplitude h est comme la largeur du parallélipipede, multipliée par la profondeur de l'impression : mais la premiere quantité étant constante, h sera comme la profondeur de l'impression ; c'est-à-dire (398 & 400.) comme la puissance $\alpha \cos \Sigma - \alpha d\Sigma \sin \Sigma$. Donc la puissance, qui est capable de vaincre le Frottement dans ce second cas, sera comme ...... $\frac{\alpha^2}{H} (\cos \Sigma - d\Sigma \sin \Sigma)^2$, ou comme $\frac{\alpha^2}{H} (\cos \Sigma^2 - 2d\Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma)$; & dans le premier cas, ou $d\Sigma = 0$, comme $\frac{\alpha^2}{H} \cos \Sigma^2$. La puissance du second cas sera donc moindre que celle du premier de ... $\frac{\alpha^2}{H} (2d\Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma)$; & la puissance totale du premier cas, sera à cette différence, comme $\cos \Sigma^2$ est à $2d\Sigma \cos \Sigma \sin \Sigma$. Or la puissance primitive totale est $= \alpha \sin \Sigma$: donc la différence sera $= \frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$. L'augmentation de la puissance qui anime le corps parallélement au plan, est $= \alpha d\Sigma \cos \Sigma$, & la diminution de celle qui surmonte le Frottement, $= \frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$: donc on aura, pour le second cas, $\alpha \sin \Sigma - \varphi = n\alpha = \alpha d\Sigma \cos \Sigma + \frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, ou $n = \frac{1}{32} = \frac{d\Sigma}{\cos \Sigma} (1 + \sin \Sigma^2)$ *. Substituant maintenant, d'après M. *Bilfinger* $\frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma} = \frac{1}{4}$, on aura $\frac{1}{32} = \frac{d\Sigma (1 + \frac{1}{17})}{4\sqrt{\frac{1}{17}}}$, & $d\Sigma = \frac{\sqrt{17}}{144}$. Or le rayon d'un cercle étant égal à l'unité, la demi-

---

* La puissance primitive totale qui animoit le corps parallélement au plan, étoit $= \alpha \sin \Sigma$; mais ayant reçu une augmentation de $\alpha d\Sigma \cos \Sigma$, elle est donc maintenant $= \alpha \sin \Sigma + \alpha a\Sigma \cos \Sigma = \theta$. Pareillement, puisque la puissance φ, qui surmonte le frottement, a reçu une diminution de $\frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, & que, dans le premier cas, $\varphi = \alpha \sin \Sigma$, par l'hypothese, on aura donc, dans le second, $\varphi = \alpha \sin \Sigma - \frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$; & par conséquent $\theta - \varphi = n\alpha$ (421.) $= \alpha d\Sigma \cos \Sigma + \frac{2\alpha d\Sigma \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma}$, d'où l'on tire $n = d\Sigma \left(\cos \Sigma + \frac{2 \sin \Sigma^2}{\cos \Sigma} \right)$. Multipliant le second facteur par $\cos \Sigma$, & divisant le premier par la même quantité, on a $n = \frac{d\Sigma}{\cos \Sigma} (\cos \Sigma^2 + 2 \sin \Sigma^2) = \frac{d\Sigma}{\cos \Sigma} (\cos \Sigma^2 + \sin \Sigma^2 + \sin \Sigma^2)$: mais $\cos \Sigma^2 + \sin \Sigma^2 = 1$. Donc $n = \frac{d\Sigma}{\cos \Sigma} (1 + \sin \Sigma^2)$. Quant aux substitutions numériques, il ne peut y avoir de difficulté ; car puisque $\frac{\sin \Sigma}{\cos \Sigma} = \frac{1}{4}$, il s'ensuit que $\sin \Sigma = \frac{\cos \Sigma}{4}$, & $\sin \Sigma^2 = \frac{\cos \Sigma^2}{16}$; mais $\cos \Sigma^2 = 1 - \sin \Sigma^2$: donc $\sin \Sigma^2 = \frac{1 - \sin \Sigma^2}{16}$, d'où l'on tire $\sin \Sigma^2 = \frac{1}{17}$, & par conséquent $\sin \Sigma = \sqrt{\frac{1}{17}}$, & $\cos \Sigma = 4\sqrt{\frac{1}{17}}$. Substituant ces quantités dans la valeur de n, on a l'expression même de l'Auteur : d'où l'on conclura la valeur de $d\Sigma$ par les regles ordinaires de l'Algebre & de l'Arithmétique.

circonférence eſt $= 3,14$, le degré $= \frac{3,14}{180}$, & la minute $= \frac{3,14}{60.180}$. Nommant donc m le nombre des minutes contenu dans $d\Sigma$, nous aurons $\frac{3,14.m}{60.180} = \frac{\sqrt{17}}{144}$, & $m = \frac{75\sqrt{17}}{3,14} = 98'\frac{1}{2}$; c'eſt-à-dire que le nombre m de minutes, qui exprime le mouvement qu'il faut donner au plan, eſt de $98'\frac{1}{2}$. Donc, en augmentant l'inclinaiſon du plan ſeulement de $1^\circ 38'\frac{1}{2}$ en ſus de celle qu'il a, lorſque le corps A ſe maintient encore ſur le plan ſans ſe mouvoir, alors il commencera ſa courſe, en accélérant ſa vîteſſe de maniere qu'on ait au moins $u = t$: ce qui prouve, comme nous l'avons dit, la conformité de notre théorie avec la pratique.

CHAPITRE IX.

De l'effet du Frottement dans les Machines ſimples.

DÉFINITION XLVI.

(423.) ON appelle Machine tout inſtrument propre à faciliter le mouvement des corps.

DÉFINITION XLVII.

(424.) Les Machines ſe diviſent en ſimples & en compoſées; les Machines compoſées ſont celles dans la compoſition deſquelles il entre deux, ou un plus grand nombre de machines ſimples. Les ſimples ſont le *Levier*, le *Plan incliné*, le *Coin*, la *Vis*, le *Treuil*, ou *Cabeſtan*, & *la Poulie.*

SCOLIE.

(425.) On a déjà parlé du Levier à la fin du Chapitre IV. Il n'y a point de Frottement dans cette Machine, parce qu'elle n'a aucune de ſes parties qui ſe meuve étant poſée ſur une ſurface. Tout le Chapitre VII a été preſque employé au Plan incliné, & il nous a ſervi d'exemple pour déterminer le Frottement : mais, comme nous avons ſeulement conſidéré le cas où le corps A eſt déterminé à deſcendre, il nous reſte à préſent à réſoudre celui dans lequel il monte, & à examiner le mouvement de rotation qui peut avoir lieu, à cauſe du Frottement.

DU PLAN INCLINÉ.

DÉFINITION XLVIII.

(426.) On appelle *Plan Incliné*, un Plan qui n'eſt ni perpendicu-

laire, ni parallele à l'horison : si LE représente l'horison, BE sera un Plan incliné. PLANC. II. FIG. 37.

SCOLIE.

(427.) Le corps A qui est placé sur un Plan incliné, est déjà animé par une puissance qui agit sur lui ; cette puissance est la gravité qui agit suivant la direction verticale AD. L'action de cette puissance peut bien, comme nous l'avons déjà dit, faire descendre le corps, mais elle ne peut le faire monter. Pour produire ce dernier effet, il faut une autre puissance qui agisse sur le corps dans la direction EB, & qui soit non-seulement plus grande que la puissance $\alpha \sin \Sigma$, qui est dirigée suivant BE, mais plus grande que cette puissance jointe à la résistance du Frottement ; puisque toutes les deux s'opposent au mouvement du corps suivant EB. Dans le Chapitre précédent, nous avons exprimé les puissances qui doivent vaincre le Frottement par $\alpha \sin \Sigma$ & par θ, la premiere expression pour le cas où il n'y a pas d'autre puissance qui agisse sur le corps A, suivant la direction AD, que la puissance α ; & la seconde pour désigner la résultante quelconque qui agit pour mouvoir le parallélipipede suivant BE, laquelle est la même que $\alpha \sin \Sigma$ dans le premier cas. Ensorte que connoissant, de quelque maniere que ce soit, la résultante de la puissance, ou des puissances, dont l'action est dirigée suivant BE, ou EB ; & celle de la puissance, ou des puissances qui agissent dans la direction AH ; les valeurs de ces résultantes étant substituées, dans les formules, en place de celles dont on a fait usage dans les exemples où il s'agissoit de surmonter le Frottement ; on résoudra tous les cas du mouvement du corps A suivant BE.

PROPOSITION LVIII.

(428.) *Trouver la puissance nécessaire pour vaincre le Frottement, & faire monter un parallélipipede sur un Plan incliné.*

Nous avons déjà vu (392.), que, pour vaincre le Frottement sur un Plan incliné, dans le cas où U est$=0$, il faut avoir $\alpha \sin \Sigma = \frac{\alpha h \cos \Sigma}{H}$, Σ désignant l'angle HAD, ou BEL ; α la puissance unique qui anime le parallélipipede suivant AD ; $\alpha \sin \Sigma$, celle qui l'anime suivant BE ; & $\alpha \cos \Sigma$, celle qui l'anime suivant AH. Qu'une puissance θ agisse maintenant sur le parallélipipede suivant EB, nous aurons $\theta - \alpha \sin \Sigma$ pour l'expression de la puissance résultante suivant EB, laquelle étant substituée, dans l'équation précédente, en

place de $\alpha \sin \Sigma$, nous aurons, pour le cas du Frottement surmonté, ou pour le cas où le parallélipipede est sur le point de monter le long du Plan incliné, $\theta - \alpha \sin \Sigma = \frac{\alpha h \cos \Sigma}{H}$, d'où l'on tire $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$.

COROLLAIRE I.

(429.) Si l'on avoit $\sin \Sigma + \frac{h}{H} \cos \Sigma < 1$, on auroit aussi $\theta < \alpha$, & par conséquent il ne feroit pas nécessaire d'une si grande force pour faire monter le parallélipipede le long du plan, que pour l'élever verticalement : le Plan incliné facilitera, dans ce cas, l'opération ; & c'est pour cela qu'il est compté au nombre des Machines.

COROLLAIRE II.

(430.) Si l'on avoit $\sin \Sigma = 0$; ou, ce qui revient au même, si le plan étoit horisontal, il resteroit $\theta = \frac{\alpha h}{H}$, ou $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{h}{H}$: ensorte que plus h sera petit par rapport à H, plus θ sera petit par rapport à α.

COROLLAIRE III.

(431.) Comme on peut faire h presque infiniment moindre que H, soit en diminuant la grandeur & le nombre des aspérités, soit en interposant un corps étranger entre le plan & le parallélipipede, la puissance nécessaire pour mouvoir le parallélipipede horisontalement, peut être presque infiniment plus petite que α ; mais elle ne peut jamais devenir égale à zéro, à moins qu'on n'ait $h = 0$: ce qui est impossible dans la pratique.

COROLLAIRE IV.

(432.) Si l'on avoit $\sin \Sigma = 1$; ou, ce qui est la même chose, si le plan étoit vertical, ou s'il s'agissoit d'élever le parallélipipede sans le secours du Plan incliné, il resteroit $\theta = \alpha$: de sorte qu'il est toujours nécessaire, dans ce cas, d'employer une puissance égale au poids du corps qu'on veut élever.

COROLLAIRE V.

(433.) Si nous substituons dans la formule $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$, les valeurs de $H = lk$, de $h = nlk + kX$, trouvées, *Art.* 394, il en résultera $\theta = \alpha\,(\sin \Sigma + n \cos \Sigma + \frac{X}{l} \cos \Sigma)$; n marquant un nombre quelconque qui dépend de la grandeur des aspérités ; l la longueur du parallélipipede, & X la profondeur de l'impression que celui-ci fait dans le plan.

COROLLAIRE

COROLLAIRE VI.

(434.) Si l'on avoit $X = 0$; ou, ce qui eſt la même choſe, ſi le plan étoit très-dur, de ſorte qu'il ne ſe fît en lui aucune impreſſion ſenſible, on auroit $\theta = \alpha (\sin \Sigma + n \cos \Sigma)$.

COROLLAIRE VII.

(435.) Dans le cas où θ a ſa plus grande valeur, ou eſt un *maximum*, on a $d\theta = \alpha (d\Sigma \cos \Sigma - n d\Sigma \sin \Sigma) = 0$; ou $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$:* d'où l'on appercoit une ſingularité qui pourra paroître aſſez étrange, qui eſt que la force qu'on doit employer pour élever le corps verticalement, ne ſoit pas la plus grande ; mais celle qu'il faudroit employer pour l'élever le long d'un Plan incliné, dans lequel on auroit $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE VIII.

(436.) Si l'on ſubſtitue cette valeur dans $\theta = \alpha (\sin \Sigma + n \cos \Sigma)$, on aura la plus grande force $\theta = \alpha \sqrt{(1+n^2)}$; force qui eſt d'autant plus grande que α, à proportion que n, ou les aſpérités ſont plus grandes.

COROLLAIRE IX.

(437.) La formule ne donne pas la moindre valeur θ, à moins que $\sin \Sigma$ ne ſoit négatif : de ſorte que la puiſſance θ diminue toujours à meſure que $\sin \Sigma$ diminue ; & ce ſinus devenant enſuite négatif, on a $\alpha\left(-\sin \Sigma + n \sqrt{(1 - \sin \Sigma^2)}\right) = 0$, ou $-\sin \Sigma = n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, lorſque θ eſt zéro.

PROPOSITION LIX.

(438.) *Trouver la relation entre la puiſſance* λ *& la viteſſe* u *avec*

---

* Car de l'équation $\alpha (d\Sigma \cos \Sigma - n d\Sigma \sin \Sigma) = 0$, on tire, en diviſant par $\alpha d\Sigma$, & en tranſpoſant $n \sin \Sigma = \cos \Sigma = (1 - \sin \Sigma^2)^{\frac{1}{2}}$; donc, en quarrant, $n^2 \sin \Sigma^2 = 1 - \sin \Sigma^2$, & par conſéquent $\sin \Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. En ſubſtituant cette valeur de $\sin \Sigma$ dans celle de $\cos \Sigma$, on trouvera $\cos \Sigma = n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Quant à la conſéquence que ce Corollaire fournit, nous ne connoiſſons aucune expérience qui puiſſe la juſtifier : cependant on ſe convaincra aiſément de ſon évidence, en conſidérant que lorſque le Plan incliné eſt très-proche de la ſituation verticale, la puiſſance θ qui tire le corps parallélement au plan eſt à très-peu près égale à la puiſſance α qu'il faudroit employer pour l'élever vérticalement ; & que ſi, dans ce cas, n eſt d'une grandeur ſenſible ; c'eſt-à-dire, ſi la grandeur des aſpérités n'eſt pas ſuſceptible d'être négligée, il peut arriver que θ doive être alors plus grand que α Si l'on pouvoit avoir $n = 0$, ce qui auroit lieu, ſi le plan & le parallélipipede étoient infiniment liſſes, on auroit alors $\sin \Sigma = 1$, & $\theta = \alpha$ (432).

laquelle on veut que le parallélipipede s'éleve par le Plan incliné.

Par ce que nous avons démontré (409.), on a trouvé . . . . . . $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x \sin\Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\alpha \sin\Sigma$ marquant la puissance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Substituant maintenant à la place de $\alpha \sin\Sigma$, l'expression $\lambda - \alpha \sin\Sigma$, on aura $u =$ . . . . . . $\left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha\sin\Sigma)}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, U exprimant la vîtesse acquise par le parallélipipede, au moment qu'il est sur le point de vaincre la force φ de l'obstacle & des aspérités.

COROLLAIRE I.

(439.) Cette force φ a été trouvée (410.) $= Dh$; on aura donc aussi $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha\sin\Sigma)}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE II.

(440.) Si la vîtesse U étoit tellement petite, qu'on pût, sans erreur sensible, faire $U = 0$, il resteroit $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha\sin\Sigma - Dh)\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha\sin\Sigma - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$: ou bien à cause que, dans ce cas, (392.) $\varphi = \frac{h}{H}(\cos\Sigma)$*, $u = \left(\frac{2x}{A}\left(\lambda - \alpha\sin\Sigma - \frac{h}{H}\cos\Sigma\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(441.) En quarrant ces équations, & en ordonnant, on trouvera $\lambda = \alpha\sin\Sigma + Dh + \frac{Au^2}{2x} = \alpha\sin\Sigma + \varphi + \frac{Au^2}{2x} = \alpha\sin\Sigma + \frac{h}{H}\cos\Sigma + \frac{Au^2}{2x}$.

PROPOSITION LX.

(442.) *Trouver l'espace parcouru en montant par le parallélipipede par sa relation avec la vîtesse.*

Par ce qui a été démontré (413.), on a trouvé $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - Dh)}$,

---

* Il nous paroît difficile de concevoir ce passage : l'Auteur renvoie à *l'Article* 392 pour la substitution de la valeur de φ ; mais d'après cet Article, il nous semble que $\varphi = \frac{h}{H}\alpha\cos\Sigma$, & non $\frac{h}{H}\cos\pi$, comme on le trouve dans l'original. Le résultat de la substitution que fait l'Auteur, nous indique bien qu'il y a une faute d'impression, qu'on a mis $\cos\pi$ pour $\cos\Sigma$; mais il reste toujours à sçavoir pourquoi α ne se trouve pas dans la valeur de φ, comme paroît l'exiger l'Article auquel l'Auteur renvoie. Si notre remarque est juste, on doit avoir $u =$ . . . . $\left(\frac{2x}{A}\left(\lambda - \alpha\left(\sin\Sigma + \frac{h}{H}\cos\Sigma\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $= \left(\frac{2x}{A}\left(\lambda - \alpha\sin\Sigma - \frac{h}{H}\alpha\cos\Sigma\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, & non pas $u = \left(\frac{2x}{A}\left(\lambda - \alpha\sin\Sigma - \frac{h}{H}\cos\Sigma\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. Il faut appliquer ceci à tous les endroits suivants, où l'Auteur emploie la valeur de u, après y avoir substitué la valeur de φ.

θ exprimant la puissance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Substituant maintenant à la place de θ l'expression $\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma$, on aura $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - Dh)}$, ou $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \varphi)}$. PLANC. II.

Corollaire.

(443.) Si la vîtesse U étoit tellement petite, qu'on pût, sans erreur sensible, supposer $U = 0$, on auroit $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - Dh)}$; ou $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \varphi)} = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \frac{h}{H} \mathit{cof}\, \Sigma)}$.

Proposition LXI.

(444.) *Trouver l'espace parcouru en montant par le parallélipipede, par sa relation avec le temps employé à le parcourir.*

Par ce qui a été démontré (417.), on a trouvé $x = Ut + \frac{t^2(\theta - Dh)}{2A}$; θ exprimant la puissance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Substituant donc à la place de θ l'expression $\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma$, on aura $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - Dh)}{2A}$, ou $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \varphi)}{2A}$.

Corollaire.

(445.) Si la vîtesse U étoit assez petite pour qu'on pût, sans erreur sensible, supposer $U = 0$, il resteroit $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - Dh)$ $= \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \varphi) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \mathit{fin}\, \Sigma - \frac{h}{H} \mathit{cof}\, \Sigma)$.

Proposition LXII.

(446.) *Trouver le mouvement de rotation que doivent prendre les corps placés sur un Plan incliné, lorsqu'ils sont sans mouvement progressif.* FIG. 34. & 35.

Quelles que soient les puissances qui animent le corps A, qui pose, seulement par un point C, sur le Plan incliné FG; elles peuvent se décomposer en deux autres, l'une qui agisse parallélement, & l'autre perpendiculairement au plan : toutes les deux s'exerceront par réaction dans le point C, & aux distances AH, CH du centre de gravité A du corps. La gravité α qui agit dans la direction de la verticale AD, se décomposera dans les deux puissances $\alpha \mathit{fin}\, \Sigma$, & $\alpha \mathit{cof}\, \Sigma$: & s'il se joint à la premiere une autre puissance λ, positive, ou négative, qui agisse au centre de gravité, la réaction de ces puissances, qui est la résistance du Frottement, équivaudra à la somme $\alpha \mathit{fin}\, \Sigma \pm \lambda$ de ces deux puissances. La differencielle

de l'angle de rotation qu'elles produiront, sera donc (129 & *suiv. jusqu'à* 159) $= \frac{dt\int dt(\alpha \sin\Sigma \pm \lambda)AH \pm dt\int dt\alpha \cos\Sigma . CH}{S}$; le signe + du second terme ayant lieu, lorsque la perpendiculaire AH tombe au-dessous de l'appui C; & le signe —, quand elle tombe au-dessus : ensorte que cette quantité étant positive, le corps tournera vers la partie qui est au-dessous de l'appui C; & au contraire, si elle est négative.

COROLLAIRE I.

(447.) Si l'on suppose que $\lambda = n\,\alpha \sin\Sigma$, n marquant un nombre quelconque plus grand ou plus petit que l'unité, en substituant cette valeur dans l'expression de l'angle de rotation, elle deviendra . . . $\frac{dt\int dt(1 \pm n)\alpha \sin\Sigma . HA + dt\int dt\alpha \cos\Sigma . CH}{S}$.

COROLLAIRE II.

(448.) Puisque $\sin\Sigma : \cos\Sigma :: DH . AH$, on a $AH . \sin\Sigma = DH \cos\Sigma$: substituant cette valeur dans la derniere expression de l'angle de rotation, elle se changera en celle-ci, $\frac{dt\int\alpha dt \cos\Sigma(DH(1 \pm n) + CH)}{S} = \ldots$ $\frac{dt\int\alpha dt \cos\Sigma(DC \pm n . DH)}{S}$.

COROLLAIRE III.

(449.) Si, dès le commencement de l'action, on avoit $DC - n . DH = 0$; ou, ce qui revient au même, si $\alpha \sin\Sigma : n\alpha \sin\Sigma = \lambda :: DH : DC$, le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(450.) Si la gravité est la seule puissance qui agisse sur le corps, on aura $n = 0$, & l'expression de l'angle de rotation deviendra $= \frac{dt\int\alpha dt \cos\Sigma . DC}{S}$.

COROLLAIRE V.

(451.) Si l'on avoit $DC = 0$ dès le commencement de l'action, le corps ne tourneroit point : mais si DC a une valeur quelconque, ou, comme on s'exprime généralement dans la Méchanique, si la verticale AD, qui passe par le centre de gravité A, tombe au-dehors de l'appui C, le corps tournera.

PROPOSITION LXIII.

(452.) *Trouver la rotation que doivent prendre les corps placés sur un Plan incliné, lorsque le Frottement étant vaincu, le point d'appui est déjà en mouvement.*

La force, ou la résistance réunie de l'obstacle & des aspérités, est (384.) $\varphi = \frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 cos\Sigma^2 + \alpha cos\Sigma(X+Z))$; & elle est dirigée suivant CH parallélement au plan GF, & passe à la distance AH du centre de gravité du corps A : l'angle de rotation sera donc (129 & suiv.) $= \frac{dt}{S}\int \frac{i(hh')dt\,AH}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 cos\Sigma^2 + \alpha cos\Sigma(X+Z)) \pm \frac{dt}{S}\int \alpha dt\, cos\Sigma.CH$.

COROLLAIRE I.

(453.) La force, ou la résistance $\varphi = \frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}(\frac{1}{2}AU^2 cos\Sigma^2 + \alpha cos\Sigma(X+Z))$ est (383.) moindre que la puissance $\alpha\, sin\,\Sigma$, qui résulte de la gravité, & qui est dirigée parallélement au plan. Soit donc supposé $\alpha\, sin\,\Sigma - \lambda = \varphi$; en mettant cette valeur dans l'expression précédente de l'angle de rotation, elle deviendra $\frac{dt\int dt(\alpha\, sin\,\Sigma - \lambda).AH \pm dt\int \alpha dt\, cos\Sigma.CH}{S}$; ou en substituant (448.) en place de $sin\,\Sigma.AH$, sa valeur $DH.cos\Sigma$, & réduisant, on aura l'angle de rotation $= \frac{dt\int \alpha dt\, cos\Sigma.DC - dt\int \lambda dt.AH}{S}$.

COROLLAIRE II.

(454.) Si l'on avoit $DC = 0$; ou si la verticale AD, qui passe par le centre de gravité A, passoit aussi par l'appui C, l'expression de l'angle de rotation se réduiroit à $-\frac{dt\int \lambda dt.AH}{S}$.

COROLLAIRE III.

(455.) Le corps tournera donc vers la partie supérieure du plan, lorsque l'appui C est en mouvement, quoique la verticale AD passe par le point d'appui.

COROLLAIRE IV.

(456.) Non-seulement le corps tournera dans ce sens, dans le cas où $DC = 0$, mais encore dans tous ceux où l'on a $\lambda.AH > \alpha\, cos\Sigma.DC$: de maniere que, quoique DC soit positive, ou que la verticale AD tombe au-dessous de l'appui C, le corps peut tourner négativement, ou vers la partie supérieure du plan.

SCOLIE.

(457.) Ce qu'on vient de dire fait voir l'erreur de ceux qui, n'ayant pas examiné les corps en mouvement sur le Plan incliné, ont avancé qu'ils devoient toujours tourner vers la partie inférieure du plan, toutes les fois que la verticale AD tombe plus bas que l'appui C.

PLANC. II. FIG. 39.

DU COIN.

DÉFINITION XLIX.

(458.) On appelle communément *Coin* un Prisme tel que *ABCD*.

SCOLIE.

(459.) Si l'on place le coin entre deux corps *A* & *B*, & qu'on
FIG. 40. l'introduise entre ces deux corps par le moyen de la percussion, ou par l'action d'une puissance qui agisse en *C*, & dans la direction *CD*; les deux corps se sépareront, quoique les puissances qui les unissent soient plus grandes que celle qui agit sur le Coin.

PROPOSITION LXIV.

(460.) *Le Coin se réduit au Plan incliné.*

Quant à ce qui regarde l'effet, c'est la même chose de considérer les deux corps *A* & *B* comme fixes, & le Coin en mouvement, ou au contraire, le Coin fixe, & les deux corps en mouvement, puisque, dans l'un & l'autre cas, l'action dépend de la vîtesse respective. Nous pouvons donc supposer le Coin fixe, & qu'une puissance quelconque est appliquée aux corps, & agit sur eux dans la direction *DC*; mais on voit que ce cas se réduit à faire monter, ou à pousser les deux corps *A* & *B* le long des deux Plans inclinés *DI*, *DL*. Donc le Coin se réduit au Plan incliné.

COROLLAIRE I.

(461.) Les mêmes formules qui ont exprimé les effets du Plan incliné, doivent par conséquent exprimer ceux du Coin.

SCOLIE I.

FIG. 41. (462.) Pour l'ordinaire les deux corps *A* & *B* ne sont qu'un seul & même corps *M*, qu'on veut séparer ou fendre en deux, par le moyen du Coin, en augmentant la fente *EKF* vers *KM*. La puissance qui résiste vient de l'union, de la cohésion, ou de la force des particules, ou fibres du corps en *K*, & c'est cette résistance, ou cette cohésion, qu'il faut vaincre, ou rompre, par le moyen des puissances qui exercent leur action en *G* & *H*. Or, comme les fibres en *K* sont élastiques, elles cedent, ou se mettent en mouvement avant de se rompre. Ceci arrive seulement à un certain nombre de fibres, & par conséquent il y a un point tel que *M*, où elles se maintiennent fermes, & sans aucun mouvement, & sur lequel tournent les deux corps *A* & *B*. Les lignes *GKM*, *HKM* agissent donc

comme deux leviers de la seconde espece, fixes en M, au moyen desquels les puissances appliquées en G & H tendent à vaincre la résistance qui agit en K. La puissance en K sera donc à la puissance en G, comme MG est à MK : & pareillement elle sera à la puissance placée en H, comme MH est à MK.

Corollaire II.

(463.) Si l'on appelle α la puissance en K, celle placée en G sera $= \frac{MK}{MG} \cdot \alpha$; & celle placée en H sera $= \frac{MK}{MH} \cdot \alpha$.

Corollaire III.

(464.) L'action de ces deux puissances est perpendiculaire à MG, MH ; car les corps A & B tournant sur le point M, le mouvement des points G & H est dirigé perpendiculairement aux rayons MG, MH.

Scolie II.

(465.) Les fibres qui résistent en K sont de différentes especes, & placées à différentes distances du centre immobile M : les forces qu'elles exerceront, seront, par conséquent, différentes les unes des autres ; mais nous pouvons supposer que K est le centre de toutes ces fibres, ou le considérer comme le point où elles produiroient un effet égal, si elles y étoient toutes réunies. On doit entendre la même chose des puissances qui agissent en G & en H, puisque ces points doivent se prendre comme les centres de réunion de toutes les forces qui agissent pour former les impressions que fait le Coin autour de G & H, & dont les amplitudes sont H & H'.

Proposition LXV.

(466.) *Trouver la puissance nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, vaincre son frottement, & pour diviser les corps par son moyen.*

Puisque le Coin se réduit au Plan incliné (460.), nous pouvons nous servir de l'équation $\theta = \frac{\alpha(H \sin\Sigma + h \cos\Sigma)}{H}$ (428.), dans laquelle θ marque la puissance qui est dirigée suivant DI, & qui est nécessaire pour vaincre le frottement. Ainsi tout se réduit à substituer, dans cette équation, les vraies valeurs de θ, α & Σ. Que π soit la puissance qui agit sur le Coin en C, suivant la direction CD, si l'on mene la ligne GO parallele à IC, on aura $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{\pi}{n} = \theta$, n exprimant un nombre quelconque plus grand que l'unité, afin de ne prendre de la puissance π que la partie $\frac{1}{n}$ qui surmonte le frottement du

plan ID. De plus, l'angle DGM sera $= \Sigma$, puisque, dans le Plan incliné, Σ marquoit l'angle que forme la direction de la puissance en G, avec la perpendiculaire à ID : nous aurons donc, en abaissant la perpendiculaire DN sur GM, $\frac{DN}{DG} = \sin \Sigma$, & $\frac{NG}{DG} = \cos \Sigma$. La puissance qui agit en G est (463.) $= \frac{MK}{MG} \cdot \alpha$; c'est l'expression qu'il faut substituer, dans la formule, à la place de α seul. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'équation de l'*Art.* 428, nous aurons $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{\varkappa}{n} = \ldots \frac{\frac{MK}{MG} \cdot \alpha \left(\frac{DN.H}{DG} + \frac{NG.h}{DG} \right)}{H}$, ou $\frac{\varkappa}{n} = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h.)$ On trouvera de la même maniere que l'autre partie $\frac{(n-1)\varkappa}{n}$ de la puissance $\varkappa$ qui surmonte le frottement du plan LD, est $= \frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h')$. Donc $\frac{\varkappa}{n} + \frac{(n-1)\varkappa}{n} = \varkappa = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h) + \ldots\ldots\ldots \frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h')$.

Corollaire I.

(467.) Si le point M étoit infiniment éloigné de K ; & si en même temps on supposoit le frottement nul, ou $= 0$, on auroit $\varkappa = \frac{\alpha.DN}{DO} + \frac{\alpha.DQ}{DP}$; mais, dans ce cas, GM & HM sont paralleles à CM, ou $DN = GO$, & $DQ = HP$: donc .... $\frac{\alpha.GO}{DO} + \frac{\alpha.HP}{DP} = \frac{\alpha.IC}{CD} + \frac{\alpha.CL}{CD} = \frac{\alpha.IL}{CD}$; ce qui donne $\alpha : \varkappa :: CD : IL$.

Scolie I.

(468.) Ce rapport $\frac{\varkappa}{\alpha} = \frac{IL}{CD}$, est celui que donnent généralement tous les Auteurs pour la relation des forces $\varkappa$ & α qu'exerce le Coin. Cette relation n'est certaine que lorsque le frottement est zéro, & que le point M est à une distance infinie ; cas qui sont l'un & l'autre impossibles. Le dernier peut seulement s'admettre lorsqu'il est question d'écarter avec le Coin deux corps déjà séparés, dans une direction parallele à IL ; parce que, dans ce cas, le point K tombe sur les appuis G & H : & M est comme à une distance infinie, à cause que GM & HM sont paralleles à CD.

Scolie II.

(469.) On peut de même supposer que $MK = MG$, & le frottement presque nul au commencement de l'action du Coin, ou lorsque celui-ci n'est encore enfoncé dans le corps que d'une quantité infiniment

infiniment petite; car, dans ce cas, les points M, K, G & H, se confondent, & le frottement peut être peu sensible. Dans tous les autres cas, l'égalité $\frac{n}{a} = \frac{IL}{CD}$, que donnent généralement tous les Auteurs, ne peut avoir lieu, & l'erreur qui en résulte devient notable.

Corollaire II.

(470.) Si la partie IDC du Coin étoit égale & semblable à l'autre partie LDC, comme on le fait communément, on auroit $MH = MG$, $DP = DO$, $DQ = DN$, $QH = NG$, $H = H'$, & $h = h'$; ce qui réduit l'équation à $n = \frac{MK.2a}{MG.DO.H}(DN.H + NG.h)$.

Corollaire III.

(471.) La puissance n, nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, est, selon tous les Auteurs, & selon ce qu'on a dit (467.) $n = \frac{a.IL}{CD} = \frac{2a.IC}{CD} = \frac{2a.GO}{DO} = \frac{MG.H.2a.GO}{MG.DO.H}$; & suivant notre théorie, $n = \frac{MK.2a}{MG.DO.H}(DN.H + NG.h)$. La force indiquée par tous les Auteurs, sera donc à celle fournie par notre théorie, comme $MG.GO.H$, est à $MK(DN.H + NG.h)$, ou comme $\frac{MG.GO}{MK}$ est à $DN + \frac{NG.h}{H}$; d'où l'on voit que cette force peut, suivant notre théorie, être infiniment moindre que celle qu'ont donné tous les Auteurs; & l'on voit, par conséquent aussi, dans quelle erreur ils sont tombés.

Proposition LXVI.

(472.) *Déterminer dans quelle circonstance le Coin retournera en arriere, la puissance n cessant d'agir.*

Lorsque la puissance n cesse d'agir, ou que $n = 0$, le frottement devient négatif; par conséquent l'équation qui exprime le cas où le frottement est surmonté, devient $\frac{DN.H - NG.h}{MG.DO.H} + \frac{DQ.H' - QH.h'}{MH.DP.H'} = 0$; & lorsque les deux moitiés ICD, LCD du Coin sont égales & semblables, $DN.H - NG.h = 0$; ou $\frac{DN}{NG} = \frac{h}{H}$.

Corollaire I.

(473.) Il suit de là que toutes les fois qu'on aura $\frac{DN}{NG} > \frac{h}{H}$, le Coin retournera en arriere, aussi-tôt que la puissance n cessera d'agir.

Corollaire II.

(474.) La rétrogradation du Coin ne dépend donc pas seulement

de la grandeur de l'angle *IDL*, comme le disent généralement tous les Auteurs, mais de cet angle, & des rapports $\frac{DN}{NG}$ & $\frac{h}{H}$.

SCOLIE.

(475.) Il y a plusieurs autres instruments qui se réduisent aussi au Coin & au Plan incliné, comme le Couteau, & la Hache avec laquelle on taille & divise les bois. L'action de la Hache dépend de la vîtesse avec laquelle elle tombe, ou elle choque. Ainsi l'équation qui exprime son effet, ne dépend pas de celle qui détermine le cas dans lequel on suppose la puissance employée à vaincre le frottement; mais de celle dans laquelle on suppose le frottement déja vaincu, & que la Hache, le Coin, ou le Plan incliné, se meut avec une certaine vîtesse.

PROPOSITION LXVII.

(476.) *Déterminer l'effet de la Hache.*

Comme la Hache est un instrument qui se réduit au Coin & au Plan incliné, nous pouvons faire usage de l'équation (438.) $u = (U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha \sin \Sigma)}{A} - \frac{2Dhx}{A})^{\frac{1}{2}}$, & y substituer (466.) $\frac{DN}{DG}$ en place de $\alpha \sin \Sigma$, & $\frac{MK}{MG}.\alpha$ en place de α seul. En outre, la puissance λ est, dans ce cas, $=0$, parce que la Hache agit par la seule vîtesse U avec laquelle elle surmonte le frottement. Substituant donc toutes ces quantités, on aura $u = (U^2 - \frac{2x.\frac{MK.\alpha}{MG}.\frac{DN}{DG}}{A} - \frac{2Dhx}{A})^{\frac{1}{2}}$. Mais lorsque la Hache a produit tout son effet, elle s'arrête, & dans ce moment on a $u=0$: donc, quand la Hache a produit tout son effet, nous avons $U^2 = \frac{2x}{A}(\frac{MK.DN.\alpha}{MG.DG} + Dh)$, ou $x = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DG}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh}$. Comme la quantité x est l'espace parcouru suivant le plan *DI*; en nommant z celui parcouru suivant le plan *DC*, nous aurons $x : z :: ID : DC$, ou $x = \frac{DI.z}{DC}$: cette valeur étant substituée dans l'équation, donne l'espace parcouru par la Hache, ou son effet $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DG.CD}{ID(MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh)}$; mais, par la construction, $\frac{DG.CD}{ID} = DO$: donc $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DO}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh}$.

COROLLAIRE.

(477.) L'effet de la Hache sera donc constamment proportionnel au produit de sa masse *A*, ou de sa gravité, par le quarré U^2 de la vîtesse avec laquelle elle frappe le bois.

DE LA VIS.

Plan. II. Fig. 43.

DÉFINITION L.

(478.) La *Vis* est un Plan incliné appliqué autour d'un Cylindre concave *ABCD*, sur lequel tourne un autre Plan incliné semblable au premier qui environne un autre Cylindre convexe *AC*.

DÉFINITION LI.

(479.) Le Cylindre convexe, avec le Plan qui lui est appliqué, est ce qu'on appelle vulgairement la *Vis*, & on donne le nom d'*Ecrou* au Cylindre concave. On donne aussi au premier le nom de *Vis mâle*, & au second le nom de *Vis femelle*; ces dernieres dénominations sont sur-tout employées par les ouvriers.

DÉFINITION LII.

(480.) Chaque tour que font les Plans inclinés appliqués aux Cylindres, s'appelle *Spire*, *Filet*, ou *Pas de la Vis.*

SCOLIE.

(481.) S'il y a un poids *Q*, ou une puissance appliquée en *F*, dirigée suivant l'axe *EF* de la Vis, & une autre appliquée en *P*, au levier *EP*, agissant suivant une direction perpendiculaire au même axe; l'action de cette puissance fera tourner la Vis, son Plan incliné s'élevant le long de celui de l'écrou, & par conséquent elle élevera le poids *Q*, ou surmontera la puissance appliquée en *F*.

COROLLAIRE.

(482.) De ceci on pourroit conclure que la Vis ne doit pas se compter au nombre des Machines simples, puisqu'elle est composée d'un Plan incliné & d'un Levier; mais on ne peut pas contester qu'elle n'en soit toujours une, tant que la longueur du Levier n'excede pas le rayon du Cylindre.

PROPOSITION LXVIII.

(483.) *Trouver la puissance nécessaire pour vaincre le Frottement, & mettre la Vis en mouvement.*

La valeur de la puissance qui agit parallélement aux filets de la Vis, est (428.) $\theta = \frac{\alpha(H \sin \Sigma + h \cos \Sigma)}{H}$. La puissance qui presse les deux plans l'un contre l'autre est supposée en *F*, & dirigée suivant *EF*.

Suppofons que cette puiffance foit repréfentée par α; l'angle que forme fa direction avec la perpendiculaire aux plans, ou aux filets, eft le même que celui que forment ces mêmes filets avec la perpendiculaire à l'axe EF. On peut par conféquent conferver les caracteres α & Σ, ils défigneront les mêmes chofes que dans la formule; fçavoir, α la puiffance appliquée en F, & dirigée fuivant l'axe EF; & Σ l'angle que forment les filets de la Vis avec la perpendiculaire au même axe. Cela pofé, la puiffance π qui doit vaincre le frottement, & qu'on fuppofe placée en P, agiffant perpendiculairement à l'axe, & à la diftance R de cet axe, on aura $R\pi$ pour fon moment: & fi nous nommons r la diftance perpendiculaire de l'axe aux filets, ou le rayon de la Vis, on aura $r\theta = \frac{r\alpha(H \sin\Sigma + h \cos\Sigma)}{H}$ pour le moment du frottement; ce qui nous donnera pour le vaincre, $R\pi = r\theta = \frac{r\alpha(H \sin\Sigma + h\cos\Sigma)}{H}$, d'où l'on tire $\pi = \frac{r\alpha}{R.H}(H \sin\Sigma + h \cos\Sigma)$.

COROLLAIRE I.

(484.) Donc fi la puiffance π étoit moindre que $\frac{r\alpha}{R.H}(H \sin\Sigma + h \cos\Sigma)$, la Vis ne pourroit tourner, & par conféquent elle refteroit fans mouvement.

COROLLAIRE II.

(485.) La vis étant une fois mife en mouvement, & y étant maintenue avec une vîteffe conftante, elle doit continuer de fe mouvoir avec la même vîteffe, fi les puiffances qui agiffent fe détruifent mutuellement; ce qui arrive tant que la puiffance appliquée eft fuffifante pour furmonter le frottement, qui eft toujours le même, tant dans le cas du mouvement, qu'au moment où il eft furmonté. La puiffance néceffaire pour maintenir la Vis en mouvement, avec une vîteffe conftante déjà acquife, eft donc auffi $\pi = \ldots\ldots \frac{r\alpha}{R.H}(H \sin\Sigma + h \cos\Sigma)$.

COROLLAIRE III.

(486.) Si l'on fuppofe le frottement nul, ou fi $h = 0$, l'équation qui exprime le cas où la Vis commence à fe mettre en mouvement, fe changera en $\pi = \frac{r.\alpha.\sin\Sigma}{R}$: ou, fi nous appellons C la circonférence qui décrira le point P où l'on applique la puiffance π, & c la circonférence de la Vis, cette puiffance π fera auffi $= \frac{c\alpha \sin\Sigma}{C}$. Mais le rayon eft à $\sin\Sigma$, comme la circonférence c eft à la diftance d'un filet de la Vis à l'autre; ou, comme on s'exprime commu-

nément, à la *hauteur du pas de la Vis* : donc, en nommant a cette hauteur, on aura $c\,\mathit{fin}\,\Sigma = a$, & $\pi = \frac{\kappa.a}{C}$; d'où l'on tire $\Sigma : \alpha :: a : C$; c'est-à-dire, la puissance qui anime la Vis est à celle qu'on doit vaincre par le moyen de cette machine, comme la distance d'un filet à l'autre, ou la hauteur du pas, est à la circonférence C que décrit la puissance π.

COROLLAIRE IV.

(487.) Comme cette théorie est celle que les Auteurs enseignent généralement, il s'ensuit que, dans leurs calculs, ils ont fait abstraction du frottement.

PROPOSITION LXIX.

(488.) *Trouver le cas dans lequel la Vis rétrogradera, la puissance π cessant d'agir.*

Lorsque la puissance π cesse d'agir, le frottement devient négatif, & l'équation, pour le cas où la vis rétrogradera, en surmontant le frottement, sera $o = \frac{r.\alpha}{R.H}(H\,\mathit{fin}\,\Sigma - h\,\mathit{cof}\,\Sigma)$, ou $\mathit{fin}\,\Sigma = \frac{h}{H}\,\mathit{cof}\,\Sigma$. Donc tant qu'on aura $\mathit{fin}\,\Sigma > \frac{h}{H}\,\mathit{cof}\,\Sigma$, la Vis rétrogradera aussitôt que la puissance π cessera d'agir.

PROPOSITION LXX.

(489.) *Trouver la relation entre la puissance appliquée à la Vis, & la vîtesse avec laquelle elle se mouvera après avoir surmonté le frottement.*

La formule qui correspond à ce cas est (438.) $u = \ldots\ldots$ $\left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha\,\mathit{fin}\,\Sigma)}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; substituant dans cette formule $\frac{R\lambda}{r}$, au lieu de λ seul, en supposant que λ soit la puissance qui qui agisse à l'extrémité P du levier : & supposant de plus, comme il convient, que la vîtesse U avec laquelle la Vis commence à surmonter le frottement, est négligeable, ou que $U = o$, on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha\,\mathit{fin}\Sigma - Dh$; ou en substituant (410.) la force φ du frottement en place de Dh, on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha\,\mathit{fin}\,\Sigma - \varphi = \frac{R\lambda}{r} - \alpha\,\mathit{fin}\,\Sigma - \frac{h}{H}\,\mathit{cof}\,\Sigma$.

PROPOSITION LXXI.

(490.) *Trouver la relation entre le temps, la puissance appliquée à la Vis, & l'espace que parcourra la Vis dans la direction de son axe.*

PLANC. II. La formule qui correspond à ce cas est (445.) $x = \ldots\ldots$ $\frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \sin \Sigma - Dh)$, en y substituant $\frac{R\lambda}{r}$ en place de λ seul. Mais x exprime l'espace que parcourent respectivement les deux plans, & cet espace est à celui que parcourt la Vis dans le sens de son axe, & que nous pouvons appeller z, comme 1 est à $\sin \Sigma$. Donc $x = \frac{z}{\sin \Sigma}$, ce qui donne $z = \frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - Dh\right) = \ldots$ $\frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \varphi\right) = \frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma\right)$.

DU TREUIL, ou CABESTAN.

DÉFINITION LIII.

FIG. 43. & 44. (491.) On appelle *Treuil* un Cylindre qu'on fait tourner par le moyen d'un levier qu'on y applique.

Le Treuil, ou Cylindre *AB*, soit qu'il soit horisontal, vertical, ou oblique, étant soutenu par les deux piliers, ou appuis *C*, *D*, tourne, par l'action d'une puissance appliquée en *F*. sur le levier *FE*, qui est perpendiculaire à l'axe, & fixé dans le Cylindre; & cette puissance est dirigée perpendiculairement à l'axe & au levier. Cette machine doit, en conséquence, vaincre la puissance placée en *Q*, dont la direction est aussi perpendiculaire au Cylindre sur lequel elle agit, soit par une ligne flexible *QG* qui s'enveloppe autour du même Cylindre, à mesure qu'il tourne; soit parce que *QG* est un autre levier fixé aussi dans ce Cylindre.

COROLLAIRE I.

(492.) Il est indifférent qu'il y ait plusieurs leviers, ou plusieurs puissances qui agissent sur le Treuil, ou que ce soit une roue, comme *HIKL*, avec différentes puissances qui agissent dans sa circonférence: car, par ce qu'on a déjà dit, on peut toujours réduire toutes ces puissances à une seule appliquée à une distance déterminée de l'axe.

COROLLAIRE II.

(493.) Le Treuil est donc un levier de la premiere, seconde, ou troisieme espece, selon la situation & la distance de la puissance placée en *Q* par rapport à l'axe.

PROPOSITION LXXII.

(494.) *Trouver, dans le Treuil, la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, & mettre la machine en mouvement.*

Soit GEF le Cylindre, & C son centre : soit supposé de plus, qu'à l'extrémité L du levier CL, on fasse agir la puissance λ dans la direction LH perpendiculaire à CL. Soit pareillement la puissance α appliquée à l'extrémité A du levier CA, dont la direction soit perpendiculaire à CA, & dont l'action doive surmonter la précédente. Appellant Σ l'angle sous lequel se coupent les deux directions LH, AI, soit tiré les lignes DB, CD, paralleles à ces directions, & proportionnelles aux mêmes puissances λ & α ; il est clair que CB sera (57 & *suiv.*) la direction de la puissance résultante des deux, & lui sera proportionnelle, ou exprimera sa valeur. PLANC. II. FIG. 45.

Cela posé, le sinus de DCL étant $= cos\,\Sigma$, CB qui est la puissance résultante des deux λ & α, sera $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cos\,\Sigma}$.* Le signe supérieur de la quantité $2\lambda\alpha\, cos\,\Sigma$, est pour le cas où l'angle BDC est obtus, & l'inférieur pour celui où il est aigu. Or, l'effet de cette puissance est de comprimer le Cylindre, en le faisant appuyer dans le point G de sa direction CB, de la même maniere que s'il appuyoit sur un Plan tangent au Cylindre dans le point G, & auquel la direction CB de la puissance résultante seroit perpendiculaire. La puissance nécessaire pour vaincre le frottement qui s'exerce dans le point G, sera donc (392.) $= \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cos\,\Sigma}$. Maintenant, la puissance qui agit pour faire tourner le Treuil, est λ, & elle est appliquée en L ; mais en la réduisant à une autre placée en G, elle sera $\frac{R}{r}\lambda$, R marquant la longueur du levier CL, & r le rayon CE du Treuil. L'autre puissance qui agit négativement est α, & elle est appliquée en A ; mais en la réduisant à une autre placée en G, elle sera $\frac{R'}{r}\alpha$, R' marquant la longueur du levier CA. Nous aurons donc, pour le cas de l'équilibre, ou pour le moment où le frottement est près d'être vaincu, $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R'}{r}\alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cos\,\Sigma}$; d'où l'on tire, en réduisant & en ordonnant, ...

$$\lambda = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2r^2\, cos\,\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR' + h^2r^2\, cos\,\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2 - h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2}}.$$

COROLLAIRE I.

(495.) La puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, &

* Car puisque l'angle L est droit, DCL est le complément de l'angle formé par les lignes LH CD, qui est égal à celui des lignes LH, AI, c'est-à-dire, $= \Sigma$; le sinus de DLC est donc $cos\,\Sigma$. A cause des paralleles BD, LH, l'angle BDH est encore $= \Sigma$: donc, en abaissant la perpendiculaire Br, on a $Dr = BD\, cos\,\Sigma = \lambda\, cos\,\Sigma$. Donc, &c.

mettre la machine en mouvement, est donc toujours proportionnelle à la puissance α.

COROLLAIRE II.

(496.) En faisant varier l'angle Σ, ou la situation du levier CL, la situation de la puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, variera aussi : donc il y a une plus grande & une moindre valeur de λ qui dépend de celle de Σ, ou de la situation du levier CL.

PROPOSITION LXXIII.

(497.) *Trouver la plus grande & la plus petite valeur de la force qui peut vaincre le frottement dans le Treuil.*

Si nous supposons λ & Σ variables, & les autres quantités constantes; & si nous différencions l'équation $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R'}{r}\alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos\Sigma}$, la différencielle sera $\frac{R}{r}\, d\lambda = \frac{h}{H} \cdot \frac{\lambda d\lambda \pm \alpha d\lambda \cos\Sigma \mp \lambda\alpha d\Sigma \sin\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos\Sigma}}$; mais, dans le cas où il s'agit de l'action la plus grande, ou de la moindre puissance λ, on a $d\lambda = 0$: on aura donc, dans ce cas, $0 = \frac{\mp \lambda\alpha d\Sigma \sin\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos\Sigma}}$, ou $\sin\Sigma = 0$. Cette valeur substituée dans celle de λ, donnera la plus grande & la plus petite puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, & l'on aura, dans ce cas, $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2r^2)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR' \pm h^2r^2)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2 - h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2}} = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2r^2 + Hhr(R \pm R'))}{H^2R^2 - h^2r^2} = \frac{\alpha(HR' + hr)}{HR \mp hr}$, en divisant le numérateur & le dénominateur par $HR \pm hr$. La plus grande puissance λ sera donc $= \frac{\alpha(HR' + hr)}{HR - hr}$; elle a lieu lorsque le levier CL est à la partie opposée au levier CA, & que tous les deux ne forment qu'une même ligne : & la moindre puissance $\lambda = \frac{\alpha(HR' + hr)}{HR + hr}$; elle a lieu quand le levier CL coïncide avec le levier CA.

COROLLAIRE I.

(498.) Il y aura donc toujours de l'avantage à faire que les deux leviers coïncident le plus qu'il est possible; & si l'on emploie cette disposition, la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, sera, comme auparavant, $\lambda = \frac{\alpha(HR' + hr)}{HR + hr}$.

COROLLAIRE II.

(499.) Il est encore avantageux de tâcher d'avoir $R > R'$, ou que le levier CL soit le plus long qu'il est possible, parce qu'alors le dénominateur de l'expression devient plus grand.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

(500.) Si l'on avoit $R = R'$, λ deviendroit $= \frac{\alpha(HR+hr)}{HR\mp hr}$, d'où l'on voit que, dans le cas où les deux leviers coïncident, la machine ne donne aucun avantage, & qu'elle produit même du désavantage dans celui où les leviers sont dans des situations opposées.

COROLLAIRE IV.

(501.) Si l'on avoit $R < R'$, la machine seroit désavantageuse dans les deux cas, parce qu'alors on a $\lambda > \alpha$.

COROLLAIRE V.

(502.) Pour connoître dans quel cas la machine cessera de produire aucun avantage, dans la supposition que les leviers sont dans des situations opposées, il n'y a qu'à supposer $\alpha = \lambda$ dans l'équation $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR-hr}$, & l'on aura $HR - hr = HR' + hr$, ce qui donne $R = \frac{HR'+2hr}{H}$: c'est la longueur que doit avoir le levier *CL*, pour que, dans ce cas, la machine cesse de produire aucun avantage.

COROLLAIRE VI.

(503) Il y aura pareillement de l'avantage à diminuer la quantité r, non-seulement dans le cas où l'on auroit $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR-hr}$, parce qu'alors le numérateur est diminué, & le dénominateur augmenté; mais aussi dans celui où l'on auroit $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR+hr}$. Car, quoique, dans ce dernier cas, le dénominateur soit diminué, ainsi que le numérateur, il faut observer qu'il ne diminue pas dans une si grande raison que le numérateur, à cause qu'on suppose $R' < R$ pour obtenir de l'avantage.

COROLLAIRE VII.

(504.) Si l'on suppose le frottement nul, alors $h = 0$, & l'expression deviendra en général $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR'+0)}{H^2R^2-0}$ + ... $\alpha\sqrt{\frac{(H^2RR'+0)^2}{(H^2R^2-0)^2} - \frac{H^2R'^2-0}{H^2R^2-0}} = \frac{\alpha R'}{R}$: expression dans laquelle la quantité Σ s'étant évanouie, il s'ensuit qu'en supposant le frottement nul, la situation du levier *CL* devient indifférente.

SCOLIE I.

(505.) On voit encore ici une erreur dans laquelle sont tombés généralement tous les Auteurs de Méchanique, en supposant que la

PLANC. II. ſituation du levier CL eſt abſolument indifférente, & en faiſant $\lambda = \frac{\alpha R'}{R}$ dans tous les cas. Quelques-uns, à la vérité, ont remarqué qu'il eſt néceſſaire d'augmenter la puiſſance λ proportionnellement à ce que le frottement exige ; mais toujours ſans faire aucune mention de la ſituation du levier CL, dont cependant nous avons vu l'influ[ence] ſur la valeur de λ.

COROLLAIRE VIII.

(506.) Si, au lieu d'un ſeul levier CL, il y en avoit deux égaux & oppoſés, avec des puiſſances égales appliquées à leurs extrémités, on auroit $DB = 0$; & la puiſſance qui comprime le Cylindre du Treuil, & qui produit le frottement, ſe réduiroit à la puiſſance α ; & celle qui eſt néceſſaire pour le vaincre, à $\frac{h}{H}\alpha$: on aura donc, pour le cas préſent, $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{h}{H}\alpha$; d'où l'on tire en général $\lambda = \frac{\alpha(HR' + hr)}{HR}$; expreſſion dans laquelle λ déſigne la ſomme des deux puiſſances égales qui agiſſent aux extrémités des deux leviers égaux & oppoſés.

COROLLAIRE IX.

(507.) On doit entendre la même choſe pour les cas [où les le]viers ſeroient en beaucoup plus grand nombre, pourvu qu['ils ſoient] tous égaux, & que les puiſſances qu'on y applique ſoient auſſi [égales,] & diſpoſées de maniere que les poſitives détruiſent les négatives.

COROLLAIRE X.

FIG. 43. & 44. (508) La même choſe arrivera dans la roue $HIKL$, pourvu qu'on applique des puiſſances égales aux extrémités de ſes diametres.

COROLLAIRE XI.

(509.) Il ſera donc encore avantageux, dans tous ces cas, non-ſeulement qu'on augmente R, mais qu'en général on diminue r.

COROLLAIRE XII.

(510.) Le Treuil étant une fois mis en mouvement, & ayant acquis une viteſſe conſtante, il doit continuer avec cette même viteſſe, ſi les puiſſances qui agiſſent ſe détruiſent mutuellement. Or c'eſt ce qui arrive en ſurmontant continuellement le frottement, parce que la réſiſtance du frottement eſt la même dans le cas du mouvement, qu'au moment où il eſt ſurmonté. La puiſſance néceſſaire pour maintenir le Treuil en mouvement, avec une viteſſe conſtante déjà

acquise, sera donc $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR}$, dans le cas de la roue, ou dans celui de puissances égales, qui agissent à l'extrémité de leviers égaux & opposés ; & lorsqu'il n'y en a qu'une seule à agir, $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2r^2 \cos\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR' \pm h^2r^2 \cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2 - h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2}}$.

COROLLAIRE XIII.

(511.) Une puissance quelconque, plus grande que celle exprimée par λ, peut donner au Treuil une vitesse déterminée : celle ci une fois employée pendant le temps nécessaire, il n'est alors besoin, pour lui conserver le même mouvement, que d'employer la puissance λ.

SCOLIE II.

(512.) Pour ne pas trop compliquer le calcul, on n'a pas voulu y introduire la puissance qui provient de la pesanteur de la machine même ; mais il est facile d'y avoir égard, en la supposant réunie à la puissance α, ou en supposant que la puissance α soit composée de celle qui agit en Q, & de celle que produit la pesanteur de la machine, & pareillement que AI est la direction de cette puissance qui résulte des deux. Fig. 43 & 44. Fig. 45

COROLLAIRE XIV.

(513.) On voit clairement, par tout ceci, que, dans le Treuil, il sera avantageux de faire ensorte que la puissance qui provient de la pesanteur de la machine, s'oppose, autant qu'il est possible, à celle qui agit en Q, parce qu'à ce moyen, l'effet de celle-ci diminuera.

COROLLAIRE XV.

(514.) Dans le Treuil vertical, l'action de la puissance qui provient de la pesanteur, ne se fait point sentir, parce qu'elle agit dans la direction de l'axe ; mais il en résultera un frottement, qui sera d'autant plus petit, que l'appui, ou le point sur lequel porte le poids de la machine, sera moins éloigné du centre du Treuil.

DE LA POULIE.

DÉFINITION LIV.

(515.) On donne le nom de *Poulie* à une petite roue qu'on fait tourner sur un axe, ou essieu, par le moyen d'une ligne flexible appliquée à sa circonférence.

On fait, dans une piece de bois, ou de quelque autre matiere

PLANC. II. FIG. 46. solide, une ouverture LI propre à recevoir la roue IGL, qu'on appelle le *Rouet*, qui tourne sur l'axe C, lequel axe porte dans la piece BD qu'on appelle la *Chappe*. On rend stable cette derniere piece en B, & une puissance appliquée en H, à la ligne flexible $HLIA$, qui passe sur le Rouet, agit dans la direction LH de la même ligne. L'action de cette puissance se communique à IA, & surmonte une autre puissance appliquée en A, laquelle est dirigée suivant IA.

COROLLAIRE I.

(516.) Les puissances appliquées en H & A agissent de la même maniere que si elles étoient placées aux points L & I, où les lignes HL & AI sont tangentes à la roue : d'où l'on voit que la Poulie se réduit à un Treuil dont les leviers $CL = R$, & $CI = R'$, sont égaux entre eux.

COROLLAIRE II.

(517.) L'équation générale (510.), qui exprime la relation entre les puissances λ & α, qui agissent en H & A, ou en L & I, se réduit, dans la Poulie, à $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha \sqrt{\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1}$.

COROLLAIRE III.

(518.) La puissance λ, nécessaire pour vaincre le frottement, est donc proportionnelle à la puissance α qu'il s'agit de surmonter.

COROLLAIRE IV.

(519.) La plus grande & la plus petite valeur de la puissance λ auront donc lieu lorsque (497.) on aura $\sin\Sigma = 0$. Sa plus grande valeur sera $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$, & sa plus petite sera $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR + hr} = \alpha$.

COROLLAIRE V.

(520.) Le cas de la plus petite valeur de la puissance λ, laquelle $= \alpha$, ne peut jamais avoir lieu dans la Poulie, parce qu'il seroit nécessaire, pour ce cas, que la puissance IA fût dirigée du côté opposé, ou suivant HL, & alors la ligne flexible n'agiroit plus sur le Rouet de la Poulie.

COROLLAIRE VI.

(521.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puissance $\lambda = \frac{\alpha(HR + hr)}{HR - hr}$, il faut que l'axe du Rouet soit le plus petit qu'il est pos-

ſible, parce que, par-là, la valeur de λ ſera diminuée, non-ſeulement par la diminution qui en réſulte dans le numérateur, mais encore par l'augmentation du dénominateur.

SCOLIE.

(522.) On pourroit demander de quelle utilité peut être la Poulie; car la ligne *HLIA* étant libre ſur le Rouet *IL*, ou n'en dépendant en aucune façon, on peut penſer qu'elle courra ſur le Rouet, celui-ci demeurant fixe, c'eſt-à-dire, ſans ſe mouvoir ſur ſon axe *C*. En effet, la puiſſance λ, appliquée en *H*, tire la ligne, & celle-ci la puiſſance en *A*: or il paroît que ce mouvement peut s'exécuter ſans qu'il ſoit néceſſaire que le Rouet ſe meuve ſur l'axe *C*. Pour faire diſparoître ce doute, il ſuffira de prouver que les forces qui réſiſtent, dans le cas du mouvement ſur l'axe, ſont moindres que lorſqu'il ſe fait ſur le Rouet fixe; ou, ce qui eſt la même choſe, que λ eſt moindre dans le premier cas que dans le ſecond.

PROPOSITION LXXIV.

(523.) *Déterminer ſi, dans la Poulie, le mouvement doit ſe faire ſur l'axe, & non ſur le Rouet fixe.*

La puiſſance $\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+a^2\pm 2\lambda a \cos\Sigma}$, qui ſurmonte le frottement, a été égalée (494.) à la différence des deux puiſſances appliquées en *L* & en *I*, mais après les avoir réduites à l'axe, lorſque c'eſt ſur l'axe *C* que ſe fait le mouvement. Dans le cas où le mouvement ſe feroit ſur la circonférence du Rouet, il n'eſt pas néceſſaire de réduction, parce que c'eſt à cette circonférence qu'elles ſont appliquées. Nous aurons donc pour ce cas, $\lambda - a = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+a^2\pm 2\lambda a \cos\Sigma}$, ou . . . . . $\frac{R}{R}\lambda - \frac{R}{R}a = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+a^2\pm 2\lambda a \cos\Sigma}$; expreſſion qui eſt la même que celle donnée, *Article* 494, ſi nous faiſons $R = R'$, & $R = r$. Subſtituant donc cette valeur dans l'équation $\lambda = \frac{a(H^2R^2\pm h^2r^2\cos\Sigma)}{H^2R^2-h^2r^2} + a\sqrt{\frac{(H^2R^2\pm h^2r^2\cos\Sigma)^2}{(H^2R^2-h^2r^2)^2}-1}$, qui exprime la valeur de la puiſſance λ, dans le cas où le mouvement ſe fait ſur l'axe, nous aurons, pour celui où il ſe feroit ſur la circonférence du Rouet, ... $\lambda = \frac{a(H^2+h^2\cos\Sigma)}{H^2-h^2} + a\sqrt{\frac{(H^2\pm h^2\cos\Sigma)^2}{(H^2-h^2)^2}-1}$: quantité qui eſt plus grande que la précédente, comme on peut s'en convaincre, en réduiſant ſeulement $\frac{H^2R^2\pm h^2r^2\cos\Sigma}{H^2R^2-h^2r^2}$ dans une ſérie infinie. Car cette

série est $1 + \frac{h^2r^2}{H^2R^2}(1 \pm cos\,\Sigma) + \frac{h^4r^4}{H^4R^4}(1 \pm cos\,\Sigma) + \&c.$ D'où l'on voit que cette valeur est d'autant plus grande, que la quantité r l'est davantage : donc le mouvement se fait naturellement sur l'axe, & non sur la circonférence du Rouet.

COROLLAIRE I.

(524) On a tiré cette conclusion d'après la supposition que le frottement est le même dans un cas que dans l'autre, ou que $\frac{h}{H}$ est la même quantité dans les deux cas. Ainsi l'on voit que si $\frac{h}{H}$ étoit moindre lorsque le mouvement se fait sur la circonférence du Rouet, ce dernier mouvement pourroit effectivement avoir lieu plutôt que celui sur l'axe : car, dans ce cas, si l'on supposoit $h = 0$, on auroit alors $\lambda = \alpha$; quantité qui exprime la plus petite valeur que puisse avoir λ.

COROLLAIRE II.

(525.) Le mouvement ne se fait donc sur l'axe qu'à cause du frottement : le frottement étant nul, on a, pour tous les cas, $\lambda = \alpha$, & par conséquent la détermination au mouvement sur l'axe, ou sur la circonférence du Rouet, est, dans cette supposition, tout-à-fait indifférente.

SCOLIE.

(526.) La Poulie fixe en B ne contribue absolument point à faciliter, ou à vaincre, le mouvement de la puissance α, puisque la puissance λ nécessaire pour produire cet effet, est toujours plus grande que la puissance α, toutes les fois que la ligne flexible $HLIA$ appuie sur le Rouet. Mais cependant, en employant cette machine pour quelque besoin particulier, elle contribue beaucoup à produire l'effet demandé, puisque, dans ce cas, le mouvement se faisant sur l'axe, la puissance λ est moindre que dans le cas où il se fait sur la circonférence du Rouet.

PROPOSITION LXXV.

(527.) *Déterminer la relation entre les puissances λ & α, & celle qui agit sur le point B, où la Poulie est fixée.*

La puissance en B est égale & contraire à celle qui agit sur l'axe C, laquelle est composée des deux puissances qui agissent en H & A; mais cette puissance composée a été trouvée (494.) $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cos\,\Sigma}$: donc si nous supposons que Ω exprime la

la puiſſance en *B*, nous aurons $\Omega = \sqrt{\lambda^2 + a^2 \pm 2\lambda a \cos\Sigma}$, ce qui donne $\lambda = \mp a \cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - a^2 \sin\Sigma^2}$, ou $a = \mp\lambda \cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin\Sigma^2}$. PLANC. II.

DÉFINITION LV.

(528) La Poulie peut auſſi être mobile. Si l'on fixe la ligne flexible *HLIA* par ſon extrémité *A*, & que deux puiſſances agiſſent en même temps, l'une en *H*, & l'autre en *B*, la premiere puiſſance peut vaincre la ſeconde, & la mettre en mouvement, en l'entraînant avec la Poulie. C'eſt pour cela qu'on la nomme *Poulie mobile*

PROPOSITION LXXVI.

(529.) *Trouver la relation entre les puiſſances* λ *&* Ω *dans la Poulie mobile.*

Ayant trouvé (527.) $a = \mp\lambda \cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin\Sigma^2}$, & (523.) $\lambda = \frac{a(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + a\left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $a = \ldots\ldots$

$\frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$: nous aurons . . . .

$$\mp\lambda \cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 \sin\Sigma^2} = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 \cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

COROLLAIRE.

(530.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puiſſance λ, ou lorſque les lignes *HL* & *AI* ſont paralleles, on a $\Sigma = 0$: donc on aura $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou, en réduiſant, $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda(HR - hr)}{HR + hr}$: d'où l'on tire $\Omega = \frac{2HR.\lambda}{HR + hr}$, & $\lambda = \frac{\Omega(HR + hr)}{2HR}$.

DES MOUFLES.

DÉFINITION LVI.

(531.) On appelle *Moufle* une Machine compoſée de pluſieurs Poulies : dans la Marine on nomme ces Machines des *Palans* & des *Caliornes*.

Par une Poulie fixe en *B*, & une autre mobile *D*, on fait paſſer une ligne flexible *HFEDGC*, fixée en *C* à la chappe de la Poulie *B*. FIG. 47. Une puiſſance λ appliquée en *H*, agit dans la direction *FH*, & tire une autre puiſſance appliquée en *A* qui réſiſte au mouvement de la Poulie *DG*, ſur laquelle elle agit dans la même direction : l'objet de la puiſſance λ eſt d'entraîner la Poulie *D* & la puiſſance appliquée en *A*.

PLANC. II. Fig. 48. & 49. On peut concevoir également que, par deux Poulies fixes en B, montées dans une même chappe, & unies l'une à l'autre par leurs plans, ou par leurs extrémités, & que, par une autre Poulie mobile DG, on ait fait passer une ligne flexible $HFEDGIKC$, dont l'extrémité soit fixée en C à la Poulie DG, & qui passe sur les trois Rouets: enfin qu'une autre puissance λ agisse à l'autre extrémité H dans la direction FH, en tirant une autre puissance appliquée en A, qui résiste au mouvement de la Poulie DG, sur laquelle elle agit dans la même direction.

Fig. 50. On peut imaginer pareillement trois Poulies fixes en B, unies entre elles dans une même chappe, & deux Poulies mobiles, aussi unies entre elles, & une ligne flexible, passant par toutes ces Poulies, à l'extrémité H de laquelle est appliquée une puissance, tandis qu'une autre puissance est appliquée à la Moufle mobile en A, de la même maniere qu'auparavant. Il en sera de même d'un plus grand nombre de Poulies, si l'on veut en employer davantage dans la composition de ces Machines appellées *Moufles*.

SCOLIE.

(532.) Nous supposerons, pour la facilité du calcul, que les lignes, ou cordons qui passent sur les différentes Poulies qui composent les Moufles, tels que ED, CG, FH, sont sensiblement paralleles, ce qui donne $\Sigma = 0$. Nous supposerons encore que toutes les Poulies sont égales, pour n'avoir pas à introduire dans le calcul plusieurs valeurs de R.

PROPOSITION LXXVII.

(533.) *Trouver la relation entre la puissance agissante, & la puissance resistante dans les Moufles.*

Puisqu'on suppose $\Sigma = 0$, le cas se réduit à celui dans lequel la puissance λ a sa plus grande valeur, ou est un *maximum*, & pour lequel (519.) nous avons trouvé $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, supposant que λ désigne la puissance qui agit en H, & α celle que doit supporter, ou tirer la ligne ED. Ces deux puissances seront donc entre elles, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$; & celle que doit supporter la ligne ED, sera $= \frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$. Par la même raison, celle qui agit sur la ligne ED, est à celle qui agit sur la ligne GC, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$: donc celle qui agit sur $GC = \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. Mais cette derniere puissance est celle qui agit sur la ligne GI; & celle qui agit sur GI, est à celle

celle qui agit ſur KC, comme $HR+hr$ eſt à $HR-hr$: donc la puiſſance qui agit ſur $KC = \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, & ainſi à l'infini, quel que ſoit le nombre de tours que faſſe la ligne ſur les Poulies ; c'eſt-à-dire, quel que ſoit le nombre des Poulies. S'il n'y avoit donc que deux lignes ſeulement, comme ED, CG, pour ſoutenir la Poulie mobile DG, les forces qu'elles exerceroient ſeroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$ & $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. S'il y en avoit trois, les forces ſeroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, & ainſi à l'infini. Or comme la ſomme des forces que ſupporteront ces lignes, doit être égale à la puiſſance Ω appliquée en A, nous aurons $\Omega = \frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)} + \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2} + \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3} + \&c.$, en formant cette ſérie d'autant de termes qu'il y a de cordons, ou lignes, qui ſoutiennent la Moufle mobile.

Corollaire I.

(534.) Si l'on fait $\frac{HR-hr}{HR+hr} = 1 - Q$, ce qui donne $Q = \frac{2hr}{HR+hr}$, on aura $\Omega = \lambda((1-Q)+(1-Q)^2+(1-Q)^3+(1-Q)^4+\&c.)$, faiſant la ſérie d'autant de termes qu'il y a de cordons qui aboutiſſent à la Moufle mobile. Si l'on ſuppoſe que n repréſente le nombre de ces cordons, on aura $\Omega = \lambda((1-Q)^n+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+\&c.)$, le dernier terme de la ſérie étant celui dont l'expoſant eſt l'unité.

Corollaire II.

(535.) On aura pareillement $\lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\Omega}{(1-Q)^n+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+(1-Q)^{n-4}+\&c.}$$

; d'où l'on voit combien il eſt avantageux, dans les Moufles, que Q, ou ſon égale $\frac{2hr}{HR+hr}$, ſoit le moindre qu'il eſt poſſible ; c'eſt-à-dire que le frottement $\frac{h}{H}$ ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, ainſi que le rayon de l'axe r ; & qu'au contraire le rayon R du Rouet ſoit le plus grand qu'il ſe pourra, eu égard aux circonſtances.

Corollaire III.

(536) Si l'on éleve chaque terme de la ſérie à la puiſſance indiquée par ſon expoſant, ces puiſſances ſeront . . . .

$$(1-Q)^n = 1 - n. \quad Q + \frac{n.(n-1)}{2} Q^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-1} = 1-(n-1)Q + \frac{(n-1).(n-2)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-2} = 1-(n-2)Q + \frac{(n-2)(n-3)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$(1-Q)^{n-3} = 1-(n-3)Q + \frac{(n-3)(n-4)}{2} Q^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} Q^3 + \&c.$$

$$\&c. = \&c.$$

Pour avoir la ſomme de toutes ces quantités, & en conclure la valeur de Ω, on remarquera que le nombre des lignes dont cette ſérie doit être compoſée, eſt égal à l'expoſant de $1-Q$. Car on a vu (534.) que le dernier expoſant doit être l'unité; & le nombre qu'on doit ſouſtraire de n dans l'expoſant, renfermant autant d'unités qu'il y a de lignes moins une; ſi q exprime le nombre total des lignes, nous aurons $q-1$ pour le nombre à retrancher de n dans le dernier terme de la ſérie, & par conſéquent $n-q+1$ pour le dernier expoſant: donc $n-q+1=1$; d'où l'on tire $q=n$; c'eſt-à-dire que le nombre des lignes dont la ſérie doit être compoſée, contient autant d'unités qu'il y en a dans le nombre n, ou qu'il y a de cordons, ou lignes, qui ſoutiennent la Moufle mobile. La ſomme des unités qui ſont au premier terme de toutes les lignes ſera donc n, & par conſéquent

$$\Omega = \lambda \left\{ n - \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \&c. \end{matrix} \right\} Q + \left\{ \begin{matrix} n.\ (n-1) \\ (n-1)(n-2) \\ (n-2)(n-3) \\ (n-3)(n-4) \\ \&c. \end{matrix} \right\} \tfrac{1}{2} Q^2 - \left\{ \begin{matrix} n.\ (n-1)(n-2) \\ (n-1)(n-2)(n-3) \\ (n-2)(n-3)(n-4) \\ (n-3)(n-4)(n-5) \\ \&c. \end{matrix} \right\} \tfrac{1}{6} Q^3 + \&c. \right\},$$

ou, en ſommant les quantités qui compoſent chaque terme, $\Omega = \lambda\left(\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} Q^3 + \&c.\right)$ *; ce qui donne . . . .

$$\lambda = \frac{\Omega}{\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} Q^3 + \&c.},$$ en

formant toutes ces ſéries d'autant de termes qu'il y a d'unités dans $n+1$, ou d'autant de termes qu'il y a de lignes, ou cordons, qui tirent la Moufle fixe *B*.

---

* Pour ſommer les quantités qui compoſent chaque terme, on remarquera 1°. que les quantités n, $n-1$, $n-2$ &c. qui multiplient le ſecond terme de la valeur de Ω, ne ſont autre choſe que la ſuite naturelle des nombres, priſe en décroiſſant depuis le terme n juſqu'à l'unité. Ainſi la ſomme de toutes ces quantités eſt $= n.\frac{(n+1)}{2}$.

2°. Que le nombre des produits $n.(n-1)$, $(n-1)(n-2)$, $(n-2)(n-3)$ &c. eſt $= n$, en admettant o pour le dernier produit, puiſque le ſecond facteur de ces produits devient zéro, au rang déſigné par n. Prenant donc la ſuite de ces produits en ſens contraire, c'eſt-à-dire,

COROLLAIRE IV.

(537.) La force qui s'exerce en B eſt la même que celle qui s'exerce en A, plus la puiſſance λ qui agit dans la direction FH. Donc la force qui s'exerce en $B = \Omega + \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lambda\left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}Q^3 + \&c.\right)$

COROLLAIRE V.

(538.) Donc la puiſſance qu'on peut vaincre en B eſt plus grande que celle qu'on peut vaincre en A, de la quantité λ, & par conſéquent il eſt avantageux d'arranger les Moufles, de maniere que la puiſſance qu'il s'agit de vaincre, ſoit placée en B, ou que la Moufle B ſoit mobile, & la Moufle DG fixe.

écrivant le premier celui qui eſt écrit le dernier, & *vice versâ*, on formera la ſuite $1\,.\,0$, $2\,.\,1$, $3\,.\,2$, $4\,.\,3$, $5\,.\,4$, &c.. $n(n-1)$. Pour ſommer cette ſuite, on fera attention que puiſque $n.(n-1)$, ou n^2-n, eſt l'expreſſion générale d'un de ſes termes, il ne s'agit que de faire ſucceſſivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. & de prendre la ſomme de tous les réſultats: or il eſt évident qu'on forme alors la ſomme des quarrés de la ſuite naturelle des nombres, & qu'on en déduit la ſomme des mêmes nombres naturels. Nommant donc S la ſomme des nombres de la ſuite naturelle, & S' celle de leurs quarrés, on aura $S'-S$ pour la ſomme de la ſérie dont il eſt ici queſtion. Mais chacun ſçait que $S' = n.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3}$; (*Voyez* d'ailleurs pour la démonſtration, la troiſieme partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 236 & 237.) & que $S = n.\frac{n+1}{2}$; donc $S'-S = n.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3} - n.\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. Donc le troiſieme terme de la ſérie qui exprime la valeur de Ω eſt $\frac{(n+1).n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}Q^2$.

On remarquera, en troiſieme lieu, qu'en faiſant $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. dans la ſuite des produits $n(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)$, $(n-2)(n-3)(n-4)$ &c. dont la ſomme forme le coefficient du quatrieme terme, cette ſérie s'arrêtera auſſi-tôt qu'on aura fait $n =$ au nombre des termes, & qu'alors le produit précédent ſera auſſi $= 0$. Prenant donc, comme tout à l'heure, la ſérie en ſens contraire, elle ſera $1\,.\,0\,.\,-1$, $2\,.\,1\,.\,0$, $3\,.\,2\,.\,1$, $4\,.\,3\,.\,2$, &c. .... $n(n-1)(n-2)$. Un terme quelconque de cette ſuite eſt donc $n.(n-1)(n-2) = (n^2-n)(n-2) = n^3-3n^2+2n$. Pour ſommer cette ſuite, il ne s'agit encore que de faire ſucceſſivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c., & de ſommer tous les réſultats: or il eſt évident que cela revient à prendre la ſomme des cubes de la ſuite naturelle, à en retrancher le triple de la ſomme des quarrés de la même ſuite, & à ajouter au reſte le double de la ſomme des termes de la ſuite naturelle. Repréſentant donc par S'' la ſomme des cubes de la ſuite naturelle, la ſomme de la ſérie dont il s'agit ici, ſera $= S''-3S'+2S$. Mais $S'' = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = n.\frac{n+1}{2}.n.\frac{n+1}{2}$ (On peut trouver cette valeur par ce qui eſt démontré, *Art.* 236 & 237 de l'Ouvrage auquel nous venons de renvoyer), $3S' = n.\frac{n+1}{2}.(2n+1)$, & $2S = n.(n+1)$: donc la ſomme de la ſérie dont il s'agit, ou $S''-3S'+2S = n.\frac{n+1}{2}.n.\frac{n+1}{2} - n.\frac{n+1}{2}.(2n+1) + n.(n+1) = \frac{n.(n+1)(n-1)(n-2)}{4}$; & par conſéquent le quatrieme terme de la valeur de $\Omega = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}Q^3$. La loi que ſuivent les termes de la valeur de Ω eſt ſuffiſamment annoncée pour que le Lecteur puiſſe facilement la continuer. On verra encore, avec une légere attention, que les deux ſuites que nous venons de ſommer ſont de l'eſpece de celles des nombres *Triangulaires* & *Pyramidaux*.

COROLLAIRE VI.

(539.) Si l'on multiplie par Q l'équation précédente (537.), & si l'on soustrait λ de part & d'autre, on aura .... $(\Omega+\lambda)Q-\lambda=-\lambda\left(1-\frac{n+1}{1}Q+\frac{(n+1)n}{1.2}Q^2-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^3+\&c.\right)$ $=-\lambda(1-Q)^{n+1}$; d'où l'on tire, en réduisant, ... $\Omega=\frac{\lambda(1-Q)(1-(1-Q)^n)}{Q}$, & $\lambda=\frac{\Omega Q}{(1-Q)(1-(1-Q)^n)}$.

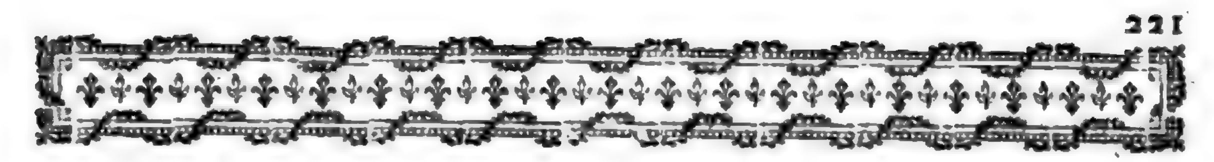
SCOLIE I.

(540.) Si l'on suppose, avec M. *Bilfinger* $\frac{h}{H}=\frac{1}{4}$, & $\frac{r}{R}=\frac{1}{5}$, ce qui donnera (534.) $Q=\frac{2}{21}$; & si l'on substitue cette valeur dans celle de λ (539.), on aura $\lambda=\frac{\frac{2}{21}.\Omega}{(1-\frac{2}{21}).1-(1-\frac{2}{21})^n)}=\frac{2.\Omega}{19(1-(\frac{19}{21})^n)}$.

Qu'on suppose maintenant $n=3$, on aura $\lambda=\frac{2.\Omega}{19.1-\frac{6859}{9261})}=\frac{9261.\Omega}{22819}$. Dans le cas où l'on supposeroit le frottement nul, on a $h=0$, & $Q=0$, & l'équation $\lambda=\frac{\Omega Q}{(1-Q)(1-(1-Q)^n)}$ ne donneroit rien; mais ayant recours à celle de *l'Art.* 536, elle donne, en conséquence de cette supposition, $\lambda=\frac{\Omega}{n}$, qui est la formule générale donnée par tous les Auteurs. On aura donc, dans le cas de $n=3$, $\lambda=\frac{1}{3}\Omega$, ou $\lambda=\frac{1000}{3000}\Omega$: ainsi la puissance λ, dans cette supposition, sera à celle déterminée ci-dessus, comme $\frac{1}{3}$ est à $\frac{9261}{22819}$, ou comme 22819 est à 27783. La différence de ces deux valeurs est, comme l'on voit, bien considérable.

SCOLIE II.

(541.) Pour faciliter le calcul, nous avons négligé le poids des Moufles, & celui des cordes, que nous avons regardées comme des lignes : mais on pourroit facilement introduire ces quantités dans le calcul, si on le vouloit. Il est nécessaire d'y avoir égard, lorsque la puissance qu'il est question de vaincre est petite; mais lorsqu'elle est fort grande, on peut les négliger. Nous nous sommes aussi dispensés d'avoir égard à la grosseur des cordes, ou à leur roideur, ou inflexibilité, qui cependant coûte quelquefois beaucoup à surmonter, particuliérement lorsque les puissances sont petites; mais aussi, lorsqu'elles sont grandes, on peut les négliger, sans crainte d'erreur sensible.



LIVRE SECOND.

DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Equilibre des Fluides, & de la force avec laquelle ils agissent lorsqu'ils sont en repos.

DÉFINITION I.

(542.) UN *Fluide* est un corps dont les parties cedent à toute espece de force, & qui, en cédant, se meuvent facilement entre elles.

C'est la définition que *Newton* donne des Fluides, dans le Livre II, Section V de sa *Philosophie Naturelle.* Elle est conforme à ce qui a été dit dans le premier Livre, même dans le cas où un nombre quelconque de parties d'un Fluide seroit poussé perpendiculairement contre une surface immobile; car, en vertu de l'impression qui doit se former dans ces parties, elles doivent se séparer latéralement, & d'autant plus que la densité du Fluide est moindre. On ne considere point ici le cas où une seule particule infiniment petite seroit ainsi poussée; car, comme nous l'avons déjà dit, nous n'avons pas besoin de cet examen pour ce que nous nous proposons.

PROPOSITION I.

(543.) *Lorsque toute la masse du Fluide est en repos, la force, ou pression, que souffre chacune de ses particules, est toujours la même, dans quelque direction que ce soit.*

Si la pression qu'éprouve une particule quelconque n'étoit pas la même dans toutes les directions, d'après la définition précédente, elle céderoit sa place à la pression la plus forte, & elle se mettroit en mouvement, ce qui est contre la supposition: donc la pression qu'éprouve une particule quelconque d'un fluide, lorsqu'il est en repos, est la même dans toutes les directions.

PROPOSITION II.

(544.) *La force, ou le poids, qui, en vertu de la gravité, comprime*

verticalement une particule quelconque d'un Fluide qui eſt en repos, eſt égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui eſt au-deſſus d'elle.

Une particule quelconque du Fluide gravite ſur ſon inférieure, par la propriété générale des corps graves; & cette gravitation ſe communique d'une particule à l'autre, à cauſe de leur contact : donc la particule inférieure ſupporte le poids, ou l'action, de toutes les particules ſupérieures, ou de la colonne verticale qui les renferme.

COROLLAIRE.

(545.) Comme une particule quelconque eſt pouſſée avec une force égale dans toutes les directions, il s'enſuit qu'une particule quelconque eſt pouſſée dans toutes les directions avec une force égale au poids de la colonne verticale qui eſt au-deſſus d'elle.

DÉFINITION II.

(546.) Pour éviter les répétitions, nous appellerons déſormais *Superficie du Fluide* la ſurface ſupérieure du Fluide, quelque figure, ou diſpoſition, qu'elle ait.

PROPOSITION III.

(547.) *Lorſque toute la maſſe d'un Fluide eſt en repos, ſa ſuperficie eſt horiontale, ou perpendiculaire à la direction des corps graves.*

Si la ſuperficie du fluide n'étoit pas horiſontale, les colonnes verticales qui répondent à une particule du fluide, & dont elle ſupporte le poids, ou la preſſion, dans toutes les directions, ne feroient pas égales; par conſéquent cette particule ſeroit preſſée inégalement, & elle devroit alors ſe mettre en mouvement, ce qui eſt contre la ſuppoſition : donc la ſuperficie d'un fluide qui eſt en repos, eſt horiſontale.

COROLLAIRE I.

(548.) Si la ſuperficie du Fluide eſt horiſontale, toute ſa maſſe eſt en repos.

COROLLAIRE II.

(549.) Quand toute la maſſe d'un Fluide ne ſera pas en repos, ſa ſuperficie ne ſera pas horiſontale; & réciproquement, la ſuperficie du Fluide n'étant pas horiſontale, toute ſa maſſe ne ſera pas en repos.

SCOLIE I.

(550.) On fait abſtraction de la force d'attraction, ou de toute autre force, excepté la gravité, dont les vaſes, ou les corps, qui

contiennent les Fluides, peuvent être doués; ces forces étant de très-peu d'importance pour notre objet.

SCOLIE II.

(551.) On doit entendre ce qui vient d'être dit, lorſque tout le Fluide contenu dans le vaſe, ou celui de deux, ou d'un plus grand nombre de vaſes qui ſe communiquent, eſt homogene, ou d'une denſité uniforme; parce que, dans ce cas, chaque canal peſe autant que ſon correſpondant, comme il a été démontré. Mais ce ne ſeroit pas la même choſe, ſi les Fluides de deux, ou d'un plus grand nombre de vaſes qui communiquent l'un à l'autre par un orifice, étoient de différentes denſités. Qu'on ſuppoſe que la denſité, ou le poids d'un pied cube d'un des Fluides ſoit $=m$, & que celui d'un pied cube de l'autre ſoit $=M$; le poids, ou la preſſion, que le premier exercera ſur l'orifice, ſera $madbde$, & celui qu'exercera le ſecond, ſera $MAdbde$; $dbde$ exprimant l'aire de l'orifice, & la profondeur du même orifice au-deſſous de la ſuperficie des Fluides étant repréſentée par a & A. Mais, pour qu'il y ait équilibre, il faut que $madbde=MAdbde$; ou qu'on ait $a:A::\frac{1}{m}:\frac{1}{M}$. Donc les hauteurs des ſuperficies des Fluides au-deſſus des orifices, doivent être en raiſon inverſe des denſités des mêmes Fluides, ou en raiſon inverſe de leurs poids ſous un même volume.

PROPOSITION IV.

(552.) *La force que ſouffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une ſurface qui contient un Fluide, eſt perpendiculaire à cette partie.*

De quelque maniere qu'une ſurface ſoit preſſée par un Fluide, les forces peuvent être décompoſées en forces perpendiculaires & en forces paralleles à la ſurface; mais ces dernieres ſe détruiſent mutuellement (543.): donc il ne reſte que les forces perpendiculaires, & par conſéquent la force que ſouffre une différencio-différencielle d'une ſurface quelconque qui renferme un Fluide, eſt perpendiculaire à cette ſurface.

PROPOSITION V.

(553.) *La force que ſouffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une ſurface qui renferme un Fluide en repos, eſt égale au poids d'une colonne verticale du même Fluide, dont la baſe eſt égale à la différencio-differencielle de la ſurface, & dont la hauteur eſt la hauteur verticale du Fluide au-deſſus de cette différencio-différencielle.*

Planc. III. Chacune des particules du Fluide qui compriment la différencio-différencielle de la surface, souffre elle-même une pression égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui est au-dessus d'elle : donc toute la force qui comprime la différencio-différencielle, est égale au poids d'autant de colonnes verticales qu'il y a de particules du Fluide qui la touchent ; c'est-à-dire, au poids d'une colonne verticale dont la base est égale à la différencio-différencielle de la surface, & dont la hauteur est la hauteur verticale du Fluide au-dessus de la même différencio-différencielle.

Corollaire I.

Fig. 51. (554.) Donc si l'on coupe une surface *AB* par deux lignes horisontales *FG*, *HI*, infiniment proches l'une de l'autre ; & par deux autres lignes *KL*, *MN*, perpendiculaires à celles-là, & qui soient aussi infiniment proches l'une de l'autre ; la force que supportera l'espace différencio-différenciel *KLMN*, dans la direction *CD* qui lui est perpendiculaire, le Fluide étant en repos, sera exprimée par *m.a.LN.NM*. Si, dans cette expression, l'on prend les mesures en pieds, *m* marquera le poids d'un pied cubique du Fluide, & *a* le nombre de pieds de la hauteur verticale de sa superficie au-dessus de la différencio-différencielle.

Corollaire II.

(555.) La force *m.a.LN.NM*, dont la direction est suivant la perpendiculaire *CD*, peut être décomposée en deux autres, l'une horisontale *CE*, & l'autre verticale *ED* ; & ces trois forces seront entre elles, comme *CD*, *CE* & *ED* ; ou, en tirant l'horisontale *NO*, & la verticale *MO*, comme *NM*, *MO* & *ON*, à cause que les triangles *CED*, *MON* sont semblables, ayant l'angle *MNO* = *EDC*. Nous aurons donc *NM* est à *MO*, comme la force perpendiculaire suivant *CD*, ou *m.a.LN.NM*, est à *m.a.LN.MO*, force horisontale suivant *CE*. On aura pareillement *NM* est à *NO*, comme la force perpendiculaire suivant *CD*, ou *m.a.LN.MN*, est à *m.a.LN.NO*, force verticale suivant *ED*.

Corollaire III.

(556.) La force horisontale sera donc à la force verticale, comme *MO* est à *NO*, ou comme le sinus de l'angle *MNO* est à son cosinus.

Corollaire IV.

(557.) La ligne *MO* est égale à la différencielle verticale, ou

à

à la différencielle *da* de la hauteur du Fluide : donc la force horisontale qui agira sur l'aire différencio-différencielle *LKMN*, dans le cas où le Fluide est en repos, sera encore $= mada.LN$. PLANC. III.

COROLLAIRE V.

(558.) La force horisontale *CE* peut également être décomposée en deux autres forces aussi horisontales, l'une suivant la direction donnée *CP*, & l'autre suivant *CQ*, perpendiculaire à celle-ci ; & ces trois forces seront entre elles comme *CE*, *CP*, *CQ* ; ou en tirant les lignes *LR*, *NR*, paralleles aux directions *CP*, *CQ*, comme *LN*, *NR*, & *LR*, à cause des triangles semblables *CEP*, *CEQ*, *NLR*. Nous aurons donc *LN* est à *NR*, comme la force horisontale suivant $CE = mada.LN$ est à $mada.NR$, force horisontale suivant *CP*. On aura pareillement *LN* est à *LR*, comme $mada.LN$ est à $mada.LR$, force horisontale suivant *CQ*. FIG. 52.

COROLLAIRE VI.

(559.) Le produit $LN.NO$ exprime l'aire $NT = PQRS$ formée dans la superficie horisontale du Fluide, & terminée par les quatre verticales *LP*, *TS*, *NQ*, *OR*, élevées des quatre angles du parallélogramme *LO* : donc aussi la force verticale qui agit sur la différencio-différencielle $LKMN = ma.PQ.PS$. FIG. 53. FIG. 52.

PROPOSITION VI.

(560.) *La somme des forces horisontales qui agissent sur un corps quelconque submergé dans un Fluide qui est en repos, est zéro ; & par conséquent le corps doit demeurer en repos, quant au mouvement horisontal.*

Soit un corps quelconque *ADBE*, lequel soit coupé par un plan *ACBE* qui coïncide avec la surface du Fluide, lorsque celui-ci est en repos. Soit mené les deux plans *FOI*, *LQR*, infiniment voisins, & paralleles au plan supérieur *ACBE*, & soit pris, entre ces plans, la différencio-différencielle *OQNP*. Élevant ensuite le plan vertical *OTMK*, soit abaissé sur lui la perpendiculaire *PG*, & soit élevé les verticales *GH*, *OK* & *TM*. Enfin, soit fait $MH = TG = u$, $HK = GO = du$, $HG = KO = z$, & la hauteur verticale comprise entre les deux plans *FOI*, $LQR = dz$. FIG. 54.

Cela posé, on aura (558.) la force horisontale qui agit sur la différencio-différencielle *OQNP*, dans la direction *FT*, ou sa parallele *AM*, $= mzdzdu$; & celle qui agit sur *FOQL*, sera $= muzdz$,

PLANO. III. à cause que z est constant, le Fluide étant en repos. Mais, pour que cette expression soit celle de la force qui agit sur l'espace entier $FOIRQL$, nous devons faire $u=o$, puisque c'est la valeur de u dans le point I : donc la somme des forces horisontales qui agissent sur la zone $FOIRQL=o$. On démontrera la même chose pour toutes les zones dans lesquelles on peut diviser le corps; & la même chose dans d'autres directions horisontales quelconques. Donc la somme des forces horisontales qui agissent sur tout le corps, est zéro ; & par conséquent le corps demeurera en repos quant au mouvement horisontal.

PROPOSITION VII.

(561.) *La force verticale qui agit sur un corps submergé dans un Fluide, ou que lui communique le Fluide, celui-ci étant en repos, est égale au poids du Fluide dont il occupe la place.*

FIG. 55. Soit $ADBE$ un corps quelconque coupé par un plan $ACBE$, qui coïncide avec la surface du Fluide, lorsque celui-ci est en repos. Soit pris la droite AB pour la ligne des abscisses, & ses perpendiculaires EC, FG, infiniment proches l'une de l'autre, pour les ordonnées. Soit aussi mené les lignes HI, KL, aussi infiniment proches, & paralleles aux abscisses. Faisant enfin $AM=x$, $MH=u$, on aura $HK.HI=dudx$; & la force verticale qui agit sur la différencio-différencielle $NPOQ$ de la surface, sera $=ma.dudx$ (559.). Or $a=HN$, hauteur du Fluide au-dessus de cette différencio-différencielle : faisant donc cette hauteur HN variable, & $=z$, la force verticale sera $=mzdudx$. Mais l'expression $zdudx$ est celle de l'élément différencio-différenciel LN du corps, lequel élément est compris entre les quatre verticales HN, KP, IQ, LO ; l'intégrale $\int zaudx$ sera donc l'expression de tout le volume qu'occupe le corps dans le Fluide, & $m\int zdudz$ sera celle du poids du volume de Fluide qu'occupe le même corps. Or, d'après ce qu'on vient de dire, la somme des forces verticales qui agissent sur le corps, ou la force verticale totale, est aussi exprimée par $m\int zdudx$. Donc la force qu'éprouve verticalement, de bas en haut, un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, ou la force que lui communique le Fluide, est égale au poids du volume de Fluide que déplace le corps.

PROPOSITION VIII.

(562.) *Pour qu'un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, soit sans aucun mouvement vertical, il faut que le poids du corps soit*

égal à celui du volume de Fluide qu'il déplace, & de plus que la verticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

Les forces $mzdudx$ sont autant de puissances qui poussent le corps verticalement, de bas en haut, ou, ce qui revient au même (89, 90 & 91.), $m\int zdudx$ est une puissance qui pousse verticalement le corps de bas en haut, & est placée au centre de toutes les puissances $mzdudx$, ou au centre de l'espace qu'occupe le corps dans le Fluide. Supposant maintenant que M représente la masse de tout le corps, M sera une autre puissance qui pousse verticalement le corps de haut en bas : donc (110.) on doit avoir $m\int zdudx - M = 0$, pour que le centre de gravité soit sans aucun mouvement; c'est-à-dire que le poids M du corps doit être égal à $m\int zdudx$, poids du volume de Fluide qu'il déplace. En outre, si nous nommons p la distance horisontale de la verticale, qui passe par le centre de gravité, à celle qui passe par la puissance $m\int zdudx$, ou par le centre de l'espace, ou volume du corps submergé dans le Fluide, nous aurons (168.) $\frac{m\int dt\int pdt\int zdudx}{S}$ pour l'expression de l'angle de rotation. Mais cette quantité ne peut être zéro, dès le commencement de l'action, si l'on n'a pas $p = 0$. Donc, pour qu'il n'y ait absolument aucun mouvement, soit vertical, soit de rotation, il faut que la verticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

CHAPITRE II.

De la force avec laquelle les Fluides en mouvement agissent contre une différencio-différencielle de surface.

PROPOSITION IX.

(563.) *SI, dans la surface qui contient un Fluide en repos, on ouvre un orifice, qu'on peut supposer pour le présent infiniment petit, le Fluide sortira par cet orifice avec une vîtesse égale à celle qu'il acquerroit en tombant librement de la hauteur verticale* a *de la surface du Fluide au-dessus de l'orifice.*

Supposons que A soit une particule du Fluide, & α la puissance qui l'anime lorsqu'elle tombe librement, nous aurons (32.) $\frac{\alpha t}{A} = u$.

PLANC. III. Soit ſuppoſé maintenant la même particule ſortant par l'orifice, la puiſſance qui l'animera, ſera la force réunie de toutes les particules qui ſont contenues dans la hauteur a (544.). Par conſéquent n étant ſuppoſé un nombre infini, ce nombre repréſentera la totalité des particules contenues dans cette hauteur, & na ſera la puiſſance qui anime la particule qui jaillit par l'orifice. Mais le temps durant lequel cette puiſſance agit ſur la particule, doit être infiniment petit, nous devons donc le repréſenter par $\frac{t}{n}$: par conſéquent nous aurons auſſi (32.) $\frac{na}{A} \cdot \frac{t}{n} = V$; V déſignant la vîteſſe avec laquelle la particule jaillit par l'orifice; c'eſt-à-dire, en réduiſant $\frac{at}{A} = V$: donc les deux vîteſſes V & u ſont égales.

COROLLAIRE.

(564.) Comme les particules du Fluide ſont pouſſées dans toutes les directions avec une force égale, il s'enſuit que quelle que ſoit la direction ſuivant laquelle une particule eſt pouſſée, cette particule prendra, en s'échappant, une viteſſe $u = 8\sqrt{a}$; vîteſſe qui eſt celle que doit acquérir un corps, ou une particule de Fluide, qui tombe librement de la hauteur verticale a (52.).

SCOLIE.

(565.) Dans la pratique, la vîteſſe réelle du Fluide eſt toujours moindre que celle que nous venons d'aſſigner d'après la théorie. Cette différence vient du frottement que doit produire le choc des particules contre les parois de l'orifice, & encore de celui que produit le choc des particules les unes contre les autres, même avant qu'elles parviennent à jaillir par l'orifice. Mais nous ferons abſtraction de tous ces frottements, dont la conſidération n'eſt pas néceſſaire pour notre objet, comme nous le verrons dans la ſuite.

PROPOSITION X.

(566.) *Trouver le rapport entre la force perpendiculaire qui agit ſur une différencio-différencielle de ſurface, & la vîteſſe avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle, ſi elle lui donnoit un libre paſſage.*

FIG. 51. Nous avons trouvé cette force (554) $= ma.LN.NM$; $LN.NM$ exprimant l'aire différencio-différencielle de la ſurface. Nous avons trouvé pareillement (564.) la vîteſſe u avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle $= 8\sqrt{a}$, ce qui donne $a = \frac{u^2}{64}$.

Donc la force dont il eſt ici queſtion, ſera repréſentée par $\frac{mu^2}{64}LN.MN$; expreſſion qui renferme la relation cherchée.

COROLLAIRE.

(567.) Connoiſſant la viteſſe avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle, on aura la force dont cette petite ſurface ſoutient l'effort, en multipliant ſon aire $LN.MN$, par le quarré de la vîteſſe u, & par la conſtante $\frac{m}{64}$.

PROPOSITION XI.

(568.) *La force perpendiculaire qu'éprouve une différencio-différencielle de ſurface* LN.MN, *lorſqu'elle ſe meut dans un Fluide, en ſuivant une direction qui lui eſt perpendiculaire, eſt* $= m.LN.MN(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$; u *deſignant la vîteſſe perpendiculaire de la ſurface.*

On vient de voir (564.) que la viteſſe avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle de la ſurface, s'il avoit un libre paſſage, eſt $= 8\sqrt{a}$: par conſéquent ſi la ſurface ſe meut avec la viteſſe u, dans la même direction perpendiculaire par laquelle le Fluide ſe dirigeroit, la vîteſſe relative ſera $8\sqrt{a} \pm u$; le ſigne $+$ ayant lieu dans le cas où la ſurface ſe meut contre le Fluide, & le ſigne — lorſqu'elle tend à s'en éloigner, où qu'elle fuit le Fluide. Donc la force perpendiculaire dont la ſurface ſoutiendra l'effort, eſt (567.) $= \frac{m.LN.NM}{64}(8\sqrt{a} \pm u)^2 = m.LN.NM(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$; a déſignant la diſtance verticale de la différencio-différencielle de la ſurface à la ſuperficie du Fluide, celui-ci étant en repos.

PROPOSITION XII.

(569.) *Si l'on repréſente par* n *l'angle* MNO *que forme la ſurface avec l'horiſontale* NO, *perpendiculaire à* LN, *la force perpendiculaire, dont la différencio-différencielle* LKMN *éprouvera la réſiſtance, en ſe mouvant perpendiculairement, ſera auſſi* $= m.LN.\frac{MO}{\sin n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2 = m.db.\frac{da}{\sin n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$, *en faiſant la différencielle horiſontale* LN $= db$.

Car on a $MN : MO :: 1 : \sin n$, & par conſéquent $MN = \frac{MO}{\sin n} = \frac{da}{\sin n}$; cette valeur de MN étant ſubſtituée dans l'expreſſion $m.LN.MN(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$ qu'on vient de trouver (568.), la change en celle-ci, $\frac{m.db.da}{\sin n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$; c'eſt l'expreſſion de la force perpendiculaire dont la différencio-différencielle $LKMN$ éprouve la réſiſtance, en ſe mouvant perpendiculairement.

PROPOSITION XIII.

(570.) *Si la différencio-différencielle* LKMN, *au lieu de se mouvoir suivant une direction qui lui soit perpendiculaire, se meut suivant une autre direction quelconque qui fasse avec elle un angle donné* $= \theta$, *la force perpendiculaire qu'éprouvera la differencio-differencielle, sera* $= \ldots \frac{m.db.da}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

La vîtesse suivant la direction que suit la différencio-différencielle, est à la vîtesse suivant la perpendiculaire, comme 1 est à $\sin \theta$: par conséquent cette vîtesse perpendiculaire sera $= u \sin \theta$. Cette valeur étant substituée dans l'expression $\frac{m.db.da}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u)^2$ qu'on vient de trouver (569.), en place de u seul, qui représente, dans cette formule, la vîtesse perpendiculaire, on aura la force, ou résistance, perpendiculaire qu'éprouve la différencio-différencielle $= \frac{m.db.da}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

PROPOSITION XIV.

(571.) *La force ou résistance qu'éprouvera la surface differencio-differencielle* LKMN, *suivant une direction quelconque qui la coupe sous un angle donné* x, *sera* $= \frac{m.db.da.\sin x}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

Fig. 56

Soit DL cette direction quelconque; & du point D soit abaissé la perpendiculaire DC sur la surface; tirant ensuite la ligne LC, l'angle DLC, ou son égal DFG, sera $= x$, FG étant supposé perpendiculaire sur LD. Si donc DF représente la force, ou résistance, perpendiculaire, DG représentera celle que la différencio-différencielle de la surface éprouve dans la direction DL. Mais DF est à DG, comme 1 est à $\sin x$; on aura donc aussi 1 est à $\sin x$, comme $\frac{m.db.da}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, force, ou résistance, perpendiculaire, est à $\frac{m.db.da.\sin x}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, force, ou résistance, suivant la direction DL.

COROLLAIRE.

(572.) Dans le cas où l'on demanderoit la force suivant la direction du mouvement, alors $x = \theta$; & par conséquent la force qu'éprouvera la différencio-différencielle de la surface $LKMN$, dans la direction de son mouvement, est $= \frac{m.db.da.\sin \theta}{\sin \nu} (\sqrt{a} \pm \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$.

LEMME I.

(573.) *Si, par quelque point* D *de la direction* DL, *on fait passer un plan vertical* IED, *perpendiculaire à la différencio-différencielle* LKMN;

& par la base LN *de ladite différencio-différencielle, un plan horisontal* NLA. *Si, de plus, ayant élevé la verticale* DAI, *on mene les perpendiculaires* AB, DC, AH, *en nommant* λ *l'angle* NLA, *&* μ *l'angle* LDA, *on aura* $\sin x$, *ou le sinus de l'angle* CLD *que forme la direction* DL *avec la différencio-differencielle,* $= \sin\lambda.\sin n.\sin\mu. + \cos\mu.\cos n.$

Supposons $LA = q$, on aura $AE = q.\sin\lambda$; & dans le triangle rectangle BAE, à cause que $\sin n =$ le sinus de l'angle BEA, on aura $BA = CH = q.\sin n.\sin\lambda$. Dans le triangle aussi rectangle LAD, on a $DA = \frac{q\cos\mu}{\sin\mu}$; mais à cause que les triangles DAH, DIC, EIA, sont semblables, l'angle $IEA = HDA$, & le sinus de cet angle est par conséquent $= \sin n$; donc $DH = \frac{q.\cos\mu.\cos n}{\sin\mu}$; & par conséquent $CH + HD = CD = q.\sin\lambda.\sin n + \frac{q.\cos\mu\cos n}{\sin\mu}$. De plus, on a $DL = \frac{q}{\sin\mu}$: donc, dans le triangle rectangle CLD, on aura $\frac{q}{\sin\mu} : q.\sin\lambda.\sin n + \frac{q.\cos\mu.\cos n}{\sin\mu} :: 1 : \sin x = \sin\lambda.\sin n.\sin\mu + \cos\mu.\cos n$.

COROLLAIRE I.

(574.) Substituant cette valeur de $\sin x$ dans l'expression .... $\frac{m.db.da.\sin x}{\sin n}(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$ de la résistance qu'éprouve la différencio-différencielle suivant la direction DL, elle deviendra = ... $m.db.da\left(\sin\lambda.\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos n}{\sin n}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(575.) Si, de l'extrémité N de la base LN, on abaisse, sur la direction LR qui passe par l'autre extrémité, la perpendiculaire NR; en supposant cette perpendiculaire $= dc$, on aura $NR = db.\sin\lambda = dc$, & $db = \frac{dc}{\sin\lambda}$.

COROLLAIRE III.

(576.) Substituant cette valeur de db dans l'expression ..... $m.db.da\left(\sin\lambda.\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos n}{\sin n}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$, elle deviendra .. $m.dc.da\left(\sin\mu + \frac{\cos\mu\cos n}{\sin\lambda.\sin n}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE IV.

(577.) Dans le cas où l'on demanderoit la résistance horisontale, on auroit $\sin\mu = 1$, & $\cos\mu = 0$: donc cette résistance sera = $m.dc.da\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta)^2$.

PLANC. III.

COROLLAIRE V.

(578.) La force, ou résistance, horisontale est donc à celle qui s'exerce dans une direction quelconque comme l'unité est à $\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos\nu}{\sin\lambda.\sin\nu}$; ou comme $\sin\nu.\sin\lambda$ est à $\sin\nu.\sin\lambda.\sin\mu + \cos\mu.\cos\nu$.

COROLLAIRE VI.

(579.) Si l'on nomme H la force, ou résistance, horisontale; celle qui s'exerce suivant une direction quelconque sera $= H\left(\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos\nu}{\sin\lambda.\sin\nu}\right)$.

COROLLAIRE VII.

(580.) Dans le cas où l'on demanderoit la force, ou résistance, verticale, on auroit $\sin\mu = 0$, & $\cos\mu = 1$: cette résistance sera donc $= \frac{H.\cos\nu}{\sin\lambda.\sin\nu}$.

COROLLAIRE VIII.

FIG. 51. & 53. (581.) Si l'horisontale NO, perpendiculaire à la base LN, est supposée $= de$, on aura $\cos\nu : \sin\nu :: de : da = \frac{de.\sin\nu}{\cos\nu}$; cette valeur étant substituée dans l'expression de la force . . . . $m.db.da\left(\sin\lambda.\sin\mu + \frac{\cos\mu\cos\nu}{\sin\nu}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\sin\theta)^2$, la changera en celle-ci $m.db.de\left(\frac{\sin\nu.\sin\lambda.\sin\mu}{\cos\nu} + \cos\mu\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE IX.

(582.) Dans le cas où l'on voudroit avoir la résistance verticale, on auroit $\sin\mu = 0$, & $\cos\mu = 1$, & par conséquent cette résistance seroit $= m.db.de\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE X.

(583.) Puisque l'angle que forme la direction du mouvement avec la différencio-différencielle, est exprimé par θ, on aura aussi $\sin\theta = \sin\lambda.\sin\nu.\sin\mu. + \cos\mu.\cos\nu$, dans le cas où il seroit question de la force, ou résistance, suivant cette direction.

COROLLAIRE XI.

(584.) Dans le mouvement horisontal, $\sin\mu = 1$, & $\cos\mu = 0$: donc, dans ce cas, $\sin\theta = \sin\lambda.\sin\nu$.

COROLLAIRE XII.

(585.) Le mouvement étant vertical, $\sin\mu = 0$, & $\cos\mu = 1$: donc, dans ce cas, on aura $\sin\theta = \cos\nu$.

COROLLAIRE

PLANC. III.

COROLLAIRE XIII.

(586.) La résistance horisontale, dans le cas où la direction du mouvement est aussi horisontale, sera donc $m.dc.da\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \lambda . \sin n)^2$; & la résistance verticale, lorsque la direction du mouvement est pareillement verticale, sera $= m.db.de\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \cos n)^2$.

SCOLIE.

(587.) Dans tous les cas ci-dessus, on doit entendre que la surface *AB* est en partie plongée dans le Fluide, & en partie au dehors, de sorte que *a* exprime la distance verticale de la différencio-différencielle *LKMN*, jusqu'à la superficie *P* du Fluide, celui-ci étant en repos. Toute la surface peut cependant être submergée dans le Fluide, de sorte que *Q* soit un point de la superficie du Fluide. Dans ce cas, la lettre *a* devroit représenter la hauteur verticale *QM* du Fluide au-dessus de la différencio différencielle *LKMN*, & non la hauteur *PM* de la surface *AB*. Pour éviter toute équivoque, nous ferons $QP = D$, & $PM = a$; de sorte que la hauteur verticale du Fluide au-dessus de la différencio-différencielle *LKMN*, ne sera plus exprimée par *a*, mais par $D + a$. Cette valeur étant donc substituée, dans les expressions précédentes, en place de *a* seul, qui désignoit auparavant la hauteur verticale du Fluide, on aura (571 & 574.) $\frac{m.db.da.\sin x}{\sin n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta\right)^2 = m.db.da\left(\sin \lambda . \sin \mu + \frac{\cos \mu . \cos n}{\sin n}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta\right)^2$, pour l'expression de la résistance suivant une direction quelconque; $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta\right)^2$ pour la résistance horisontale, (577.) & (582.) $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta\right)^2$ pour la résistance verticale. Si l'on vouloit avoir les résistances suivant la direction du mouvement, comme, dans ce cas, $x = \theta$, on auroit $\frac{m.db.da.\sin \theta}{\sin n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta\right)^2$ pour l'expression de la résistance dans une direction quelconque; & (586.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \lambda . \sin n\right)^2$ pour la résistance horisontale; & enfin, $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \cos n\right)^2$ pour la résistance verticale.

FIG. 51.

PROPOSITION XV.

(588.) *Si un Fluide se meut en vertu de sa propre gravité, & prend une vîtesse constante, une partie de l'action de chacune de ses particules est détruite par une force quelconque.* FIG. 57.

Soit *CI* la superficie du Fluide inclinée à l'horison, & *B* une de ses

PLANC. III. FIG. 51. particules, l'action de la gravité sur cette particule est dirigée suivant la verticale BD, & peut se décomposer en deux autres, l'une suivant BA, perpendiculaire à la superficie CI; & l'autre suivant AD, parallele à cette superficie. Par la premiere action, le Fluide doit demeurer en équilibre, & par la seconde, sa vîtesse devroit s'accélérer: mais, par la supposition, sa vîtesse est constante; donc $du=0$. Donc la somme des puissances qui agissent pour augmenter la vîtesse, est zéro; & par conséquent il faut qu'il y ait une force, ou puissance, qui agisse dans une direction opposée, & qui détruise celle qui agit suivant AD.

PROPOSITION XVI.

(589.) *Trouver la force dont une différencio-différencielle de surface éprouve l'action, lorsqu'étant en repos, c'est le Fluide qui se meut contre elle, & qui la choque.*

Il paroît, au premier coup-d'œil, que l'action & la réaction étant égales, ce devroit être la même chose, quant à l'effet, que la surface fût en mouvement, ou que ce fût le Fluide; & que toute la différence consiste à supposer que le Fluide soit en mouvement avec la même vîtesse u, dans une direction contraire. En effet, ce principe seroit exactement vrai, si la gravitation des particules du Fluide étoit toujours perpendiculaire à sa superficie; mais il n'en est pas ainsi dans le cas où le Fluide se meut, parce que son mouvement dépend de sa *dénivellation*. Dès que le Fluide se meut, sa superficie cesse d'être de niveau, & par conséquent la direction suivant laquelle gravitent ses particules, n'est plus perpendiculaire à sa superficie. Supposons, par exemple, que le Fluide se meuve avec la vîtesse constante u, sa superficie CI étant inclinée à l'horison: la gravitation verticale α des particules du Fluide en FB peut se décomposer en deux, l'une β agissant suivant la direction BA perpendiculaire à la superficie CI, & l'autre γ parallele à cette même superficie. Exprimant donc par ω l'angle ADB que forme la verticale avec la superficie du Fluide, on aura $\beta=\alpha \sin \omega$, & $\gamma=\alpha \cos \omega$. Cette derniere gravitation, ou puissance, est détruite, comme on l'a vu *Art.* 588, & il demeure seulement la force $\beta=\alpha \sin \omega$ perpendiculaire à la superficie CI; & par conséquent nous aurons équilibre dans le Fluide, par l'action de cette puissance, & sa valeur est celle que nous devons substituer, dans les formules précédentes, en place de α seul.

Supposant maintenant, comme ci-dessus, la verticale $FB=a$, on aura $EB=a \sin \omega$; & substituant aussi cette valeur au lieu de a dans l'équation $a=\frac{Au^2}{2\alpha}$, trouvée, *Art.* 43, nous aurons $a \sin \omega=\frac{Au^2}{2\alpha \sin \omega}$;

d'où l'on tire $\frac{a}{A} = \frac{u^2}{2a\ fin\ \omega^2}$: mais (52.) $\frac{a}{A} = 32$; donc $32 = \frac{u^2}{2a\ fin\ \omega^2}$, PLANC. III.
& par conſéquent $u = 8a^{\frac{1}{2}} fin\ \omega$. Telle eſt la vîteſſe avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice fait en *B*, en vertu de l'action ſeule de la puiſſance $\beta = \alpha\ fin\ \omega$.

La vîteſſe relative avec laquelle le Fluide ſe mouvera dans l'orifice, ſera donc $= 8\ a^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm u\ fin\ \theta$; & le poids, ou la force perpendiculaire que ſupportera la différencio-différencielle *LN.NM* de la ſurface, FIG. 58.
ſera $= m.LN.NM\ (a^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2$, ou $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $m.LN.NM((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2$. Subſtituant maintenant dans cette formule les valeurs de *LN* & *NM*, qu'on a trouvées, ou bien ſubſtituant, dans les formules trouvées (587.), $(D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega$, en place de $D+a$, on aura $\frac{m.db.da.\ fin\ \lambda}{fin\ n}((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2 =$ $m.db.da\ (fin\ \lambda.\ fin\ \mu. + \frac{cof\ \mu.\ cof\ n}{fin\ n})((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2$, pour l'expreſſion de la force dans une direction quelconque ; .... $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2$, pour celle de la force horiſontale, & $m.db.dc((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2$, pour la verticale. Et ſi l'on demande les expreſſions de la force, ſuivant la direction du mouvement, on aura $\frac{m.db.da.fin\ \theta}{fin\ n}((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \theta)^2 = \ldots\ldots$ $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ fin\ \lambda.fin\ n)^2$, quand cette direction eſt horiſontale ; & $m.db.de\ ((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\ \omega \pm \frac{1}{8} u\ cof\ n)^2$, quand elle eſt verticale.

COROLLAIRE I.

(590.) Si le Fluide ſe meut horiſontalement, on aura $fin\ \omega = 1$, & les expreſſions des forces ſe réduiront à celles qu'on a trouvées pour le cas où le Fluide eſt en repos, & que la ſurface choquée eſt en mouvement ; d'où il ſuit que c'eſt ſeulement dans cette ſuppoſition que peut avoir lieu le principe généralement reçu, qui eſt que c'eſt la même choſe, quant à l'effet, que ce ſoit la ſurface qui ſe meuve, ou que ce ſoit le Fluide.

COROLLAIRE II.

(591.) Les formules précédentes ſont donc toutes renfermées dans ces dernieres : il ſuffit de faire $fin\ \omega = 1$, pour les obtenir.

PROPOSITION XVII.

(592.) *Trouver la force qui agit ſur une différencio-différencielle de ſurface, lorſque la ſurface & le Fluide ſont en mouvement.*

Pour avoir la ſolution de ce cas, il ne faut que chercher la valeur de la vîteſſe compoſée des deux autres, ſçavoir, celles de la ſurface & du Fluide, & la ſubſtituer, dans ces dernieres formules, en place de u. On ſubſtituera de même, en place de θ, la valeur de l'angle que forme la direction compoſée avec la différencio-différencielle de la ſurface. Ces ſubſtitutions faites, on aura les formules qui conviennent au cas propoſé, comme il eſt évident, par la théorie de la compoſition & de la décompoſition des forces.

SCOLIE.

(593.) Un Fluide étant un corps, il ſemble que nous aurions dû nous aſſujettir, dans la théorie de ce Chapitre, aux loix & aux principes que nous avons donnés dans le *Chap. VI du Livre I*; puiſque l'impulſion d'une ſurface contre un Fluide, eſt une vraie percuſſion. Sa force, déſignée par π dans le Chapitre cité, & qui eſt $= \frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$, ſe réduit à $\pi = DH$, dans le cas préſent, où la dureté, ou denſité D, du Fluide eſt négligeable par rapport à celle de la ſurface, ou du corps; c'eſt-à-dire que la force dont la ſurface ſouffre l'action, eſt en raiſon directe de la denſité du Fluide, & de l'amplitude H de l'impreſſion. Mais cette maniere d'enviſager la queſtion ne nous auroit pas conduit à une connoiſſance parfaite de la force qui a fait l'objet de nos recherches : car, quoique nous connoiſſions la valeur de H dans le cas du repos, laquelle n'eſt en effet que l'aire de la ſurface du corps choquant perpendiculaire à la direction du mouvement, nous ne la connoiſſons pas dans le cas du mouvement actuel, parce qu'alors cette valeur n'eſt plus la même, attendu qu'elle ſubit des altérations. Nous n'aurions pas obtenu une connoiſſance plus parfaite, en nous ſervant de l'équation $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$ qu'on a trouvée, *Art.* 312, équation à laquelle ſe réduit le cas dont il eſt ici queſtion; ou bien $\pi = \frac{H\alpha x}{I}$, en ſuppoſant la vîteſſe initiale U avec laquelle ſe mouvoit la ſurface égale à zéro : car l'impreſſion totale I étant comme Hx, cette équation nous eût ſeulement appris que la force π, dont la ſurface éprouve l'action, eſt comme la puiſſance α qui la pouſſe. C'eſt pour cela que nous avons tâché de prendre un autre chemin, qui, comme on l'a vu, nous a conduit à la vraie connoiſſance de la valeur de π, qui eſt $= \frac{m.db.da\ \text{ſin}\ \pi}{\text{ſin}\ \pi}((D+a)^{\frac{1}{2}}\ \text{ſin}\ \omega \pm \frac{1}{2}u\ \text{ſin}\ \theta)^2$. Mais, quelque ſimple que ſoit la théorie que nous avons employée, elle ne laiſſeroit pas cependant de pouvoir être combattue par des raiſonnements très-ſolides, ſi l'expérience ne la confirmoit pas, au-

tant qu'elle le fait, par tous les moyens qu'on peut employer à cette vérification, comme on le verra par la suite. Au reste, ces embarras ont existé dans tous les temps, & ont fait regarder ce sujet comme de la plus grande difficulté; les plus célebres Géometres en ont fait l'objet de leurs recherches, & avouent qu'ils ont tâché seulement d'atteindre le but, sans y être parvenus entiérement.

Le Docteur *Wallis*, dans ses *Œuvres Mathematiques*, établit cette force seulement comme la simple vitesse; & c'est d'après cette doctrine qu'il fonde tous ses calculs sur le mouvement des corps projettés dans l'air. Il ne donne pas d'autre raison pour appuyer son sentiment, & pour suivre cette regle, si ce n'est, qu'avec une vitesse double, une surface en mouvement écarte une quantité double de Fluide, & qu'elle en écarte une quantité triple avec une vîtesse triple, & ainsi de suite. Il ajoute qu'on pourroit lui objecter qu'avec une vîtesse double, la surface met en mouvement une quantité double de Fluide, en lui donnant une vîtesse double; que par conséquent il paroît que la surface a besoin d'une force doublée pour le mouvoir : mais il répond à cela, en disant que la surface ne meut pas le Fluide, qu'elle ne fait seulement que le séparer. Il est étonnant que les difficultés qui résultent de ce principe, ne se soient pas présentées au Docteur *Wallis*, & qu'il n'ait pas senti l'insuffisance de cette réponse. En effet, il est bien difficile de concevoir comment la surface peut séparer le Fluide sans le mouvoir, & sans le mouvoir avec une vîtesse proportionnelle à la sienne.

Léonard Euler, ce grand Géometre, s'explique ainsi dans sa *Science Navale*. Qu'on suppose, dit-il, une surface plane AB, dont l'aire soit $= a^2$, mise en mouvement dans l'eau, suivant la direction CO qui lui est perpendiculaire. Soit, de plus, M le poids de du corps dont AB est la surface, & v la hauteur dont il devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle il exécute son mouvement. Soit aussi $Cc = dx$, l'espace qu'il parcourt dans un instant, de sorte que, pendant cet instant, la surface passe de la situation AB à la situation ab, Aa étant $= Cc = Bb$; & comme le corps perd de sa vîtesse, il met $v - dv$, pour exprimer la hauteur d'où le corps devroit tomber pour acquérir sa vîtesse diminuée. Ceci supposé, le même Auteur poursuit ainsi : le corps aura choqué, dans cet instant, l'eau contenue dans l'espace $AabB$, dont le poids est égal à ma^2dx, en exprimant par m la densité, ou la pesanteur spécifique, de l'eau : & en supposant que le centre de gravité de la surface soit dirigé suivant la même ligne Cc, dans laquelle se trouve

celui du volume de l'eau *AabB*, afin qu'il n'y ait aucune rotation, cette quantité d'eau se mettra en mouvement, & après le premier instant, elle continuera de se mouvoir avec la même vîtesse que le corps. La quantité de mouvement sera donc, après ce premier instant, celle du corps & celle de l'eau réunies ; c'est-à-dire, . . . $(M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}}$, laquelle doit être égale au mouvement qu'avoit le corps au commencement de l'action, c'est-à-dire, immédiatement avant le choc, mouvement qui étoit $= Mv^{\frac{1}{2}}$. Donc nous aurons, dit-il, $Mv^{\frac{1}{2}} = (M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}} = (M+ma^2dx)(v^{\frac{1}{2}} - \frac{dv}{2\sqrt{v}})$; ce qui donne $Mdv = 2ma^2vdx$. Il suppose ensuite que p est une puissance qui, dirigée suivant CO, soit capable de produire le même effet que la force qui pousse la surface ; & delà il déduit $Mdv = pdx = 2ma^2vdx$, ou $p = 2ma^2v$; c'est-à-dire que la puissance équivalente à la force qui pousse la surface, ou que cette force elle-même, est égale au double du poids d'une colonne d'eau dont la base est la surface choquée, & la hauteur celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut.

Pour réduire cette théorie à la nôtre, nous supposerons, dans l'équation $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha + \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$, $\sin\alpha = 1$, & $\sin\theta = 1$; ce qui la changera en $m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}u)^2$; d'où l'on voit que ces deux théories ne peuvent convenir entre elles qu'en faisant $D+a=0$, c'est-à-dire, en supposant que la différencio différencielle choquée coïncide précisément avec la superficie du Fluide : car, dans ce cas, la force devient $= m.dc.da.\frac{1}{64}u^2$, ou $= m.dc.da.v$, en substituant (52.) la valeur de $\frac{1}{64}u^2$ qui est $= v$; expression qui convient avec celle d'*Euler*, avec la seule différence que la sienne est double de celle-ci. Mais on voit que, dans le fait, sa théorie ne convient avec la nôtre que dans un cas seulement, qu'il est presque impossible de supposer ; & encore résulte-t-il de la théorie d'*Euler* que la force est égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la base est la surface choquée, & dont la hauteur est celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut ; résultat dont l'Auteur avoue lui-même n'être pas satisfait, en considérant que le poids que supporte une surface, est seulement le poids simple de la même colonne d'eau, comme notre théorie l'indique.

Cette observation paroîtra encore plus digne d'attention, si, au lieu de $Mdv = pdx$, on fait $Mdv = \frac{pdx}{32}$, qui est la seule équation légitime. En effet, on a vu (41 & 52.) que dans les corps graves

qui tombent verticalement, $dv = \frac{Mudu}{32M}$, u désignant la vîtesse avec laquelle se meut le corps ; & dans le cas où son mouvement seroit produit par la puissance p, on a $dx = \frac{Mudu}{p}$ (41.) : en combinant ces deux équations, on en tire $32dv = \frac{pdx}{M}$, ou $Mdv = \frac{pdx}{32}$, ce qui donne $\frac{pdx}{32} = 2ma^2vdx$, ou $p = 64ma^2v$; c'est-à-dire que la résistance est égale au poids de 64 colonnes d'eau, dont la base de chacune est la surface choquée, & dont la hauteur est celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut. Ce résultat, qui indique un poids prodigieux, paroîtra sans doute bien étrange, & bien éloigné des conséquences que nous ont fourni les principes établis dans le Chapitre précédent.

En outre, il faut observer que le poids de la quantité d'eau que meut le corps, n'est pas ma^2dx, mais (554.) celui d'une colonne d'eau, dont la base est la surface a^2, & dont la hauteur est celle du Fluide au-dessus de cette surface ; de sorte que le poids sera d'autant plus grand, & par conséquent la résistance d'autant plus grande, que la surface sera plus profondément enfoncée dans le Fluide. Ce résultat, si clair & si évident, ne peut cependant se déduire ni du calcul, ni des équations supposées. On pourroit, au reste, se convaincre de cette vérité, sans cette considération : il suffit, pour cela, de lire le *Scolie* qui est à la fin de la *Proposition XXXV* du *Livre II* de la *Philosophie Naturelle* de *Newton* ; on y verra clairement que le corps, à la vérité, ne choque que la partie de Fluide exprimée par ma^2dx, mais que cette partie en choque une autre qui est devant elle, & cette derniere celle qui la suit, & ainsi de suite successivement, sans qu'il soit possible d'assigner aucune limite ; de sorte que le corps choque immédiatement, ou médiatement, une quantité de Fluide qu'il n'est pas possible de déterminer, bien loin de ne choquer que la quantité contenue dans l'espace a^2dx.

Daniel Bernoulli, Auteur connu si avantageusement dans la république des lettres par ses sçavants Ouvrages, fait un calcul semblable, duquel il conclud de la même maniere (*a*), que le Fluide n'étant pas élastique, la résistance est égale au double du poids d'une colonne du même Fluide, dont la base est la surface choquée, & la hauteur celle d'où le corps devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut : mais il ajoute que, si le Fluide étoit

(*a*) *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, Mois de Juin & Octobre 1727.*

élaſtique, la réſiſtance ſeroit exprimée par une colonne quadruple, c'eſt-à-dire qu'elle ſeroit double de la premiere. Ce réſultat eſt conſéquent pour la vîteſſe qui demeure aux corps, non-ſeulement élaſtiques, mais parfaitement élaſtiques, après que la plus grande impreſſion eſt entiérement formée. Cette vîteſſe a été trouvée (273.) pour le cas dont il eſt queſtion, $= \frac{(M-ma^2dx)u}{M+ma^2dx} = u-du$ *; d'où l'on tire $(M-ma^2dx)u = (M+ma^2dx)(u-du)$, ou $Mudu = 2ma^2u^2dx$; & en ſubſtituant pour *Mudu* ſa valeur *pdx*, il vient $p = 2ma^2u^2$; c'eſt-à-dire, la réſiſtance double de celle qu'on vient de trouver, le Fluide n'étant point élaſtique **. Tout ce qu'on peut dire de ce calcul, c'eſt qu'il eſt ſujet aux mêmes difficultés, & aux mêmes objections que le précédent; ſans compter la ſuppoſition que le Fluide ſoit parfaitement élaſtique, quoiqu'il ne puiſſe cependant exercer ſon élaſticité totale qu'après un temps infini. Ce qu'il y a de plus étonnant dans tout ceci, c'eſt que nos Auteurs n'ayant déterminé que la force qu'éprouvent les ſurfaces, il ne leur ſoit pas venu à l'eſprit qu'il eſt impoſſible que cette force ſoit ſimplement comme une fonction de la vîteſſe; car celle-ci devenant zéro, la force devroit auſſi devenir $= 0$; ce qui eſt contraire à tous les principes du Chapitre précédent, principes dont la certitude eſt reconnue de tout le monde, & par ces Auteurs mêmes.

Newton commence l'examen de cette queſtion par une voie toute oppoſée. Il donne, dans la *Section I* (*Philoſophia Naturalis*, *Lib. II*), les réſultats, ou les conſéquences qui doivent ſuivre de la ſuppoſition que les réſiſtances ſont comme les ſimples vîteſſes; & dans le *Scolie* qui termine la même Section, il dit: *Au reſte, l'hypotheſe qui fait la réſiſtance des corps dans la raiſon des ſimples vîteſſes, eſt plus*

* Pour appliquer au cas préſent les principes de l'*Art.* 273, auquel l'Auteur renvoie, on fera attention, 1°. que la vîteſſe primitive du corps choquant eſt ici repréſentée par u; tandis qu'elle étoit repréſentée par U dans l'endroit cité; 2°. que la vîteſſe primitive du corps choqué, qui eſt ici le Fluide, eſt zéro, ainſi $V = 0$; 3°. que la vîteſſe du corps choquant, après le premier inſtant, c'eſt-à-dire, après que la plus grande impreſſion eſt achevée, eſt, dans le cas préſent, $= u-du$.

** Pour voir diſtinctement la vérité de ce que l'Auteur avance, il ne faut que ſubſtituer (52.) à la place de u^2, ſa valeur $64v$, v exprimant la hauteur dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîteſſe u; alors on aura $p = 128ma^2v$, quantité double de $64ma^2v$ qu'il vient de trouver, le Fluide n'étant pas élaſtique. Quand l'Auteur dit que le réſultat de *Daniel Bernoulli* eſt conſéquent pour la vîteſſe qui demeure aux corps parfaitement élaſtiques, après que la plus grande impreſſion eſt entiérement formée, il eſt évident qu'il n'entend parler que de ce qui concerne la duplicité de la réſiſtance, & non de ſa meſure effective, qui, comme on le voit, ne convient nullement avec ſes principes, & eſt d'ailleurs abſolument contraire à ce que l'expérience manifeſte, comme on le verra par la ſuite.

mathématique

mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune ténacité, les résistances des corps sont en raison doublée des vîtesses: *car*, dit le même Auteur, *dans un temps moindre, un corps qui se meut avec une plus grande vîtesse, communique, à la même quantité du milieu, un mouvement plus grand, en raison de sa plus grande vîtesse. Donc, en temps égal, il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raison doublée, à cause de la plus grande quantité des parties du milieu qui sont mues; & la résistance, qui n'est que la force de réaction, est égale, ou proportionnelle, au mouvement communiqué.* Ce raisonnement, qui est commun à tous les Auteurs, depuis le Docteur *Wallis*, sert de base à notre Philosophe; & c'est d'après lui qu'il examine, dans la *Section II*, les conséquences qui doivent résulter de la supposition que les résistances sont comme les quarrés des vîtesses. Ensuite, dans la *Section III*, il passe à l'examen des propriétés qui devroient résulter, si les résistances étoient en partie comme les simples vîtesses, & en partie comme leurs quarrés. L'objet de l'analyse de ces différentes hypothèses, est de les comparer ensuite avec les expériences, & de découvrir ainsi laquelle est d'accord avec les loix de la nature. Dans les *Sections IV* & *V*, il détermine le mouvement que doivent prendre les corps qui tournent dans des milieux qui résistent selon les premieres suppositions; & traite de la densité & compression de ces milieux. Dans la *Section VI*, il traite du mouvement & de la résistance qu'éprouvent les pendules, ou les fils à plomb qui oscillent autour d'un point fixe par l'action de la gravité. Enfin, dans la trente-unieme & derniere *Proposition*, il démontre que les différences des arcs décrits en descendant, aux arcs décrits en montant, sont comme les résistances. Mais il suppose, pour cela, que les pendules oscillent dans la cycloïde, afin que toutes leurs oscillations soient de même durée; ou, comme nous l'avons dit, *Art.* 369, que les oscillations des pendules soient d'une très-petite étendue, pour que les arcs qu'ils décrivent coïncident avec ceux de la cycloïde. En outre, le même sçavant Auteur n'a pas négligé de faire & de répéter avec soin les expériences nécessaires pour la recherche d'un principe aussi important.

Toutes ces expériences sont rapportées dans le *Scolie* général qui suit la *Proposition XXXI*. Il s'est servi, pour les premieres, du mouvement d'un pendule de 10 pieds $\frac{1}{2}$ anglais de longueur, composé d'un globe de bois de 6 pouces $\frac{7}{8}$ de diametre. Voici la premiere Table qu'il en donne.

Longueur des demi-arcs décrits, exprimés en pouces,	{ 2. 4. 8. 16. 32. 64.
Différences des arcs observés.	{ $\frac{1}{656}$. $\frac{1}{242}$. $\frac{1}{69}$. $\frac{4}{71}$. $\frac{8}{37}$. $\frac{24}{29}$.

Les premiers nombres sont dans la raison de 1 à 2 : il faudroit donc, pour que les résistances fussent comme les quarrés des vitesses, ainsi que le dit *Newton*, dans le *Scolie* qui termine la premiere *Section*, il faudroit, dis-je, que les seconds fussent dans la raison de 1 à 4.

La premiere raison est celle de $\frac{1}{656}$ à $\frac{1}{242}$, ou celle de 1 à 2 $\frac{172}{242}$.
La seconde est celle de 69 à 242, ou de 1 à 3 $\frac{35}{69}$.
La troisieme est celle de 71 à 276, ou de 1 à 3 $\frac{63}{71}$.
La quatrieme est celle de 37 à 142, ou de 1 à 3 $\frac{31}{37}$.
La cinquieme est celle de 29 à 111, ou de 1 à 3 $\frac{24}{29}$.

Toutes ces raisons sont, comme on le voit, plus grandes que celle de 1 à 4, qui est la raison des quarrés des arcs, ou des quarrés des vitesses. Cependant notre respectable Auteur remarque, avec raison, que les dernieres, dans lesquelles le pendule faisoit de grandes oscillations, sont très-proches d'être comme les quarrés; & par conséquent il en conclud que, dans ces oscillations, les résistances sont à-peu-près comme ces mêmes quarrés. Mais il n'en arrive pas de même dans les petites oscillations : dans la premiere, la raison étoit seulement comme 1 à 2 $\frac{172}{242}$; & il est évident qu'on peut présumer que, si l'on avoit continué à faire des expériences, en diminuant de plus en plus les oscillations, on auroit enfin trouvé les résistances dans la raison de 1 à 2, c'est-à-dire, comme les simples vitesses, puisque la raison a été trouvée de plus en plus grande, à mesure que les oscillations ont été plus petites.

Une autre suite d'observations faites avec le même pendule, & rapportées au même endroit, ne présente rien de plus satisfaisant : voici la Table qu'il en donne.

Demi-arcs décrits, exprimés en pouces.	{ 2. 4. 8. 16. 32. 64.
Différences des arcs observés.	{ $\frac{1}{748}$. $\frac{1}{272}$. $\frac{4}{325}$. $\frac{12}{250}$. $\frac{24}{125}$. $\frac{36}{68}$.

Chacune de ces différences étant comparée avec celle qui la suit immédiatement, on aura les raisons de 1 à 2 $\frac{204}{272}$; de 1 à 3 $\frac{113}{325}$; de 1 à 3 $\frac{225}{250}$; de 1 à 4; & de 1 à 2 $\frac{103}{136}$. Il est cependant certain qu'il y en a une dans le rapport de 1 à 4, qui est exactement la raison du quarré des vitesses; mais la suivante, celle de 1 à 2 $\frac{103}{136}$, est plus grande, quoiqu'elle dût être moindre, suivant la diminution

qui s'observe dans toutes les précédentes ; ce qui prouve clairement que la différence $\frac{24}{185}$ est excessivement grande, & qu'il s'est glissé quelque erreur dans cette observation. En diminuant cette différence, la derniere raison deviendra plus petite ; mais celle qui la précede augmentera, & ne sera plus celle de 1 à 4.

Ce que nous avons avancé ci-dessus est vérifié dans deux autres suites d'observations, faites avec une balle de plomb de deux pouces de diametre, ajustée au pendule, en place de celle de bois : en voici les deux Tables.

PREMIERE TABLE.

Demi-oscillations décrites, exprimées en pouces.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
Différences des arcs observés.	$\frac{1}{1808}$.	$\frac{1}{912}$.	$\frac{1}{386}$.	$\frac{1}{140}$.	$\frac{4}{181}$.	$\frac{4}{53}$.	$\frac{8}{30}$.

SECONDE TABLE.

Demi-oscillations décrites, exprimées en pouces.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
Différences des arcs observés.	$\frac{1}{2040}$.	$\frac{1}{1036}$.	$\frac{1}{420}$.	$\frac{1}{159}$.	$\frac{1}{51}$.	$\frac{8}{121}$.	$\frac{6}{35}$.

Toutes ces différences comparées donnent les raisons plus grandes que celle de 1 à 4 ; mais particuliérement les premieres de chaque suite sont de 1 à $1\frac{896}{912}$, & de 1 à $1\frac{1004}{1036}$, qui sont bien proches de celle de 1 à 2, c'est-à-dire, d'être comme les simples vitesses.

Les mêmes choses arrivent dans d'autres expériences faites dans l'eau, desquelles *Newton* fait encore mention ; mais sous quelque forme qu'elles soient faites, les résultats ne permettent pas de conclure que les résistances sont comme les quarrés des vîtesses, mais bien plutôt comme les simples vîtesses, puisque les petites oscillations les donnent ainsi ; & qu'elles doivent nécessairement être fort petites, pour qu'on puisse regarder les oscillations faites dans des arcs circulaires, comme confondues avec celles faites dans des arcs de cycloïde.

Quoi qu'il en soit, *Newton* frappé de ces disparités, & du peu d'accord de ses expériences avec la doctrine établie dans le *Scolie* qui termine la *premiere Section*, sur la mesure des résistances, avoue franchement qu'il n'a pas grande confiance dans ses expériences, & témoigne le desir qu'il auroit qu'on les répétât. Les mêmes raisons, sans doute, l'ont engagé à rechercher la loi de la résistance, non d'après le principe, ou la supposition, qu'elle est proportionnelle au quarré des vîtesses, ou à la simple vitesse, mais en la sup-

PLANC. III. posant comme une fonction $hu+ku^{\frac{3}{2}}+lu^{2}$ de la vîtesse. Il résout donc ce cas ; mais les résultats que lui donne cette hypothese, ne fournissent pas moins de disparités, lorsqu'on vient à comparer les observations les unes avec les autres ; de sorte qu'on ne peut absolument rien conclure de toutes ces expériences. Enfin, dans la *Section VII*, notre Auteur traite de la résistance qu'éprouvent les corps projettés dans un Fluide ; mais ce qu'il dit, à ce sujet, est fondé sur ce principe, que la résistance, ou, comme nous la nommons ici, la force qu'éprouvent les surfaces, est comme les quarrés des vîtesses. C'est donc supposer ce qui étoit en question, & ce qu'il étoit nécessaire d'examiner & de déterminer.

On a encore déduit des résultats moins certains, & des conclusions moins satisfaisantes, des expériences physiques faites avec de petites machines, ou instruments, dont les livres sont remplis. Il suffit d'observer que le frottement seul qui a lieu dans ces petites machines, ou même celui des Fluides contre les parois des orifices par lesquels ils jaillissent, est capable de produire des effets très-considérables, & de laisser beaucoup d'incertitude dans les résultats des expériences de cette nature qu'on pourroit faire, quelque soin qu'on y apportât d'ailleurs.

On verra encore plus évidemment combien on étoit éloigné d'arriver à la vraie connoissance des forces de résistance, par toutes les routes qu'on a suivies jusqu'ici, lorsqu'on verra démontré, par notre théorie, que les résistances ne suivent ni la loi des simples vîtesses, ni celle de leurs quarrés ; mais que cette loi varie suivant les circonstances & les dispositions des surfaces choquées dans les Fluides.

CHAPITRE III.

Des Forces avec lesquelles les Fluides agissent contre des Superficies planes, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XVIII.

(594.) *DÉTERMINER la dénivellation qui a lieu dans la surface d'un Fluide, par l'action, ou le mouvement, d'une surface qui se meut dans ce Fluide.*

FIG. 51. Soit AB une surface plane, de la forme d'un parallélogramme rectangle, & située de maniere que deux de ses côtés soient horison-

taux ; ſuppoſons que cette ſurface ſe meuve dans un Fluide en repos, & d'une denſité uniforme ; on aura (571.) la force, ou réſiſtance, qu'éprouvera la différencio-différencielle $KLMN$, en ne ſuppoſant pas toute la ſurface AB ſubmergée dans le Fluide, = ... $\frac{m\, db.da.\text{ſin}\, \varepsilon}{\text{ſin}\, \varepsilon}(\surd a \pm \frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta)^2$, ou en intégrant par rapport à b, c'eſt-à-dire, en conſidérant b ſeulement comme variable, on aura la force, dont tout le rectangle différenciel $FHIG$ éprouvera l'effet, = $\frac{mb.da.\text{ſin}\, \varepsilon}{\text{ſin}\, \varepsilon}(\surd a \pm \frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta)^2$. PLANC. III.

Suppoſons maintenant que AH repréſente la même ſurface vue de profil, CD étant la ſuperficie du Fluide, il eſt clair que nous aurons pour un point tel que E, dans lequel la ſurface s'éloigne du Fluide, ou le fuit, $\surd a - \frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta = 0$, même avant que a ſoit $= 0$; ce qui donne $a = PE = \frac{1}{64} u^2\, \text{ſin}\, \theta^2$: puiſque, pour ce point E, la force différencielle $\frac{mb.da.\text{ſin}\, \varepsilon}{\text{ſin}\, \varepsilon}(\surd a - \frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta)^2$ doit être $= 0$, & par conſéquent le Fluide ne choque, ni ne comprime la ſurface en ce point, non plus qu'en aucun de ceux qui ſont au-deſſus de E : il doit donc ſe former, dans l'eſpace CPE, un creux, ou cavité CEP. Dans la partie DF, par laquelle la ſurface choque le Fluide, il ſe forme, au contraire, une élévation DFP; car en faiſant $\surd a + \frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta = 0$, il en réſulte $\surd a = -\frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta$, expreſſion dans laquelle le ſigne négatif indique que le point auquel correſpond cette valeur de a, eſt au-deſſus de P, origine de a. En quarrant l'équation $\surd a = -\frac{1}{8} u\, \text{ſin}\, \theta$, on aura $a = \frac{1}{64} u^2\, \text{ſin}\, \theta^2$, hauteur de ce point au-deſſus de P. C'eſt ainſi que, par le mouvement de la ſurface AH, le Fluide altere ſon niveau dans toute la longueur de cette ſurface, & dans tout l'eſpace CD. FIG. 88.

COROLLAIRE.

(595.) Pour déterminer les forces dont les différencielles des ſurfaces ſupportent l'effort dans les dénivellations, nous n'aurons qu'à faire $\surd a$ négatif pour la ſurface qui choque le Fluide, & le faire poſitif pour celle qui s'éloigne de lui. On aura donc la force qu'éprouve une différencielle dans la dénivellation, tant pour une ſurface que pour l'autre, $= \frac{mb.da.\text{ſin}\, \varepsilon}{\text{ſin}\, \varepsilon}(a - \frac{1}{4} u\, \text{ſin}\, \theta \surd a + \frac{1}{64} u^2\, \text{ſin}\, \theta^2)$. Lorſque c'eſt le Fluide qui ſe meut, cette force eſt = ... $\frac{mb.da.\text{ſin}\, \varepsilon}{\text{ſin}\, \varepsilon}(a\, \text{ſin}\, \omega^2 - \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u\, \text{ſin}\, \omega\, \text{ſin}\, \theta + \frac{1}{64} u^2\, \text{ſin}\, \theta^2)$.

SCOLIE.

(596.) Ces dénivellations ſont celles qu'on peut remarquer tous

les jours, lorſque des corps ſe meuvent dans des Fluides. Dans la partie où ils ſont frappés horiſontalement, on voit une intumeſcence, ou élévation; & dans la partie oppoſée, on voit, au contraire, un creux, ou cavité. Les hauteurs verticales de ces dénivellations ſont telles que nous venons de les déterminer; mais on ne prétend cependant pas que la ſurface qui, ſuivant la théorie, devroit correſpondre à la cavité, ſoit entiérement exempte de preſſion, ni que toute l'intumeſcence qui lui eſt égale, demeure complette, ou ſoit la même dans toute la longueur de la ſurface; parce que le Fluide s'introduit dans la cavité par les côtés de la ſurface, & s'écoule de l'intumeſcence, en allant vers les extrémités de la même ſurface, & cela dans une direction perpendiculaire au mouvement de celle-ci. Ainſi le Fluide occupe & déſoccupe ſucceſſivement une partie de la cavité & de l'élévation que nous avons déterminée. Ces quantités deviennent ſenſibles toutes les fois qu'on veut déterminer la valeur préciſe, ou abſolue, de la force qui agit ſur les ſurfaces; parce que l'augmentation, ou la diminution de l'effet produit par la dénivellation, correſpond également à tous les points de la ſurface qui ſont ſubmergés dans le Fluide; & quoique ce ſoit une quantité inſenſible, priſe ſeulement en partie, elle eſt conſidérable dans le tout, ou lorſqu'on en prend la ſomme totale. En effet, la différence qui correſpond ſeulement à la partie dénivellée, eſt très-petite quand les corps occupent une grande profondeur dans le Fluide, & que les vîteſſes avec leſquelles ils ſe meuvent, ne ſont pas fort grandes; car, comme on le verra dans la ſuite, l'action même de tout le creux, ou de toute l'élévation, devient négligeable dans ces cas, principalement lorſque les angles θ & x ſont fort aigus.

PROPOSITION XIX.

(597.) *La cavité* CEP, *& l'élévation* DFP, *ſont égales & ſemblables; & les courbes* CE, DF, *qui terminent le Fluide, ſont, l'une & l'autre, des paraboles du premier genre, dont le parametre eſt* $= 64 \sin \omega^2$, *& dont les axes ſont les verticales* CB, DB, *éloignées du point* P *de la quantité* $CP = PD = u \sin \theta$.

Soit ſuppoſé *CB* ou *DB* l'abſciſſe, & *BI* l'ordonnée; & que la ſurface *AH* paſſe, dans un temps déterminé, de *CB* en *AH*, ou de *AH* en *DB*; tous les points, ou toutes les particules du Fluide, comme *I*, priſes dans la ſurface de la courbe, auront parcouru, dans le même temps, leurs ordonnées correſpondantes, leſquelles ſeront, par conſéquent (589.), proportionnelles aux vîteſſes qu'auront

les particules, ou feront $= 8\, fin\, \omega \sqrt{CB}$, ou $= 8 fin\, \omega \sqrt{DB}$. Faifant donc CB, ou $DB = x$, & $BI = y$, nous aurons $8\, fin\, \omega \sqrt{x} = y$, ou $64\, fin\, \omega^2 x = y^2$; équation de la parabole, dont le parametre $= 64\, fin\, \omega^2$, & dont les axes font CB, DB, éloignés de P de la quantité $CP = 8\, fin\, \omega \sqrt{PE} = 8\, fin\, \omega \sqrt{\frac{u^2 fin\, \theta^2}{64\, fin\, \omega^2}} = u\, fin\, \theta$.

SCOLIE I.

(598.) Pour plus de facilité, & pour plus de clarté dans le difcours, nous appellerons déformais *Surface choquante* celle qui choque le Fluide, ou celle qui en eft choquée, lorfque c'eft le Fluide qui fe meut; & nous nommerons *Surface choquée*, celle qui s'éloigne du Fluide, ou qui le fuit.

SCOLIE II.

(599.) Comme l'expreffion des forces dans une direction quelconque, fçavoir, $\frac{m.db.da.fin\, x}{fin\, \pi}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\, \omega \pm \frac{1}{8} u\, fin\, \theta\right)^2$, fe réduit à celle des forces horifontales, qui eft $= m.dc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} fin\, \omega \pm \frac{1}{8} u\, fin\, \theta)^2$, en fubftituant feulement dc en place de $\frac{db.fin\, x}{fin\, \pi}$; & que réciproquement celle-ci peut être réduite à la premiere; il fuffira, pour plus grande facilité, de trouver, pour le préfent, les forces horifontales, qu'on réduira enfuite aux autres, en y fubftituant $\frac{db.fin\, x}{fin\, \pi}$ en place de dc, ou $\frac{b\, fin\, x}{fin\, \pi}$, en place de c, attendu que la quantité $\frac{fin\, x}{fin\, \pi}$ eft conftante, puifqu'il ne s'agit, pour le préfent, que des furfaces planes.

PROPOSITION XX

(600.) *Trouver la force horifontale qui agit fur une furface plane, de la forme d'un parallélogramme rectangle, & qui fe meut dans un Fluide immobile, avec deux de fes côtés paralleles à l'horifon, dans le cas où l'on auroit* $D = 0$, *& que l'extrémité fupérieure de la furface fortiroit du Fluide d'une quantité égale, ou plus grande que* $\frac{1}{64} u^2 fin\, \theta^2$.

La force horifontale qui agit fur la différencio-différencielle $KLMN$ de cette furface, eft (577.) $= m.dc.da(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\, fin\, \theta)^2$, fon intégrale à l'égard de c, fçavoir, $mc.da(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\, fin\, \theta)^2$, eft l'expreffion de la force qui agit fur l'efpace differenciel $FHIG$; & enfin l'intégrale de cette quantité par rapport à a, c'eft-à-dire, $mc(\frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u\, fin\, \theta + \frac{1}{64} a u^2 fin\, \theta^2)$, eft la force horifontale qui agit fur toute la furface, & il ne manque autre chofe à cette expreffion, que la quantité conftante qui doit compléter l'intégrale. Appellant donc H cette quantité conftante qui

complette l'intégrale, on aura la force horisontale qui agit sur toute la surface, $= mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2) + H$.

Pour trouver la valeur de H, il faut considérer que, n'ayant point égard à la dévinellation du Fluide, & faisant $a=0$, toute l'intégrale doit s'évanouir : donc, dans ce cas, $H=0$. Cela devroit effectivement arriver pour la surface choquante, s'il n'y avoit pas une partie de cette surface hors du Fluide; mais, comme nous supposons ici qu'elle est en partie hors du Fluide, la dénivellation doit nécessairement produire son effet. Nous devons donc ajouter cette quantité pour la surface choquante, & la retrancher, au contraire, pour la surface choquée. Il est donc question maintenant de trouver cette quantité. Pour cela, nous pouvons nous servir de l'intégrale ci-dessus, en faisant $a^{\frac{1}{2}}$ négatif pour les deux surfaces (595.), ce qui la réduit à $mc(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{64} au^2 \sin \theta)$; quantité qui est $=H$. Substituant maintenant à la place de a toute la valeur de la dénivellation que nous avons trouvée $= \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2$, nous aurons la force qui provient de la dénivellation, ou $H = mc(\frac{u^4 \sin \theta^4}{2.64^2} - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.8.64} + \frac{u^4 \sin \theta^4}{64^2}) = \frac{mc.u^4 \sin \theta^4}{6.64^2}$; & par conséquent la force totale dont la surface entiere éprouve l'action, est $= mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin \theta + \frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2 \pm \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2})$.

COROLLAIRE.

(601.) Comme la hauteur de la dénivellation est $= \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2$, si cette quantité est négligeable à l'égard de a, hauteur totale de la surface submergée dans le Fluide, on pourra, sans crainte d'erreur, négliger la dénivellation dans l'expression de la force, ou négliger tous les termes de la force, comme $\frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2}$, dans lesquels a ne se trouve pas.

PROPOSITION XXI.

(602.) *Trouver la même force qui agit sur la surface choquante, lorsque cette surface aura une moindre hauteur hors du Fluide, que celle qu'acquiert la dénivellation.*

Si le point A, extrémité de la surface, tombe entre P & F, le Fluide passera par-dessus la surface, & n'agira sur elle que dans la partie effective de la même surface qui est hors du Fluide, & dont, par supposition, la hauteur est moindre que $\frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2$, hauteur totale de la dénivellation. Soit n la hauteur effective de la partie de la surface qui est hors du Fluide. En substituant cette valeur en place de a, dans l'expression de la force qui provient de la dénivellation, c'est-à-dire,

c'est-à-dire, dans $mc(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2)$, il en résultera $mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin\theta^2)$, pour l'expression de la même force dans le cas présent; par conséquent la force totale dont la surface entiere éprouve l'action, fera $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2) + mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u \sin\theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin\theta^2)$.

PROPOSITION XXII.

(603.) *Trouver, dans le même cas que ci-dessus, la force qui agit sur la surface, lorsque c'est le Fluide qui se meut.*

Il faut observer que, dans ce cas, nous ne pouvons pas exclure de la formule la valeur de ω. L'expression de la force dont la différencio-différencielle éprouve l'action, est $= m.dc.da(a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$, & son intégrale $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2)$ exprime celle dont toute la surface éprouve l'action, sans y comprendre la force qui résulte de toute la dénivellation. Pour cette derniere force, l'integrale est $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2)$, en substituant n en place de a, pour la surface choquante, on aura la force qui provient de la dénivellation $= mc(\frac{1}{2}n^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin\theta^2)$, & celle dont toute la surface choquante éprouve l'action, sera en tout $= mc(\frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc(\frac{1}{2}n^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin\theta^2)$. A l'égard de la surface choquée, on substituera dans l'intégrale, $\frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$, en place de $a \sin\omega^2$*, & la force totale pour cette surface, sera $= \ldots\ldots$,
$mc(\frac{1}{2}a \sin\omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 - \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2})$.

COROLLAIRE I.

(604.) Si l'extrémité supérieure de la surface coïncide avec la superficie du Fluide; c'est à-dire, si le point *A* tombe sur *P*, alors on aura $n = 0$, & la force totale qui agit contre la surface choquante, se réduira à $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2)$.

COROLLAIRE II.

(605.) Au contraire, si l'extrémité *A* de la surface est élevée au-dessus du Fluide d'une quantité égale, ou plus grande que $\frac{u^2 \sin\theta^2}{64 \sin\omega^2}$,

* On trouve cette valeur, en faisant la quantité $a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{8}u \sin\theta$ égale à zéro, comme on a fait celle qui lui correspond dans *l'Art.* 594. Si l'on procéde comme dans *l'Art.* 600, on trouve l'expression même de l'Auteur pour la force qui agit sur la surface choquée.

on aura $n = \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ *; & la force totale qui agit contre la surface choquante se réduira à $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$.

SCOLIE.

(606.) L'intégrale $mc(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2) + mc(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} n u^2 \sin \theta^2)$, offre un cas assez remarquable, celui dans lequel le point H tombe en P, ou lorsque $a = 0$: auquel cas la surface n'est, comme on voit, aucunement submergée dans le Fluide. Car l'intégrale se réduit alors à . . . . $mc(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} n u^2 \sin \theta^2)$, qui est la valeur de la force qui agit sur la partie élevée PF ; mais, comme le Fluide n'a aucune prise sur la surface, il n'agit nullement sur elle, & par conséquent elle ne peut l'élever : donc, en ce cas, la quantité restante doit aussi s'évanouir, quoique la formule ne l'indique pas **.

PROPOSITION XXIII.

(607.) *Trouver la force horisontale qui agit sur la surface choquée, ou sur la surface qui suit le Fluide, dans le cas où son extrémité supérieure* A *tombe entre* P & E, *ou que* D *a quelque valeur moindre que* $PE = \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Comme le Fluide ne parvient que jusqu'à E, en faisant $PE = D + a$, & substituant dans l'intégrale $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ en place de $D + a$, elle doit se réduire à zéro. L'intégrale de la différencielle de *l'Art.* 589 est $mc\left(D a \sin \omega^2 + \frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin \theta^2\right) + H$. Substituant donc, dans cette formule, $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ à la place de $D + a$, ou $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2} - D$, à la place de a, elle se réduit à . . . . $mc\left(-\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{64} D u^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right) + H = 0$, d'où l'on tire $H = mc\left(\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{64} D u^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$, & l'intégrale complette

---

* Cette valeur de n est celle de a qu'on tire de l'équation $a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta = 0$.

** Cette singularité ne doit nullement faire soupçonner l'exactitude de la formule ; elle vient de la maniere dont l'Auteur procéde pour calculer la force dont il est question. En effet, il calcule d'abord la force, sans avoir égard à la dénivellation ; & ensuite il y ajoute l'effet de cette derniere. Or il n'y a, de cette sorte, que la premiere partie de l'expression dont les termes soient des fonctions de a, & par conséquent il n'y a qu'elle qui doive éprouver quelque variation suivant les différentes valeurs qu'on suppose à a. Les termes de la seconde partie sont des fonctions de n ; il est évident que s'ils étoient aussi des fonctions de a, ou si l'on avoit pu comprendre l'effet de la dénivellation dans le calcul primitif, la disparité que l'Auteur fait remarquer n'auroit pas lieu. Au reste, on peut appliquer à ce cas une partie de ce qui est exposé, *Art.* 610.

sera $= mc\left(\frac{1}{2}(D+a)^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} \sin\omega . \sin\theta + \frac{1}{64}u^2(D+a)\sin\theta^2 - \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2 \sin\omega^2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(608.) Si l'on avoit $D = 0$, ou si l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en P, ou plus haut que P, la force, ou l'intégrale complette se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\omega . \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 - \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2 \sin\omega^2}\right)$.

COROLLAIRE. II.

(609.) Si, au contraire, l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en E, on auroit $D = \frac{u^2 \sin\theta^2}{64 \sin\omega^2}$ ce qui donne $a = 0$ pour compléter l'intégrale, & l'intégrale complette devient = ...
$mc\left(Da \sin\omega^2 + \frac{1}{2}a^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\sin\omega . \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2\right)$.

SCOLIE.

(610.) Si le point H, ou l'extrémité inférieure de la surface, tombe en E, l'intégrale, ou la force qui agit contre la surface choquée, doit s'évanouir, & en effet elle s'évanouit *. Mais ce n'est pas la même chose, si le point H tombe entre E & P, ou en P; dans ce cas, $D = 0$, $a = 0$, & la force, ou l'intégrale complette, se réduit à $-\frac{mcu^4 \sin\theta^4}{6.64^2 \sin\omega^2}$, tandis qu'elle devroit également s'évanouir, puisque le Fluide n'atteint pas la surface pour la choquer, lorsque sa partie submergée est moindre que la quantité PE. Ce résultat vient de ce qu'après avoir assigné la force qui agit sur toute la surface, en négligeant la dénivellation, on en a soustrait la force avec laquelle le Fluide cesse d'agir dans la cavité CEP. En effet; on voit que cela doit être ainsi, quand le point H tombe plus bas que le point E, ou quand il tombe sur le point E même; mais lorsqu'il tombe plus haut, ce n'est plus la même chose, attendu que la quantité qu'on soustrait est alors plus grande que celle qui exprime la force, sans avoir égard à la dénivellation. Au reste, comme la force qui agit contre la surface choquée, doit être égale à zéro, toutes les fois que le point H tombe en E, ou qu'il tombe plus haut : l'expression qu'on a donnée dans la Proposition, sert seulement pour le cas où ce point tombe en E, ou au-dessous, c'est-à-dire, lorsqu'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}} =$ ou $> \frac{u \sin\theta}{8 \sin\omega}$.

PROPOSITION XXIV.

(611.) *Trouver la force horisontale qui agit sur les mêmes surfaces, lorsque* D *a quelque valeur, ou que l'extrémité supérieure* A *est submergée dans le Fluide.*

---

* On peut aisément s'en assurer, en faisant $D = 0$, & $a = \frac{u^2 \sin\theta^2}{64 \sin\omega^2}$, dans l'intégrale complette., *Art.* 607.

Dans cette supposition, l'intégrale doit se réduire à zéro, lorsque $a = 0$, puisque le Fluide ne peut agir que jusqu'à l'extrémité supérieure de la surface à laquelle $a = 0$. Or, la force dont la différencio-différencielle éprouve l'action, est (589.) $= \ldots\ldots\ldots$ $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{8} u \sin\theta\right)^2$, & son intégrale $\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Da \sin\omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 \pm \frac{1}{6} u (D+a)^{\frac{3}{2}} \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2\right) + H$, exprime celle qui agit sur toute la surface, H marquant la quantité constante qui doit compléter l'intégrale. Faisant maintenant $a = 0$, elle deviendra $= \pm \frac{1}{6} u L^{\frac{3}{2}} \sin\omega.\sin\theta + H = 0$; ce qui donne $\ldots\ldots$ $H = \mp \frac{1}{6} u D^{\frac{3}{2}} \sin\omega.\sin\theta$; & par conséquent l'expression complette de la force qui agit sur toute la surface, $= \ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Da \sin\omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 \pm \frac{1}{6} u \left((D+a)^{\frac{3}{2}} - L^{\frac{3}{2}}\right) \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE.

(612.) Si $D = 0$, c'est-à-dire, si l'extrémité supérieure de la surface tombe en P, la force dont la surface choquante éprouvera l'action, deviendra $= mc\left(\frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 + \frac{1}{6} u a^{\frac{3}{2}} \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2\right)$ comme on l'a déjà trouvée, *Art.* 604.

PROPOSITION XXV.

(613.) *Réduire les expressions des forces horisontales trouvées ci-dessus, à exprimer celles qui agissent sur une surface plane, suivant une direction quelconque.*

On a déjà dit (599.) qu'il ne falloit, pour cela, que substituer $\frac{b \sin x}{\sin n}$ à la place de c; cette substitution faite, on aura les expressions suivantes. La force qui agit sur les surfaces choquante, ou choquée, dans le cas où elles sont entiérement submergées dans le Fluide, sera (611.) $=$ $\frac{mb \sin x}{\sin n}\left(Da \sin\omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 \pm \frac{1}{6} u \left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2\right)$.

La force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin\omega^2}$ moindre que $\frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$, sera (603.) $= \ldots\ldots\ldots$ $\frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 + \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2\right) + \ldots\ldots$ $\frac{mbn \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2} n \sin\omega^2 - \frac{1}{6} n^{\frac{1}{2}} u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2\right)$; ou si n est égal, ou plus grand que $\frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$, la force deviendra (600 & 603.) $=$ $\frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2} a^2 \sin\omega^2 + \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2 + \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2 \sin\omega^2}\right)$.

La force qui agit contre la surface choquée, lorsque son extrémité supérieure est au-dessous de la superficie du Fluide, D étant en même temps plus petit que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$, sera (607.) = ...
$\frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2}(D+a)^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64}u^2(D+a)\sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$.

Enfin la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces choquante ou choquée, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation, sera (604 & 608.) $= \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64}au^2 \sin \theta^2\right)$.

PROPOSITION XXVI.

(614.) *Réduire les expressions précédentes à des fonctions de* e *&* de de

Ayant, par la construction & par la supposition, $\cos n : \sin n :: de : da$ (581.), on aura $da = \frac{\sin n \, de}{\cos n}$, & $a = \frac{e \sin n}{\cos n}$, parce que, dans ce cas, $\frac{\sin n}{\cos n}$ est une quantité constante. Substituant cette valeur de a dans les équations précédentes, on aura . . . .
$\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin n . \sin \omega^2}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} - L^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{eu^2 \sin \theta^2}{64}\right)$.
pour la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées dans le Fluide, & à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} + \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}eu^2 \sin \theta^2\right)$
$+ \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64}nu^2 \sin \theta^2\right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide de la quantité $\frac{n^2}{\sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} - \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}eu^2 \sin \theta^2\right)$
$+ \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{64}Du^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$ exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin la formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}eu^2 \sin \theta^2\right)$ exprimera la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXVII.

(615.) *Réduire les expressions précédentes au cas où la surface plane est horisontale.*

Dans ce cas, $\sin n = 0$, & $\cos n = 1$; mais avant de substituer ces valeurs dans les formules, il est nécessaire de développer la quantité $\left(D+\frac{e\sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}}$, en la réduisant à la série $D^{\frac{3}{2}}+\frac{\frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}e\sin n}{\cos n}+\frac{\frac{3}{8}e^2\sin n^2}{D^{\frac{1}{2}}\cos n^2}-$ &c. & de substituer aussi cette valeur.

Par ces substitutions, la premiere formule se réduit à .... $mbe.\sin x\,(D\sin\omega^2\pm{}^{1}D^{\frac{1}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2)=$ .... $mbe.\sin x(D^{\frac{1}{2}}\sin\omega\pm\frac{1}{8}u\sin\theta)^2$. La seconde formule n'a pas lieu, parce que, dans ce cas, il ne peut y avoir une partie de la surface hors du Fluide ; elle doit être toute entiere au dedans du Fluide, ou toute entiere au dehors. La même chose arrive à la troisieme, & par la même raison. La quatrieme se réduit à la premiere, qui, par conséquent, est l'unique.

PROPOSITION XXVIII.

(616.) *Trouver la force verticale qui agit sur la même surface plane, d'après les conditions supposées ci-dessus.*

Ce problême se résout par le problême général donné, *Art* 613, en substituant seulement $\cos n$ à la place de $\sin x$, parce que, dans ce cas, $\sin x = \cos n$ (573 & 580.); on aura donc ....

$$\frac{mb\cos n}{\sin n}\left(Da\sin\omega^2+\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2\pm\frac{1}{6}u\sin\omega.\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right),$$

pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées dans le Fluide.

La formule $\frac{mb\cos n}{\sin n}(Da\sin\omega^2+\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2+\frac{1}{6}u\sin\omega.\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}au^2\sin\theta)+\frac{mb\cos n}{\sin n}(\frac{1}{2}n^2\sin\omega^2-\frac{1}{6}un^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin\omega^2}$.

La formule $\frac{mb\cos n}{\sin n}(Da\sin\omega^2+a^2\sin\omega^2-\frac{1}{6}u\sin\omega.\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2)+\frac{mb\cos n}{\sin n}\left(\frac{1}{2}D^2\sin\omega^2+\frac{1}{64}Du^2\sin\theta^2-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2\sin\omega^2}\right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsque $D<\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}$.

Enfin $\frac{mb\cos n}{\sin n}(\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2\pm\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2)$ est la formule qui exprime la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXIX.

(617.) *Trouver les mêmes expressions en fonctions de e.*

Qu'on substitue (614.) la valeur de $a = \frac{e \sin \eta}{\cos \eta}$, & l'on aura .....
$mb\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin \eta}{2 \cos \eta} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos \eta}{6 \sin \eta}\left(\left(D + \frac{e \sin \eta}{\cos \eta}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right)$, pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées dans le Fluide, & à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

La formule $mb\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin \eta}{2 \cos \eta} + \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos \eta}{6 \sin \eta}\left(\frac{e \sin \eta}{\cos \eta}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) +$ $\frac{mb \cos \eta}{\sin \eta}\left(\frac{1}{2} n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2\right)$ sera l'expression de la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est plus haute que la superficie du Fluide, de la quantité $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 n^2 \sin \omega^2}$.

La formule $mb\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 \sin \eta}{2 \cos \eta} - \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos \eta}{6 \cos \eta}\left(D + \frac{e \sin \eta}{\cos \eta}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) +$ $\frac{mb \cos \eta}{\sin \eta}\left(\frac{1}{2} D \sin \omega^2 + \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6 . 64^2 \sin \omega^2}\right)$ exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin la formule $mb\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin \eta}{2 \cos \eta} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos \eta}{6 \sin \eta}\left(\frac{e \sin \eta}{\cos \eta}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right)$ exprimera la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces, ayant $D = 0$, & négligeant la dénivellation.

COROLLAIRE I.

(618.) Si la surface étoit horisontale, l'expression de la force verticale dont elle éprouveroit l'action, seroit (615.) = ... $mbe . \cos \eta \left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$; mais, dans ce cas, $\cos \eta = 1$, la force verticale sera donc $= mbe\left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$

COROLLAIRE II.

(619.) Si, outre ces conditions, c'est la surface, & non le Fluide, qui se meut verticalement, on aura $\sin \omega = 1$, & $\sin \theta = 1$, & la force verticale qu'elle éprouvera, se réduira alors à $mbe(\surd D \pm \frac{1}{8} u)^2$. De plus, si la vîtesse u est égale à celle qu'acquerroit le Fluide en tombant de la hauteur D, on auroit (52 & 564.) $u = 8 \surd D$, ou $\frac{1}{8} u = \surd D$, ce qui réduit la force qui agit sur la surface, à $mbe(\surd D \pm \surd D)^2$; c'est-à-dire que la force qui agira sur la surface choquante, sera, en ce cas, $= 4\, mbeD$, ou égale au poids de quatre colonnes de Fluide, dont la base $= be$, & dont la hauteur $= D$, qui est celle du Fluide au-dessus de la surface cho-

quante. La force qui agiroit ſur la ſurface choquée, ſeroit, dans le même cas $=0$; ce qui paroîtra ſenſible, en conſidérant que le Fluide ne peut choquer la ſurface, ſa vîteſſe étant, dans ce cas, égale à la ſienne.

COROLLAIRE III.

(620.) Si c'étoit le Fluide qui ſe mût verticalement, la ſurface demeurant en repos, & ayant, comme auparavant, $\mathit{ſin}\ \kappa=0$; on auroit $\mathit{ſin}\ \theta=1$, & $\mathit{ſin}\ \omega=0$: par conſéquent la force verticale qui agira ſur la ſurface, ſe réduira à $\frac{1}{64}mbeu^2$. Si, de plus, la vîteſſe u étoit celle qu'acquerroit le Fluide, en tombant de la hauteur D, on auroit, comme ci-deſſus, $\frac{1}{8}u=\sqrt{D}$, ou $\frac{1}{64}u^2=D$, ce qui réduit la force à $mbeD$; c'eſt-à-dire qu'elle eſt égale au poids d'une ſimple colonne de Fluide, dont la baſe eſt $=be$, & dont la hauteur $=D$. On voit donc que, ſi le Fluide tomboit verticalement, par l'action de ſa propre gravité, d'une hauteur quelconque D, & choquoit une ſurface horiſontale be, la force dont cette ſurface éprouveroit l'action, ſeroit égale au poids de la colonne de Fluide qui ſeroit au-deſſus de la ſurface; c'eſt-à-dire, au poids d'une colonne du même Fluide dont la baſe ſeroit la ſurface choquée, & la hauteur celle de la chûte du Fluide.

COROLLAIRE IV.

(621.) L'expreſſion de la force différencio-différencielle .... $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\ \mathit{ſin}\ \omega \pm \frac{1}{8}u\ \mathit{ſin}\ \theta\right)^2$, nous fait connoître que, ſi la quantité $D+a$ étoit conſtante; c'eſt-à-dire, ſi la ſurface plane étoit toujours horiſontale, ſa force verticale totale, ou intégrale, ſeroit $=$ $mbe\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\mathit{ſin}\,\omega + \frac{1}{8}u\ \mathit{ſin}\ \theta\right)^2$.

SCOLIE I.

(622.) On voit clairement ici combien il eſt différent que ce ſoit la ſurface qui ſe meuve, ou que ce ſoit le Fluide: dans le premier cas, la force qui agit ſur la ſurface, eſt $4mbeD$, & dans le ſecond, elle eſt ſeulement $mbeD$; c'eſt-à-dire que la premiere eſt quatre fois plus grande que la ſeconde. Cependant je ne connois aucun Auteur qui n'ait ſuppoſé ces deux cas comme étant abſolument les mêmes; ou qui n'ait ſuppoſé que, dans l'un & l'autre cas, la force qui agit ſur la ſurface, eſt toujours la même.

SCOLIE II.

(623.) *Newton*, dans les *Corollaires* 7, 8, 9 & 10 de la *Propoſition XXXVI*

XXXVI, *Section VII* du *Livre II* de sa *Philosophie naturelle*, dit qu'une petite surface horisontale, comme celle que nous supposons, *dbde*, ou *be*, exposée à l'action d'un Fluide qui tombe librement par l'action de sa gravité, ne supporte seulement que le poids de la moitié de la colonne de Fluide, dont la base est *be*, & la hauteur *D*; ce qui n'est que la moitié de ce que nous avons trouvé. Il suppose, pour cela, que si *ACDBA* est un vase constamment plein d'un Fluide, & qui ait l'ouverture *EF* à son fond, le Fluide n'aura de mouvement que dans l'espace *AMEFNB*, qu'il appelle *Cataracte*, terminé par les deux surfaces courbes *AME*, *BNF*, le Fluide demeurant sans mouvement, ou comme un corps dur, dans les espaces *CAE* & *DBF*. Il suppose ensuite qu'on mette au milieu de l'ouverture *EF* la surface *PQ*, & il dit que le Fluide qui est au-dessus d'elle, & est contenu dans l'espace *PHQ*, restera pareillement sans mouvement, à cause qu'il se forme deux autres surfaces convexes *HQ*, *HP*, & que le Fluide se divise comme en deux cataractes. Il dit, de plus, que le poids que soutiendra la surface *PQ*, sera seulement celui du Fluide contenu dans l'espace *PHQ*, parce qu'il suppose que tout le Fluide contenu dans les espaces *AMEPH* & *HQFNB* se meut avec toute liberté, & sans agir sur les surfaces *HP*, *HQ*. Nous laissons au Lecteur à considérer s'il est possible que le Fluide tombe avec une vîtesse connue sur la surface *HP*, sans agir sur elle, & sans lui faire supporter d'effort. Ceci seroit contre tous les principes reçus, & même contre ceux établis par ce sçavant Auteur. Selon notre théorie, la force verticale qui agit sur une différencio-différencielle de la surface même *HP*, est $=$ . . . . $m.db.de((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega + \frac{1}{2} u \sin \theta)^2$, ou à cause que $\sin \omega = 0$, & que $\frac{1}{2} u = a^{\frac{1}{2}}$, elle est $= m.db.de.a \sin \theta^2$. D'où l'on voit que, dans le cas où l'on admettroit tout ce que suppose notre Auteur, non-seulement la surface *PQ* soutient le poids du Fluide *PHQ*, mais encore la la force $m.\int db.de.a \sin \theta^2$, dans laquelle expression θ désigne l'angle que forme la verticale avec la courbe *HP*, & *a* la hauteur du Fluide au-dessus de l'orifice : de sorte qu'en supposant θ constant, ce poids est celui d'une colonne de Fluide, dont la base est *PQ*, & la hauteur celle du Fluide, multipliée par $\sin \theta^2$.

PLANC. III. FIG. 60.

CHAPITRE IV.

De la force avec laquelle les Fluides agissent contre des surfaces quelconques, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XXX.

(624.) *TROUVER la force horisontale qui agit sur une surface quelconque qui se meut dans un Fluide.*

Ayant divisé la surface, par des plans horisontaux & verticaux, en petites surfaces quadrilateres sensiblement planes : si l'on cherche la force positive, ou négative, qui agit sur chacune de ces petites surfaces, en en prenant la somme, on aura la force totale. Cela posé, soit D la hauteur verticale comprise depuis la superficie du Fluide jusqu'à l'extrémité supérieure d'un des petits quadrilateres dont a exprime la hauteur ; d'après cela, on aura (600.) . . . . .
$mc.da((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\, sin\, \theta^2)^2$ pour l'expression de la force horisontale qui agit sur une différencielle de ce même petit quadrilatere ; & l'intégrale $mc\,(Da+\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}u((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}})\, sin\, \theta + \frac{1}{64}au^2\, sin\, \theta^2)$, sera la force dont le quadrilatere entier éprouvera l'action, a marquant toute sa hauteur verticale. Substituant maintenant $D-\frac{1}{2}a$ pour D, afin que D marque la hauteur verticale de la superficie du Fluide au-dessus du centre du petit quadrilatere, l'expression de toute la force horisontale qui agit sur cette petite surface sera = ...
$mc(Da \pm \frac{1}{6}u((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})\, sin\, \theta + \frac{1}{64}au^2\, sin\, \theta^2)$: & celle qui agit sur la surface entiere, qui est la somme de toutes ces petites surfaces, sera exprimée par . . . .
$m\int c\,(Da \pm \frac{1}{6}u((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})\, sin\, \theta + \frac{1}{64}au^2\, sin\, \theta^2)$.

COROLLAIRE I.

(625.) Dans l'une & l'autre dénivellation du Fluide, la force sera (595.) $= m\int c(Da - \frac{1}{6}u((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})\, sin\, \theta + \frac{1}{64}au^2\, sin\, \theta^2)$.

COROLLAIRE II.

(626.) Réduisant en série la quantité $(D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}$, on a $\frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}a(1-\frac{a^2}{96\,D^2}-\frac{a^4}{2048\,D^4}-\&c.)$: donc, en substituant, on aura la force horisontale qui agit sur un des petits quadrilateres = ...
$mc(Da \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\, sin\, \theta(1-\frac{a^2}{96\,D^2}-\frac{a^4}{2048\,D^4}-\&c.)+\frac{1}{64}au^2\, sin\, \theta^2)$.

COROLLAIRE III.

(627.) Si D étoit très-grand par rapport à a, ou si l'on pouvoit traiter a comme une différencielle par rapport à D, on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, ce qui réduiroit la force qui agit sur un des petits quadrilateres quelconque, ou choquant, ou choqué, à . . . .
$mc(Da \pm \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} au \sin\theta + \frac{1}{64} au^2 \sin\theta^2) = mca(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \sin\theta)^2$.

COROLLAIRE IV.

(628.) Le cas dans lequel le rapport $\frac{a}{D}$ peut être le plus grand, est lorsqu'il s'agit des petits quadrilateres contigus à la superficie du Fluide. Comme D exprime la hauteur verticale de la superficie du Fluide au-dessus du centre du petit quadrilatere, on aura, en ce cas, $D = \frac{1}{2} a$. Substituant cette valeur dans la série, elle se réduit à $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.$; d'où l'on voit que, même dans ce cas extrême, tous les termes de la série sont presque négligeables, excepté le premier.

COROLLAIRE V.

(629.) Comme dans ce cas extrême, où $D = \frac{1}{2} a$, la quantité $(D + \frac{1}{2} a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2} a)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, la force qui agit sur le petit quadrilatere est $= mc(\frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin\theta + \frac{1}{64} au^2 \sin\theta^2)$.

COROLLAIRE VI.

(630.) La série $\frac{3}{2} D^{\frac{1}{2}} a \left(1 - \frac{a^2}{96 D^2} - \frac{a^4}{2048 D^4} -, \&c.\right)$ se réduira donc aussi, dans ce cas, à $\frac{3}{2} a \sqrt{\frac{1}{2} a} (1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.) = a^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne $(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&c.) = \frac{2}{3} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}}$; d'où l'on voit encore combien il s'en faut peu que la série ne se réduise à son premier terme, même dans ce cas extrême où les petits quadrilateres sont contigus à la superficie du Fluide.

COROLLAIRE VII.

(631.) Il suit de tout ce qu'on vient de dire, que a étant une différencielle par rapport à D, la série se réduit toujours au premier terme, même dans les petits quadrilateres contigus à la superficie du Fluide.

PROPOSITION XXXI.

(632.) *Trouver la force horisontale qui agit sur la surface d'un corps formé par la révolution d'une ligne, droite ou courbe, autour d'un axe*

PLANC. III. *horisontal, en supposant que ce corps se meuve dans un Fluide, suivant la direction de ce même axe, & parallelement à l'horison.*

FIG. 61. Soit ACG une courbe qui, en tournant autour de l'axe horisontal AM, forme le corps $ADSM$, & supposons que ce corps se meuve dans la direction de l'axe AM, cet axe conservant toujours son parallélisme avec l'horison. Soit mené les deux plans horisontaux $STOPV$, $XYQNZ$, infiniment voisins, & les deux verticaux $BGOQW$, $MCPN$, qui formeront sur la surface du corps le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, auquel on élevera la perpendiculaire QE, & on tirera la ligne QB, qui sera égale à l'ordonnée $BG = y$. Soit mené de même la verticale QI, & l'horisontale QF parallele à l'axe : cette ligne formera, avec le quadrilatere $QOPN$, un angle égal au complément de FQR, QR étant le prolongement de EQ : mais BEQ est égal à FQR; donc l'angle que forme la direction QF du mouvement avec le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, est égal au complément de BEQ, ou égal à l'angle EQB, dont le sinus se mesure par la raison de la sous-perpendiculaire BE à la perpendiculaire EQ. Ce sinus sera donc $\sin\theta = \frac{BE}{EQ}$. Mais, dans quelque courbe que ce soit, la sous-perpendiculaire est à la perpendiculaire, comme la différencielle de l'ordonnée est à la différencielle de la courbe *; faisant donc $AB = x$, $BG = BQ = y$, $BI = c$, & $IQ = a$, on aura . . . $\sin\theta = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$, & $BQ = y = \sqrt{c^2 + a^2}$; ce qui donne, en supposant a constant, $dc = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Ces valeurs étant mises dans l'expression de la force horisontale $m.dc.da\,(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2$, on aura pour l'expression de la force horisontale, & suivant la direction de l'axe, qui agit sur un quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, de quelque surface, plane ou courbe, que ce soit, la quantité $\frac{mdaydy}{\sqrt{y^2 - a^2}}(\sqrt{D+a} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dy^2 + dx^2}})^2$. En intégrant cette expression à l'égard de y, on aura la force qui agit sur une zone, comme $VOQZ = mda\,(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \pm$ . . $\frac{1}{4} muda \sqrt{D+a} \int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2 - a^2}\sqrt{dy^2 - dx^2}} + \frac{1}{64} mu^2 da \int\frac{ydy^3}{(dy^2 - dx^2)\sqrt{y^2 - a^2}}$. Enfin, en réintégrant par rapport à a, on aura la force qui agit sur une

PLANC. A FIG. 1. * On voit cela facilement par les triangles semblables CLI, rIi; car ils donnent $CL : LI :: ri : Ii$. Donc $\frac{CL}{LI} = \frac{ri}{Ii} = \sin\theta$.

ſurface comme $AGQZA = m\int da\,(D+a)\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} \pm$ . . . . PLANC. III.

$\frac{1}{4} mu \int da \sqrt{D+a} \int \frac{ydy^2}{\sqrt{y^2-a^2}\sqrt{dy^2+dx^2}} + \frac{1}{64} mu^2 \int da \int \frac{ydy^3}{(dy^2+dx^2)\sqrt{y^2-a^2}} + H.$

COROLLAIRE.

(633.) Si l'on ſuppoſe $x = 0$, on réduit la ſurface à un plan circulaire, qui ſe meut horiſontalement & perpendiculairement à ſa ſurface ; la force qui agit ſur cette ſurface ſera donc . . . . . . $m\int da\,(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8} u)^2 \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} + H = m\int da\,(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2 \sqrt{y^2+a^2} + H$: ou, en ſubſtituant r en place de y, & en place du rayon par la rotation duquel le plan circulaire eſt engendré, cette force ſe réduira enfin à $m\int da\,(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2 \sqrt{r^2-a^2} + H.$

PROPOSITION XXXII.

(634) *Trouver la force horiſontale qui agit ſur la ſurface d'un cylindre qui flotte ſur un Fluide, & qui ſe meut horiſontalement, ſuivant une direction perpendiculaire à ſon axe.*

Soit le cylindre $BCQDE$, H ſon axe, BE un diametre horiſontal, GI la ſuperficie du Fluide, & CAL une verticale. La réſiſtance qu'éprouve la différencielle horiſontale en C, eſt (627.) $= mca\,(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \sin\theta)^2$; formule dans laquelle nous devons ſubſtituer da pour a, & a à la place de $D = CA$; & comme $\sin\theta =$ le ſinus de l'angle LCH, en faiſant $AL = f$, on aura $\sin\theta = \frac{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{R}$, R exprimant le rayon du cylindre. Cette ſubſtitution faite, la force qui agit ſur la différencielle devient $= mcda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$; & celle qui agit ſur toute la ſurface $GCQ = mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$. FIG. 61.

PROPOSITION XXXIII.

(635.) *Trouver la force verticale qui agit ſur une ſurface quelconque qui ſe meut dans un Fluide immobile.*

Soit diviſé la ſurface du corps qui eſt dans le Fluide, en de petits quadrilateres ſenſiblement plans, par des lignes horiſontales & verticales. Cherchant enſuite la force verticale, poſitive ou négative, qui agit ſur chacun de ces petits quadrilateres, en prenant la ſomme de ces forces, on aura la force totale. Ce procédé a déja été expliqué (624.), pour trouver la force horiſontale. On ſe rappellera que l'expreſſion

PLANC. III. de la force horisontale se réduit à celle d'une autre force, suivant une direction quelconque, en substituant seulement (599.) $\frac{b \sin x}{\sin n}$ en place de c; mais, comme, dans le cas présent, le mouvement se fait verticalement *, on a (616.) $\sin x = \cos n$; c'est donc $\frac{b \cos n}{\sin n}$ que nous devons substituer dans la formule de l'Art. 624, en place de c, pour avoir l'expression de la force verticale qui agit sur une surface quelconque, & cette expression sera . . . .
$$mc\int \frac{b \cos n}{\sin n}\left(Da \pm \tfrac{1}{4}u\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)\sin\theta + \tfrac{1}{64}au^2 \sin\theta^2\right).$$

COROLLAIRE.

(636.) On aura de la même maniere la force verticale (626.) qui agit sur un quadrilatere infiniment petit, choquant ou choqué, $= \frac{mb \cos n}{\sin n}\left(Da \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}\, au \sin\theta \left(1 - \frac{a^2}{96 D^2} - \frac{a^4}{2048 D^4} - \&c.\right) + \tfrac{1}{64}au^2 \sin\theta^2\right)$; mais, comme (614.) $\frac{a \cos n}{\sin n} = e$, ou $a = \frac{e \sin n}{\cos n}$, en substituant cette valeur, la même force verticale sera aussi $=$ . . . .
$$mbe\left(D \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}} u \sin\theta\left(1 - \frac{e^2 \sin n^2}{96 D^2 \cos n^2} - \frac{e^4 \sin n^4}{2048 D^4 \cos n^4} - \&c.\right) + \tfrac{1}{64}u^2 \sin\theta^2\right);$$
ou enfin en négligeant tous les termes de cette série, excepté le premier, à cause qu'ils sont fort petits, elle sera encore $=$ . . . . .
$$mbe(D^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}u \sin\theta)^2.$$

PROPOSITION XXXIV.

(637.) Trouver la force verticale qui agit sur la surface d'un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire à son axe.

FIG. 61. La force horisontale qui agit sur une différencielle horisontale du cylindre en C, a été trouvée (634.) $= mc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, R exprimant le rayon du cylindre, a étant $= CA$, distance verticale de la différencielle à la superficie du Fluide, & AL étant $= f$. Donc la force verticale sera (635.) $= \frac{m.db.da.\cos n}{\sin n}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$. Substituant dans cette formule la valeur de $\frac{\cos n}{\sin n} = \frac{CL}{LH} = \frac{a+f}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}$,

---

* Cette expression nous paroît inexacte; il faut dire : » mais comme dans le cas présent, il s'agit » de la résistance verticale, &c » C'est sûrement ce que l'Auteur entend; car, si le mouvement se faisoit verticalement, il faudroit faire $\sin \theta = \cos n$ (Art. 585.).

la force verticale qui agit ſur la ſurface GCQ, ſera $= \ldots\ldots$ $mb\int\frac{da\,(a\pm f)}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, & la force totale qui agit ſur GQI, ſera $= 2mb\left(\int\frac{(a\pm f)\,ada}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}} + \int (a\pm f)\,u^2\,da\frac{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{64\,R^2}\right)$.

CHAPITRE V.

Des réſiſtances horiſontales qu'éprouvent les Corps, lorſqu'ils ſe meuvent dans les Fluides : ou, au contraire, lorſque ce ſont les Fluides qui ſe meuvent, & choquent les corps.

PROPOSITION XXXV.

(638.) TROUVER *la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un corps mu dans un Fluide.*

Les réſiſtances qu'éprouvent les corps mus dans les Fluides, ne ſont autre choſe que la réſultante des forces qui agiſſent ſur leurs ſurfaces ſuivant une direction déterminée; ou celle qui réſulte de la ſomme de toutes les forces, ſuivant cette même direction, en prenant poſitivement celles qui ſont poſitives, & négativement celles qui ſont négatives. Qu'on détermine donc, par les regles établies dans le Chapitre précédent, les forces horiſontales qui agiſſent ſur les ſurfaces qui terminent le corps, & qu'on en prenne la ſomme, on aura la valeur de la réſiſtance.

PROPOSITION XXXVI.

(639.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte ſur un Fluide, ayant deux de ſes côtés paralleles à l'horiſon, le parallélipipede ſe mouvant, & non le Fluide, ſuivant une direction parallele à ſes deux autres côtés, dans le cas où l'on auroit* a $>$, *ou* $= \frac{u^2 \sin\theta^4}{64 \sin\omega^2}$.

La force qui agit ſur la ſurface choquante, eſt (602.) $= \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2\right) + mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2\right)$. Celle qui agit ſur la ſurface choquée, à cauſeque $\sin\omega = 1$, eſt (609.) $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 - \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2}\right)$. Quant à la force qui agit ſur les deux ſurfaces latérales, elle eſt zéro, parce qu'étant paralleles à la direction du mouvement, on a $c = 0$. La force qui

agit sur la base ou surface inférieure, est aussi zéro, à cause qu'on a pour cette surface $da = 0$. Il n'y a donc pas d'autres forces, suivant la direction dont il s'agit, que celles qu'éprouvent les deux surfaces choquante & choquée. Cette derniere est négative, parce qu'elle rgit dans une direction contraire à la premiere; par conséquent la aésistance horisontale qu'éprouvera le parallélipede sera = ...
$mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u \sin\theta + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2 + \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(640.) Si le parallélipipede, flottant, comme on le suppose, avoit une hauteur suffisante hors du Fluide, de maniere que le Fluide ne pût passer par-dessus; ou si sa hauteur étoit égale, ou plus grande que $\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, n seroit alors $= \frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, & la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{u^4\sin\theta^4}{3.64^2}\right) = \frac{1}{3}mcu\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3\sin\theta^3}{64^2}\right)$.

COROLLAIRE II.

(641.) Si, au contraire, le parallélipipede n'avoit aucune hauteur au-dessus du Fluide, de façon que sa surface supérieure fût de niveau avec celle du Fluide, alors $n = 0$, & la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right) = \frac{1}{3}mcu\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3\sin\theta^3}{2.64^2}\right)$.

COROLLAIRE III.

(642.) En négligeant la dénivellation du Fluide, on doit négliger tous les termes où a ne se trouve pas (601.) : donc la résistance qu'éprouve le parallélipipede, en négligeant la dénivellation du Fluide, sera $= \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u\sin\theta$.

COROLLAIRE IV.

(643.) Pour pouvoir négliger la dénivellation du Fluide, il suffit seulement que la profondeur a, à laquelle la surface inférieure du parallélipipede est submergée dans le Fluide, soit très-grande à l'égard de $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$. Le parallélipipede étant donc très-grand, ou la profondeur à laquelle il s'enfonce dans le Fluide, étant très-grande à l'égard de la vîtesse $u\sin\theta$, on pourra négliger la dénivellation; & la fonction qui exprimera la résistance se réduira à une seule quantité, qui sera comme les simples vitesses u.

SCOLIE.

(644.) Nous avons établi dans cette théorie, que la force avec laquelle

quelle le Fluide agit contre une différencio-différencielle de superficie, est proportionnelle à $(8\sqrt{a \pm u \sin\theta})^2$; & le principe qui nous y a conduit est que nous avons trouvé la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit, par la même différencio-différencielle, s'il avoit un libre passage, $= 8\sqrt{a \pm u \sin\theta}$. Quelque solide que paroisse ce fondement, on pourroit cependant observer qu'il seroit peut-être également solide de supposer le poids que doit soutenir la différencio-différencielle, le même que celui de la colonne agissante du Fluide qui est au-dessus d'elle, laquelle a pour hauteur $a \pm \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$, le dernier terme $\frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$ exprimant la hauteur de l'intumescence, ou la profondeur de la cavité. Si l'on fait cette supposition, le poids que supportera la différencielle de la surface choquante, ou choquée, du parallélipipede sera $= \ldots\ldots$ $mc.da(a \pm \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2)$, quantité dont l'intégrale est $mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 + H)$, ou $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 + \frac{u^4 \sin\theta^4}{2.64}\right)$; car H devient $= \frac{u^4 \sin\theta^4}{2.64}$, en faisant $a = \mp \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$ (600.). Ainsi cette intégrale exprimeroit le poids que supporte l'une quelconque des deux surfaces, choquante ou choquée, du parallélipipede, & par conséquent la résistance qui résulte des deux seroit $= \frac{1}{32}ncau^2 \sin\theta^2$; quantité qui, comme on le verra ci-après, *Chap. VII*, doit se réduire à la moitié $\frac{1}{64}ncau^2 \sin\theta^2$, lorsque le parallélipipede se réduit à un plan. Cette détermination est tellement conforme à l'opinion généralement reçue, &, ce qui est plus, aux expériences rapportées par M. *Mariotte*, dans le *troisieme Discours* de la *seconde Partie* de son *Traité du mouvement des Eaux*, qu'elle auroit très-bien pu être d'un poids égal pour nous, ou peut-être même suffiroit-elle pour nous faire abandonner notre théorie, si la quantité d'expériences qui la justifient, non seulement de l'espece de celles qu'a faites M. *Mariotte*, mais encore toutes celles que nous avons pu employer à cette vérification, comme on le verra par la suite de ce Traité, ne lui avoient donné le plus grand crédit. Nous n'exposerons, en ce moment, que celles qui contredisent absolument les expériences de M. *Mariotte*.

Cet Auteur, dans la *Regle V* du Discours cité, donne deux expériences qu'il a faites, en exposant perpendiculairement au courant de la *Seine*, une petite planche d'un demi-pied en quarré, en se servant pour cela d'un instrument dont il donne la description. Il dit qu'avec un courant dont la vitesse étoit de 3 pieds $\frac{1}{4}$ par seconde, la planche soutint un poids de 3 livres $\frac{1}{4}$. La surface de la planche, réduite en mesure Anglaise, est de $\frac{16^2}{4 \cdot 15^2}$ *, & la vitesse du

* L'Auteur prend ici le rapport de 15 à 16 pour celui du pied anglais au pied français, ce qui

courant est de $\frac{52}{15}$ pieds. Pour comparer maintenant cette expérience avec la formule $\frac{1}{64} mcau^2 \sin\theta^2$. observons qu'on a $m = 1000$ onces, qui est le poids d'un pied cubique d'eau; $ca = \frac{1}{4} \cdot \frac{16^2}{15^2}$; $\sin\theta = 1$; & $u = \frac{52}{15}$. On aura donc, suivant la formule, le poids que devoit supporter la planche $= \frac{1}{64} 1000 \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 15^2} \cdot \frac{52^2}{15^2} = \frac{21632}{405} = 53$ onces $\frac{1}{2}$, ou 3 liv. 5 onces $\frac{1}{2}$, ce qui n'est que de 6 onces $\frac{1}{2}$ de moins que ce que dit avoir trouvé M. *Mariotte*. Dans la seconde expérience il dit que la planche soutint un poids de 9 onces, la vîtesse du courant étant de 1 pied $\frac{1}{3}$ par seconde. Suivant la formule, le poids doit être égal à $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot \frac{16^2}{4 \cdot 15^2} \cdot \frac{16}{9} = 8$ onces; quantité qui est seulement moindre d'une once que celle que donne l'Auteur; & l'on ne peut regarder ces différences comme bien sensibles, dans des expériences de cette nature. Mais on va voir combien ces expériences, que l'Auteur regarde comme si exactes, s'éloignent de celles que j'ai pratiquées moi-même pour m'assurer de leur exactitude. Une planche, de la forme d'un parallélogramme rectangle, d'un pied de large, exposée perpendiculairement à l'action d'un courant dont la vîtesse étoit de 2 pieds par seconde, a supporté un poids de 25 livres $\frac{1}{2}$, étant submergée d'un pied juste dans le Fluide. Suivant l'opinion généralement reçue, ce poids auroit dû être de $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot 4 = 62$ onces $\frac{1}{2}$, ou 3 livres 14 onces $\frac{1}{2}$, quantité bien éloignée de celle qu'a donné l'expérience. La même planche a supporté un poids de 26 livres $\frac{1}{4}$, exposée à un courant de $\frac{4}{3}$ pieds de vîtesse par seconde, & étant submergée de 2 pieds juste dans le Fluide; suivant l'opinion générale, elle auroit dû supporter un poids de $\frac{1}{64} \cdot 1000 \cdot 2 \cdot \frac{16}{9} = 56$ onces, ou de 3 livres $\frac{1}{2}$; quantité qui est encore extrêmement éloignée de celle qu'a donné l'expérience. Ce qu'il y a de plus remarquable, & ce qui doit, ce me semble, faire rejetter absolument l'opinion généralement reçue, c'est que, d'après elle, le second poids auroit dû être moindre que le premier, &, au contraire, il a été trouvé de 10 livres $\frac{3}{4}$ plus grand, ce qui est le triple du poids total 3 livres $\frac{1}{2}$ qu'on a cru jusqu'ici qu'elle devoit supporter. Au contraire, notre formule est (640.) $\frac{1}{3} mc.u \sin\theta \left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3 \sin\theta^3}{64.64}\right)$, qui, à cause que les vitesses sont petites, & que $\sin\theta = 1$, se réduit à $\frac{1}{3} mca^{\frac{3}{2}}u$; quantité dont il ne faut prendre que la moitié $\frac{1}{6} mca^{\frac{3}{2}}u$, pour les raisons qu'on exposera ci-

est très-proche de la vérité, & est suffisant pour son objet. *Voyez*, pour plus d'exactitude la note de l'*Art.* 51.

$\times \frac{16}{9} = \frac{20^2}{15^2} = \frac{400}{225} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9}$. vid. sup.

après (731.). Le poids que devoit supporter la planche dans la premiere expérience, sera donc $= \frac{1}{6}.1000.2 = 333$ onces, ou 20 liv. $\frac{5}{6}$, poids qui est seulement de 5 liv. plus fort que celui qu'a donné l'expérience; différence, au reste, qui doit aussi avoir lieu, par ce qui a été exposé, *Art.* 596. Dans la seconde expérience, le poids qu'auroit dû supporter la planche, devoit être $= \frac{1}{6}.1000(2)^{\frac{3}{2}}.\frac{4}{3} = 628$ onces, ou 39 liv. $\frac{1}{4}$, poids qui est de 13 l. plus grand que l'expérience ne l'a donné; & cet excès devoit effectivement avoir lieu, comme on vient de le dire.

Pour appercevoir & se convaincre de l'accord de l'expérience avec la théorie que nous avons donnée, il n'y a qu'à considérer la raison de 2 à $(2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{3}$, ou celle de 15 à 28, qui lui est à-peu-près égale, dans laquelle doivent être, suivant cette théorie, les deux poids supportés: car elle s'éloigne très-peu de la raison des poids $15\frac{1}{2}$ & $26\frac{1}{2}$, que l'expérience a donnés. Suivant l'opinion commune, cette raison devroit être celle de 4 à $\frac{2.16}{9}$, ou celle de 9 à 8, qui est la raison des produits des surfaces choquées par les quarrés des vîtesses; raison qui, comme on voit, est excessivement éloignée de celle de $15\frac{1}{2}$ à $26\frac{1}{2}$, qui a été fournie par l'expérience: car, comme on l'a dit, cette raison devoit être de plus grande égalité, tandis qu'elle est de moindre.

Les deux expériences donnent, à peu de différence, la mesure absolue de la résistance moindre d'un tiers que celle qui résulte de la théorie, comme on vient de le voir, & comme nous devions nous y attendre, d'après ce qui a été dit dans l'*Art.* 596: ensorte que, pour avoir la mesure juste & absolue de cette résistance, nous devons prendre les deux tiers de ce qui résulte de la théorie.

PROPOSITION XXXVII.

(645.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouve le même parallélipipede rectangle, se mouvant, comme on l'a supposé dans la proposition précédente, dans le cas où l'on auroit* $a =$, ou $< \frac{u^2 \sin\theta^2}{64}$.

Nous avons dit, *Art.* 610. que, dans ce cas, la surface postérieure n'étoit soumise à l'action d'aucune force; ainsi la résistance se réduira à la force qui agit sur la surface antérieure, & dont l'expression est $= mc(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2) + mc(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2)$.

COROLLAIRE I.

(646.) Si le parallélipipede étoit assez élevé au-dessus de la superficie du Fluide pour que celui-ci ne pût passer par-dessus, ou que sa hauteur fût égale, ou plus grande que $\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, alors on auroit $n = \frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$,

& la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2+\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE. II.

(647.) Si, au contraire, le parallélipipede n'avoit aucune hauteur au-dessus du Fluide; c'est-à-dire, s'il étoit entiérement submergé; alors on auroit $n=0$, & la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; la même que celle qui a lieu lorsqu'on néglige la dénivellation du Fluide.

PROPOSITION XXXVIII.

(648.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en se mouvant, comme il a été dit ci-dessus; & dans le cas où il seroit entiérement submergé dans le Fluide, ayant* $D<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, & $D+a=$, *ou* $>\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$.

La force qui agira sur la surface choquante, sera (611.) $=$ $mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}u\,\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; & celle qui agira sur la surface choquée, sera (607.) $=$ . . . . $mc\left(\frac{1}{2}(D+a)^2-\frac{1}{6}u\,\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2(D+a)-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$. Soustrayant cette derniere force de la premiere, & réduisant, la résistance deviendra $=\frac{1}{3}mcu\,\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}-mc\left(\frac{1}{2}D^2+\frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}}u\,\sin\theta+\frac{1}{64}Du^2\sin\theta^2-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE.

(649.) Si $D=0$, la résistance se réduira, comme on l'a dit (641.), à $\frac{1}{3}mcu\,\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\sin\theta^3}{2.64^2}\right)$.

PROPOSITION XXXIX.

(650.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en supposant toujours qu'il se meuve comme il a été dit ci-dessus; & dans le cas où il seroit entiérement submergé dans le Fluide, ayant* $D<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, & $D+a=$, *ou* $<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$.

Dans ce cas, la surface postérieure n'éprouve aucune action (610.), & la résistance se réduit à la force qui agit sur la surface antérieure, laquelle est (611.) $=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}u\,\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE.

(641.) Si l'on avoit $D=0$, & par conséquent $n=0$, la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; la même qu'en négligeant la dénivellation du Fluide.

PROPOSITION XL.

(652.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en supposant qu'il se meuve toujours d'après les mêmes conditions, & dans le cas où il seroit entierement submergé dans le Fluide, ayant* $D =$, *ou* $> \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2$.

La force qui agira sur la surface choquante, sera (611.) $= \ldots$ $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6} u \sin\theta((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{64} au^2 \sin\theta^2\right)$; & celle qui agira sur la surface choquée, sera $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6} u \sin\theta((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{64} au^2 \sin\theta^2\right)$. Soustrayant cette derniere expression de la premiere, & réduisant, on aura la résistance $= \frac{1}{3} mcu \sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)$.

COROLLAIRE I.

(653.) Réduisant $(D+a)^{\frac{3}{2}}$ en série, cette résistance sera $=$ $\frac{1}{2} mcD^{\frac{1}{2}} au \sin\theta\left(1 + \frac{a}{4D} - \frac{a^2}{24D^2} + \&c.\right)$.

COROLLAIRE II.

(654.) Si D étoit très-grand à l'égard de a; c'est-à-dire, si le parallélipipede étoit submergé à une profondeur très-grande, de sorte que sa hauteur a fût très-petite à l'égard de la profondeur D, on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, & la résistance deviendroit $= \frac{1}{2} mcD^{\frac{1}{2}} au \sin\theta$.

COROLLAIRE III.

(655.) Comme, pour compléter l'intégrale, tant de la force qui agit sur la surface choquante, que de celle qui agit sur la surface choquée, dans le cas où le parallélipipede est entiérement submergé dans le Fluide, & où l'on a $D =$, ou $> \frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$, on doit supposer $a = 0$; on peut, si l'on veut, sommer, ou soustraire, d'abord les forces des différencielles, & trouver ainsi leur résistance, laquelle étant ensuite intégrée d'après la supposition que $a = 0$, donnera la résistance qu'éprouve le parallélipipede. La force qui agit sur la différencielle choquante, est (589.), après avoir intégré à l'égard de $c =$ $mc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u \sin\theta\right)^2$, & celle qui agit sur la surface choquée est $= mc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u \sin\theta\right)^2$. Soustrayant cette derniere de la premiere, on aura la résistance qui provient de ces deux différen-

PLANC. III. cielles $= \frac{2}{3} mc.da.u \sin\theta (D+a)^{\frac{1}{2}}$; & en intégrant, on aura la résistance qu'éprouve le parallélipipede $= \frac{2}{3} mc.u \sin\theta (D+a)^{\frac{3}{2}} + H$. Supposant maintenant $a = 0$, il vient $\frac{2}{3} mc.D^{\frac{3}{2}} u \sin\theta + H = 0$, ce qui donne $H = -\frac{2}{3} mc.D^{\frac{3}{2}} u \sin\theta$: par conséquent l'intégrale complette, ou la résistance qu'éprouve le parallélipipede sera = ... $\frac{2}{3} mc.u \sin\theta ((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}})$, comme ci-dessus (652.).

COROLLAIRE IV.

(656.) Toutes les fois que, pour compléter les intégrales, tant de la surface choquante que de la surface choquée, nous devrons supposer $a = 0$, comme dans le cas où l'on a $D =$, ou $> \frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$; ou, ce qui revient au même, dans le cas où l'on peut négliger la dénivellation du Fluide, à cause que $\frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$ seroit très-petit par rapport à a, on pourra, dans tous ces cas, chercher premiérement la résistance des différencielles, d'où l'on tirera, en intégrant, celle de tout le corps.

COROLLAIRE V.

(657.) Comme la longueur du parallélipipede suivant la direction du mouvement, ne se trouve dans aucune des expressions des résistances horisontales qu'éprouve le parallélipipede, dans les différents cas que nous avons examinés, il s'ensuit qu'il éprouvera toujours la même résistance horisontale, quelle que soit sa longueur dans cette même direction.

COROLLAIRE VI.

(658.) Comme, en faisant cette dimension égale à zéro, le parallélipipede devient un plan quadrilatere qui se meut avec deux de ses côtés paralleles à l'horison; il s'ensuit que toutes les expressions des résistances horisontales que nous avons trouvées pour le parallélipipede, conviennent aussi pour ce quadrilatere.

PROPOSITION XLI.

(659.) Trouver la résistance horisontale qu'éprouve un parallélipi-
FIG. 63. *pede rectangle* AB *qui flotte sur un Fluide, ayant ses côtés* AF & KB *inclinés à l'horison, en supposant que ce soit le parallélipipede, & non le Fluide, qui se meuve horisontalement, & suivant une direction parallele à* AI, *dans le cas où* a *est* =, *ou* $> \frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$, *& que le Fluide ne passe point par-dessus.*

Soit ED la superficie du Fluide, AJ une droite qui lui est parallele, & CH, EG, FQ, des verticales; faisant $EG = a$, on aura

la force qui agit sur la surface choquante $DJ = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathit{sin}\,\theta + \frac{1}{64}au^2\,\mathit{sin}\,\theta^2 + \frac{u^4\,\mathit{sin}\,\theta^4}{6.64^2}\right)$. Si l'on appelle Δ l'angle que forme la base AF avec l'horisontale AJ, le sinus de l'angle que forme cette horisontale avec CJ sera $= \mathit{cos}\,\Delta$, & cette valeur substituée, dans l'expression ci-dessus, en place de $\mathit{sin}\,\theta$, la changera en $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathit{cos}\,\Delta + \frac{1}{64}au^2\,\mathit{cos}\,\Delta^2 + \frac{u^4\,\mathit{cos}\,\Delta^4}{6.64^2}\right)$. Par la même raison, la force qui agit sur la surface choquée EA est $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathit{cos}\,\Delta + \frac{1}{64}au^2\,\mathit{cos}\,\Delta^2 - \frac{u^4\,\mathit{cos}\,\Delta^4}{6.64^2}\right)$. Ainsi la résistance qui provient de ces deux forces, sera $= \frac{1}{3}mc.u\,\mathit{cos}\,\Delta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3\,\mathit{cos}\,\Delta^3}{64^2}\right)$.

La force qui agit sur JF est $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2\,\mathit{sin}\,\theta^2\right)$. Or, en appellant e la base AF, FI sera $= e\,\mathit{sin}\,\Delta$. En substituant donc $\mathit{cos}\,\Delta$ pour $\mathit{sin}\,\theta$, $e\,\mathit{sin}\,\Delta$ pour a, & a pour D, cette force sera $= \ldots\ldots$
$mc\left(ae\,\mathit{sin}\,\Delta + \frac{1}{2}e^2\,\mathit{sin}\,\Delta^2 + \frac{1}{6}u\,\mathit{cos}\,\Delta\left((a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mcu^2e}{64}\mathit{sin}\,\Delta.\mathit{cos}\,\Delta^2$.
On aura, par la même raison, celle qui agit sur la base $AF =$
$mc\left(ae\,\mathit{sin}\,\Delta + \frac{1}{2}e^2\,\mathit{sin}\,\Delta^2 - \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\Delta\left((a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mcu^2e}{64}\mathit{sin}\,\Delta^3$.*
Ainsi la résistance qui provient des forces qui agissent sur les deux côtés JF, AF, sera $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$mc\left(\frac{1}{6}u(\mathit{cos}\,\Delta + \mathit{sin}\,\Delta)\left((a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2e\,\mathit{sin}\,\Delta(\mathit{cos}\,\Delta^2 - \mathit{sin}\,\Delta^2)\right)$, & celle qu'éprouvera tout le parallélipipede, sera $= \ldots\ldots$
$mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathit{cos}\,\Delta + \frac{u^4\,\mathit{cos}\,\Delta^4}{3.64^2} + \frac{1}{6}u(\mathit{cos}\,\Delta + \mathit{sin}\,\Delta)\left((a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mc.u^2e}{64}\mathit{sin}\,\Delta(\mathit{cos}\,\Delta^2 - \mathit{sin}\,\Delta^2)$.

COROLLAIRE I.

(660.) Réduisant $(a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}}$ en série, substituant & réduisant, la résistance qu'éprouvera le parallélipipede sera encore $= \ldots\ldots$
$mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,\mathit{cos}\,\Delta + \frac{u^4\,\mathit{cos}\,\Delta^4}{3.64^2} + \frac{1}{64}u^2e\,\mathit{sin}\,\Delta\,(\mathit{cos}\,\Delta^2 - \mathit{sin}\,\Delta^2)\right) + \ldots\ldots$
$\frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\,\mathit{sin}\,\Delta(\mathit{cos}\,\Delta + \mathit{sin}\,\Delta)\left(1 + \frac{e\,\mathit{sin}\,\Delta}{4a} - \frac{e^2\,\mathit{sin}\,\Delta^2}{24a^2} + \&c.\right)$.

COROLLAIRE II.

(661.) Dans le cas où l'on négligeroit la dénivellation, il faudroit supprimer (601.) toutes les quantités dans lesquelles a ne se

* On voit que, dans le cas de la Figure, la base ne choque point le Fluide, mais, au contraire, qu'elle en est choquée; c'est ce qui fait que le terme $\frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\Delta$ &c. a le signe $-$.

PLANC. III. trouve point, ou la quantité $e \sin \Delta$, qui en a fait l'office : donc, pour ce cas, la résistance sera $= \ldots$

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \tfrac{1}{64}u^2 e \sin\Delta(\cos\Delta^2 - \sin\Delta^2)\right) + \ldots$$
$$\tfrac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\sin\Delta(\cos\Delta + \sin\Delta)\left(1 + \tfrac{e\sin\Delta}{4a} - \tfrac{e^2\sin\Delta^2}{24a^2} + \&c.\right).$$

COROLLAIRE III.

(662.) Si l'on suppose que u & Δ sont infiniment petits, on pourra négliger tous les termes dans lesquels ces grandeurs sont élevées à quelque puissance au-dessus de la premiere, & la résistance deviendra, dans ce cas, $= mc\,(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u + \tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\sin\Delta) = mca^{\frac{1}{2}}u\,(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}\sin\Delta)$.

PROPOSITION XLII.

(663.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouve un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horisontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.*

La force horisontale qui agit sur la surface GCQ, ou IDQ du cylindre BQE, a été trouvée (634.) $= mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, R exprimant le rayon du cylindre, $a = CA$ la profondeur verticale à laquelle une différencielle horisontale en C est abaissée au-dessous de la superficie GI du Fluide, & f étant $= AL$. Soustrayant donc la force qui agit sur la surface choquée IDQ, de celle qui agit sur la surface choquante GCQ, on aura la résistance qu'éprouve le cylindre $=$ $\frac{mcu}{2R}\int a^{\frac{1}{2}}da\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}$.

Fig. 62.

SCOLIE.

(664.) On peut trouver, par une autre méthode particuliere, la résistance exacte qu'éprouvent une sphere, un cylindre, ou tout autre corps formé par la révolution d'une ligne droite, ou courbe, autour d'un axe horisontal, dans la direction duquel on suppose que se fait le mouvement du corps, lorsque ces corps sont tellement submergés dans le Fluide, que a peut être négligée par rapport à D. Dans ce cas, on peut exprimer par cda une zone verticale du même corps, c désignant la circonférence entiere de la même zone, & da la différencielle de l'ordonnée*. La formule $mc.da(\sqrt{D+a} \pm \tfrac{1}{8}u\sin\theta)^2$, se réduira à $mc\,da\left(\sqrt{D} \pm \tfrac{1}{8}u\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}}\right)^2$, en supposant x l'abscisse,

* On remarquera que ce n'est point la zone verticale même du corps que l'Auteur représente par cda, mais sa projection orthographique sur le plan vertical perpendiculaire à l'axe, ou à

&

& la réſiſtance deviendra $= \frac{\frac{1}{2}mcuda^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$; ou, ſi nous ſuppoſons que c exprime la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon eſt l'unité ; nous n'aurons qu'à ſubſtituer $2ca$ pour c ſeul, & la réſiſtance deviendra $= \frac{mcuada^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$. Dans la ſphere, on a $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = -\frac{x}{r}$, r étant ſon rayon, & $ada = -xdx$: donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = \frac{x^2dx}{r}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x^3}{3r}$; ou, en faiſant $x = r$, on aura $\frac{1}{3}r^2.mcu\sqrt{D}$ pour la réſiſtance qu'éprouve toute la ſphere. Dans le cylindre on a $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = 1$. Donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = ada$; quantité dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r^2$, & la réſiſtance ſera $= \frac{1}{2}r^2.mcu\sqrt{D}$. On voit donc que la réſiſtance de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre de même diametre. Si nous mettons $\frac{1}{2}a$ en place de r, a étant le diamette de la ſphere, ou du cylindre, leurs réſiſtances ſeront $\frac{1}{12}a^2mcu\sqrt{D}$, & $\frac{1}{8}a^2mcu\sqrt{D}$.

PROPOSITION XLIII.

(665.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un corps quelconque, qui ſe meut dans un Fluide immobile.*

On diviſera la ſurface du corps en de très-petits quadrilateres, comme on l'a dit, *Art.* 624, & on cherchera la force poſitive, ou négative, qui agit ſur chacune de ces petites ſurfaces; prenant enſuite la ſomme de toutes ces forces, on aura la réſiſtance qu'éprouve tout le corps. Autrement, on peut prendre la force qui agit ſur une petite ſurface choquante d'un quadrilatere, & l'ajouter avec celle qui agit ſur la petite ſurface choquée qui lui correſpond, ou qui eſt dans la même direction; & l'on aura la réſiſtance qui provient de

---

la direction du mouvement. Il eſt évident, d'après l'*Art.* 555, que c'eſt auſſi cette projection qui entre dans l'expreſſion de la réſiſtance, & qu'on doit prendre pour cda. On peut d'ailleurs s'en convaincre, en remarquant que, puiſqu'on ſuppoſe le corps tellement ſubmergé dans le fluide, qu'on puiſſe négliger a à l'égard de D, tous les points de la circonférence de la zone peuvent être conſidérés comme à égale diſtance de la ſuperficie du fluide. Ainſi la réſiſtance que cette zone éprouve eſt la même que celle qu'elle éprouveroit étant développée, & réduite à une différencielle de ſurface plane, dont la hauteur ſeroit égale à celle de la zone, & dont la baſe ſeroit égale à ſa circonférence; cette différencielle étant d'ailleurs enfoncée à la même profondeur dans le fluide, étant ſuppoſée ſe mouvoir dans la même direction que le corps, & l'angle qu'elle forme avec cette direction étant $= \theta = \frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}}$, ou $= -\frac{x}{r}$, s'il s'agit d'une ſphere (632.). Cette quantité devient $=$ l'unité, s'il s'agit d'un cylindre : car, pour ce dernier corps, la réſiſtance ſe réduit à celle des baſes, & alors θ eſt de 90 degrés; par conſéquent $\sin\theta = 1$.

ces deux petits quadrilateres. Ajoutant donc cette résistance avec toutes celles qui résultent des autres quadrilateres, il est clair qu'on aura la résistance totale.

COROLLAIRE I.

(666.) Si θ exprime l'angle que forme la direction horisontale avec le petit quadrilatere choquant, & Θ celui que forme cette même direction avec le quadrilatere choqué correspondant, ou qui est dans la même direction que le premier, on aura . . . . $mc\left(Da + \frac{1}{6}u \sin\theta \left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$ pour la force qui agit sur le premier quadrilatere, & . . . . $mc\left(Da - \frac{1}{6}u \sin\Theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\Theta^2\right)$ pour celle qui agit sur le second. Soustrayant celle-ci de la premiere, il reste $\frac{1}{6}mcu(\sin\theta + \sin\Theta)\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}mcu^2 a(\sin\theta^2 - \sin\Theta^2)$; c'est l'expression de la résistance qu'éprouve le corps, & qui provient de l'action du Fluide sur ces deux petits quadrilateres correspondants, ou qui se trouvent dans la même ligne horisontale, parallele à la direction.

COROLLAIRE II.

(667.) La même résistance qu'éprouvent deux petits quadrilateres correspondants quelconques, sera encore exprimée par . . . .
$\pm \frac{1}{4}mcau D^{\frac{1}{2}}(\sin\theta + \sin\Theta)(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.) + \frac{mcau^2}{64}(\sin\theta^2 - \sin\Theta^2)$*.

COROLLAIRE III.

(668.) Si D étoit très-grand par rapport à a, cette expression se réduiroit à $mc(\pm\frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au(\sin\theta + \sin\Theta) + \frac{1}{64}au^2(\sin\theta^2 - \sin\Theta^2))$.

COROLLAIRE IV.

(669.) Si la partie antérieure du corps étoit égale & semblable

* On voit que la premiere partie de cette expression suit la raison des simples vitesses, & la seconde celle de leurs quarrés; les quantités θ, Θ, a, D & c demeurant les mêmes. Cette seconde partie est positive, lorsque $\sin\theta$ est plus grand que $\sin\Theta$, c'est-à-dire, lorsque la partie antérieure, ou choquante, du corps est plus aiguë que la partie postérieure, ou choquée; & elle sera négative, si l'on a $\theta < \Theta$, ou si la partie antérieure du corps est moins aiguë que la partie postérieure. Ce cas a lieu le plus généralement dans les Vaisseaux, & est aussi le plus convenable dans la pratique; comme on le verra par la suite. Ainsi, on se rappellera que la partie de la résistance qui suit la raison du quarré des vitesses, est négative.

à sa partie postérieure, nous aurions généralement $\theta = \Theta$, pour le petits quadrilateres correspondants; & l'expression de leurs résistances se réduiroit par conséquent à $\frac{1}{3} mcu \sin\theta \left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)$, ou à $\frac{1}{2} mcu D^{\frac{1}{2}} a \sin\theta \left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.\right)$; expression qui, comme on voit, suit la raison des simples vitesses.

COROLLAIRE V.

(670.) Si a étoit très-petit par rapport à D, cette expression deviendroit $= \frac{1}{2} mcu D^{\frac{1}{2}} a \sin\theta$.

SCOLIE.

(671.) Pour tenir compte de la dénivellation du Fluide, on calculera les forces qui agissent sur les petits quadrilateres antérieurs, ou choquants, auxquels parvient l'élévation, ou l'intumescence, du même Fluide. On calculera de même celles que ne doivent point éprouver les quadrilateres postérieurs, ou choqués, à cause du creux, ou de la cavité, qui se forme à la partie postérieure, comme on l'a dit, *Art.* 594. Les unes & les autres doivent s'ajouter à la résistance déterminée ci-dessus: les premieres s'ajoutent, parce qu'elles agissent effectivement contre la direction du mouvement; & les secondes, parce qu'ayant été soustraites dans le calcul précédent, il faut les ajouter de nouveau: les premieres sont . . . . $mc\left(Da - \frac{1}{6} u \sin\theta \left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} u^2 a \sin\theta^2\right)$, & les secondes $mc\left(Da - \frac{1}{6} u \sin\Theta \left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} u^2 a \sin\Theta^2\right)$.

COROLLAIRE VI.

(672.) Les dénivellations n'étant pas excessives, on peut supposer que tous les petits quadrilateres qui se trouvent sur la même verticale, sont choqués par le Fluide sous le même angle θ, en supposant celui-ci tenir un milieu, entre tous les angles formés par les petites surfaces, avec la direction du mouvement. Dans ce cas, en réduisant l'expression de la force qui agit sur un des petits quadrilateres à $mcda\left(a - \frac{1}{4} u a^{\frac{1}{2}} \sin\theta + \frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2\right)$, l'intégrale . . . . . . $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6} u a^{\frac{3}{2}} \sin\theta + \frac{1}{64} u^2 a \sin\theta^2\right)$, exprimera la force qui agit sur tous ceux qui sont sur une même verticale. Faisant ensuite, dans cette expression, $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} u \sin\theta$, cette quantité se réduit à $\frac{mcu^4 \sin\theta^4}{6.64^2}$, & par

conſéquent la réſiſtance horiſontale qui réſulte de la dénivellation ſera $= \frac{mu^4 sc \sin\theta^4}{6.64^2}$.

COROLLAIRE VII.

(673.) La réſiſtance horiſontale qui provient de la dénivellation, ſera donc généralement, dans cette ſuppoſition, comme la quatrieme puiſſance de la viteſſe.

COROLLAIRE VIII.

(674.) La réſiſtance horiſontale qui agit ſur un corps quelconque, ſera donc auſſi, en général, comme trois quantités; une qui eſt comme les ſimples viteſſes, l'autre comme leurs quarrés, & la troiſieme comme leurs quatriemes puiſſances.

CHAPITRE VI.

Des Réſiſtances verticales qu'éprouvent les corps, lorſqu'ils ſe meuvent dans des Fluides; ou au contraire, lorſque ce ſont les Fluides qui ſe meuvent contre les corps qui ſont en repos.

PROPOSITION XLIV.

(675.) TROUVER *la réſiſtance verticale qu'éprouve un parallélipipede rectangle, lorſqu'il ſe trouve entiérement ſubmergé dans le Fluide, en ſuppoſant que dans ſon mouvement il conſerve toujours deux côtés paralleles à l'horiſon, & que le côté ſupérieur ſoit abaiſſé au-deſſous de la ſuperficie du Fluide, à une profondeur égale ou plus grande que* $\frac{u^2 \sin\theta^2}{64 \sin\omega^2}$.

La force qu'éprouveront les deux côtés verticaux devient zéro, parce qu'on a pour eux $\cos n = 0$, ce qui rend l'expreſſion de l'*Art.* 616 $\frac{mb\,c\cos n}{\sin n}(Da\sin\omega^2 + \frac{1}{2}a^2\sin\omega^2 \pm \frac{1}{6}\sin\omega.\sin\theta((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2) = 0$. La force qui agit ſur les deux côtés horiſontaux eſt (618.) $= mbe(D^{\frac{1}{2}}\sin\omega \pm \frac{1}{8}u\sin\theta)^2$; expreſſion dans laquelle be marque l'aire, ou la ſurface des côtés, & D la diſtance verticale du côté à la ſuperficie du Fluide. Comme les deux côtés horiſontaux du parallélipipede ſont à des profondeurs différentes, la valeur de D n'eſt pas

la même pour les deux ; supposons que D soit la profondeur à laquelle est submergé le côté supérieur, & $D+a$ celle à laquelle est submergé l'inférieur, a marquant ainsi la hauteur du parallélipipede ; nous aurons $mbe((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2$, pour la force qui agit sur le côté inférieur ; & $mbe(D^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2$ pour celle qui agit sur le supérieur. Soustrayant l'une de ces expressions de l'autre, la différence $mbe(\pm a \sin\omega^2 + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin\omega . \sin\theta)$ exprimera la résistance verticale qu'éprouve le parallélipipede ; le signe $+$ ayant lieu dans le cas où il se mouvera de haut en bas, & le signe $-$ dans celui où il se mouvera vers le haut.

COROLLAIRE I.

(676.) Si c'est le parallélipipede qui se meut, & non le fluide, on aura $\sin\omega = 1$, & la résistance se réduira à . . . . $mbe(\pm a + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin\theta)$.

COROLLAIRE II.

(677.) Si, outre cette condition, on avoit $a = 0$, ou si le parallélipipede se réduisoit à un plan horisontal, la résistance verticale qu'éprouveroit ce plan, deviendroit $= \frac{1}{2} mbeu D^{\frac{1}{2}} \sin\theta$.

COROLLAIRE. III.

(678.) La même chose arrivera, si D est très-grand à l'égard de a, de sorte qu'on puisse négliger cette quantité sans erreur sensible, comme il arrive dans les corps qui tombent dans l'air, près de la surface de la terre.

COROLLAIRE IV.

(679.) Si le mouvement est vertical, on aura $\sin\theta = 1$, & la résistance se réduira à $mbe(\pm a + \frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})$.

COROLLAIRE V.

(680.) Si le mouvement est horisontal, on aura $\sin\theta = 0$: alors la résistance verticale sera $= mbea$; quantité qui exprime le poids d'un volume de Fluide égal à celui du parallélipipede.

COROLLAIRE VI.

(681.) La même chose arrivera encore, si le parallélipipede ne

se meut point, ou si l'on a $u = 0$; car la résistance se réduit également à *mbea*.

COROLLAIRE VII.

(682.) La résistance sera $= 0$, si, le mouvement se faisant vers le haut, on a $u = \frac{4a\,\text{sin}\,\omega}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\,\text{sin}\,\theta}$; & elle sera négative, si l'on a $u < \frac{4a\,\text{sin}\,\omega}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\,\text{sin}\,\theta}$. Dans le cas où c'est le parallélipipede qui qui se meut, & non le Fluide, la résistance sera $= 0$, si l'on a $u = \frac{4a}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\,\text{sin}\,\theta}$; & elle sera négative, si $u < \frac{4a}{((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\,\text{sin}\,\theta}$.

COROLLAIRE VIII.

(683.) Si c'est le Fluide qui se meut, & non le parallélipipede, on aura $\text{sin}\,\theta = \text{cos}\,\omega$; & la résistance verticale se réduira à .... $mbe(\pm a\,\text{sin}\,\omega^2 + \frac{1}{4}u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})\,\text{sin}\,\omega.\text{cos}\,\omega)$. On remarquera cependant que cette expression n'est légitime que lorsque la vîtesse u est la même pour les deux surfaces supérieure & inférieure.

COROLLAIRE IX.

(684.) Comme ce cas exige que le parallélipipede soit entiérement submergé dans le Fluide, comme on l'a supposé dans l'énoncé de la Proposition, il est essentiel de remarquer que la formule ne peut s'étendre que jusqu'au cas dans lequel on a $D^{\frac{1}{2}}\,\text{sin}\,\omega - \frac{1}{8}u\,\text{sin}\,\theta = 0$, lorsque le mouvement se fait de haut en bas; ou jusqu'à celui où l'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}}\,\text{sin}\,\omega - \frac{1}{8}u\,\text{sin}\,\theta = 0$, lorsque le mouvement se fait vers le haut. Dans le premier cas, la résistance sera $= \ldots\ldots$ $mbe\left(a\,\text{sin}\,\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2\,\text{sin}\,\theta^2}{64\,\text{sin}\,\omega^2} + a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,\text{sin}\,\theta}{8\,\text{sin}\,\omega}\right)\text{sin}\,\omega.\text{sin}\,\theta\right)$; & dans le second, elle sera $= mbe\left(-a\,\text{sin}\,\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2\,\text{sin}\,\theta^2}{64\,\text{sin}\,\omega^2} - a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,\text{sin}\,\theta}{8\,\text{sin}\,\omega}\right)\text{sin}\,\omega.\text{sin}\,\theta\right)$; c'est-à-dire qu'en renfermant les deux cas dans une seule formule, la résistance sera $= mbe\left(\pm a\,\text{sin}\,\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2\,\text{sin}\,\theta^2}{64\,\text{sin}\,\omega^2} \pm a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,\text{sin}\,\theta}{8\,\text{sin}\,\omega}\right)\text{sin}\,\omega.\text{sin}\,\theta\right)$.

COROLLAIRE X.

(685.) Si l'on suppose que le parallélipipede se réduise à un plan, afin d'avoir la même vîtesse pour l'une & l'autre surface, ce qui donne $a = 0$, la résistance sera $= \frac{1}{4}mbeu\left(\frac{u\,\text{sin}\,\theta}{4\,\text{sin}\,\omega}\right)\text{sin}\,\omega.\text{sin}\,\theta = \frac{1}{16}mbeu^2\,\text{sin}\,\theta^2$.

PROPOSITION XLV.

(686.) *Trouver la résistance qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle qui se meut, comme il a été dit dans la Proposition précédente, lorsque sa surface supérieure est hors du Fluide.*

Dans ce cas, la résistance est égale à la force qui agit sur la surface inférieure, laquelle force $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{8} u \sin\theta)^2$, a marquant la hauteur verticale, dont le parallélipipede est enfoncé dans le Fluide.

COROLLAIRE I.

(687.) Si c'est le parallélipipede qui se meut, & non le Fluide, on aura $\sin\omega = 1$, & la résistance deviendra $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \sin\theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(688.) Si, de plus, le mouvement se fait verticalement, alors $\sin\theta = 1$, & la résistance devient $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u)^2$.

COROLLAIRE III.

(689.) Si, dans le cas présent, la vitesse u étoit celle que pourroit acquérir le Fluide en tombant de la hauteur a, alors $\sqrt{a} = \frac{1}{8} u$: donc la résistance sera $= mbe(\frac{1}{8} u \pm \frac{1}{8} u)^2 = \frac{1}{64} mbeu^2 (1 \pm 1)^2$; ou $mbe(\sqrt{a} \pm \sqrt{a})^2 = mbea(1 \pm 1)^2$; c'est-à-dire que lorsque le mouvement se fait de haut en bas, la résistance est $= 4mbea$; & dans le cas où il se fait vers le haut, elle est $= 0$.

COROLLAIRE IV.

(690.) Si le parallélipipede ne se meut pas du tout, alors $u = 0$, & la résistance devient $= mbea$.

COROLLAIRE V.

(691.) Si le mouvement est horisontal, alors $\sin\theta = 0$, & la résistance devient pareillement $= mbea$.

COROLLAIRE VI.

(692.) Si c'est le Fluide qui se meut, & non le parallélipipede, on aura $\sin\theta = \cos\omega$; par conséquent la résistance se réduira à $mbe(a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{8} u \cos\omega)^2$.

PLANC. III.

COROLLAIRE VII.

(693.) Si, de plus, on avoit $\sin \omega = 0$, ou si le Fluide se mouvoit verticalement, la résistance seroit $= \frac{1}{64} mbu^2 e$; ou $= mbea$; à cause que $\frac{1}{64} u^2 = a$.

CHAPITRE VII.

De la quantité dont les dénivellations du Fluide, causées par quelques surfaces, alterent la force, & par conséquent les résistances qu'éprouvent d'autres surfaces.

PROPOSITION XLVI.

(694.) *LA dénivellation d'un Fluide qui provient de l'action d'une surface quelconque, s'étend tout autour de cette surface, en formant une parabole égale & semblable.*

FIG. 64. Soit *PF* la dénivellation qui provient du mouvement d'une surface; *CD* étant la superficie du Fluide, & *FD* la parabole qui le termine: il faut nécessairement qu'il se forme une parabole *CF* égale & semblable à la premiere, de l'autre côté de *PF*. Car c'est de l'élévation *FP*, & de la gravité qu'elle commuuique à toutes les particules du Fluide, que se forme la parabole *FD*; & les particules en *FC* devant acquérir une gravité égale, il doit se former une autre parabole *FC* égale & semblable à la premiere. On peut faire le même raisonnement pour tout le tour de la dénivellation *PF*: donc il doit se former une semblable parabole tout autour de cette dénivellation.

COROLLAIRE I.

(695.) Cette regle est générale, pour une surface quelconque, choquante ou choquée, verticale, inclinée, ou horisontale.

COROLLAIRE II.

(696.) Si c'étoit le corps *AG* qui, par son mouvement, produisît la dénivellation; & si ce corps est tel, que *PG* soit moindre que $PC = PD$: ce corps n'empêchera point que la dénivellation *CGB* n'ait lieu, quoique la dénivellation *BGPF* ne paroisse pas, le corps en occupant la place.

COROLLAIRE III.

COROLLAIRE III.

(697.) Les dénivellations doivent par conséquent produire des forces positives, ou négatives, qui agissent sur les autres surfaces qu'elles environnent, ou auxquelles elles atteignent, & modifier les forces dont ces surfaces éprouveroient l'action sans cette circonstance. Elles altéreront également la vitesse avec laquelle le le Fluide jailliroit par un orifice ouvert dans les mêmes surfaces.

COROLLAIRE IV.

(698.) Si la surface est plane, on aura $PC = PD = u \sin\theta$ (597.), θ désignant l'angle que forme la surface avec la direction du mouvement.

PROPOSITION XLVII.

(699.) *Trouver la vîtesse avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice ouvert dans une surface, en ayant égard à l'effet que produit sur elle la dénivellation produite par une autre surface.*

La vîtesse que prend un Fluide qui sort par un orifice quelconque, a un certain rapport avec la hauteur de la dénivellation, dans la verticale du même orifice. Or $\frac{1}{64} u^2 \sin\theta^2$ étant la hauteur de la dénivellation, toutes les particules du Fluide, placées dans la même verticale, prennent la vîtesse $u \sin\theta$: donc, en général, si l'on connoît la hauteur de la dénivellation au-dessus d'un orifice, en la multipliant par 64, & extrayant la racine quarrée du produit, on aura la vîtesse que prendront les particules du Fluide, en vertu de la dénivellation (52 & 564.). Cette vîtesse étant ajoutée, ou soustraite de celle qui doit résulter de la hauteur de la superficie du Fluide au-dessus de l'orifice, on aura la vîtesse réelle avec laquelle le Fluide jaillira par cet orifice.

PROPOSITION XLVIII.

(700.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane choquante, qui est entiérement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface également choquante.*

Soit *CL* la surface choquante qui éprouve l'action de la force qu'on cherche; *CN* celle qui cause la dénivellation; *OQ* la superficie du Fluide; *OANQ* la dénivellation qui résulte du mouvement de la surface *NC*; & *OFED* celle qui résulte du mouvement de *LC*; FIG. 65.

cette derniere dénivellation étant ſuppoſée moindre que la premiere, à cauſe que l'angle formé par CN avec la direction du mouvement, eſt plus grand que celui formé par LC, avec la même direction. Soit, de plus, dans la verticale BCT, $BC = D$, $CG = x$, l'horiſontale GH ſera $= \frac{x \cos n}{\sin n}$, la verticale $HK = D + x$, & KI, la dénivellation correſpondante au point H, $= \frac{1}{64} OK^2 = \frac{1}{64}(BO - BK)^2 = \frac{1}{64}\left(u \sin \Theta - \frac{x \cos n}{\sin n}\right)^2$; Θ exprimant l'angle que forme la direction du mouvement avec CN: enſorte que la vîteſſe avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice fait en H, ſera $= 8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u \sin \Theta - \frac{x \cos n}{\sin n}$. La force horiſontale qui agit ſur une différencio-différencielle en H ſera donc $= m.dc.dx\left((D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u \sin \Theta - \frac{x \cos n}{\sin n}\right)\right)^2$: ou la quantité c étant conſtante, la force qui agit ſur une différencielle ſera $= \ldots\ldots$ $mc.dx\left((D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u \sin \Theta - \frac{x \cos n}{\sin n}\right)\right)^2$; quantité dont l'intégrale eſt eſt $= mc\left(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\sin \Theta\right) + \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{u^2 x}{64}\sin \Theta^2 - \left(\frac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)\frac{\cos n}{\sin n} - \ldots\ldots\right.$ $\left. mc\left(\frac{u x^2 \sin \Theta . \cos n}{64 \sin n} - \frac{x^3 \cos n^2}{3.64 \sin n^2}\right)\right)$*. Cette intégrale exprimera la force horiſontale qui agit ſur la ſurface HC, en ſuppoſant que la droite où

---

* Il eſt très-aiſé de trouver cette intégrale ; pour cela il ne faut que développer la quantité différencielle, en effectuant les opérations indiquées, & l'on aura ………… $mc\left(Ddx + xdx + \frac{1}{4}u \sin \Theta\, dx (D+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{u^2 \sin \Theta^2}{64} dx - \ldots\right.$ $\left.\frac{u \sin \Theta . \cos n}{32 \sin n} x dx + \frac{\cos n^2}{64 \sin n^2} x^2 dx\right)$: quantité qui s'integre comme une ſuite de monomes, excepté le quatrieme terme qui échappe à la regle fondamentale. L'intégrale eſt donc $mc\left(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(D+x)^{\frac{3}{2}} \sin \Theta\right) + mc\left(\int -\frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{u^2 x}{64}\sin \Theta^2\right) - mc\left(\frac{u x^2 \sin \Theta . \cos n}{64 \sin n} - \frac{x^3 \cos n^2}{3.64 \sin n^2}\right)$. Ainſi, la difficulté, s'il y en avoit, ne pourroit tomber que ſur l'expreſſion $\int -\frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}}$. Pour avoir cette intégrale, je fais $D + x = y$, & j'en tire $x = y - D$. Conſidérant que $x dx$ vient, à un multiplicateur conſtant près, de la différenciation de x^2, je quarre cette équation, & j'ai $x^2 = y^2 - 2Dy + D^2$, d'où je tire, en différenciant, & diviſant par 2, $x dx = y dx - D dy$. Subſtituant cette quantité dans la différencielle, j'ai $-\frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} D y^{\frac{1}{2}} dy$, dont l'intégrale eſt $= -\frac{1}{10}\frac{\cos n}{\sin n} y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}\frac{\cos n}{\sin n} D y^{\frac{3}{2}}$. Mettant donc pour y ſa valeur $D + x$, on a $\int -\frac{1}{4}\frac{\cos n}{\sin n} x dx (D+x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{10}\frac{\cos n}{\sin n}(D+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}\frac{\cos n}{\sin n} D (D+x)^{\frac{3}{2}}$, (Voyez la qua-

les deux surfaces se rencontrent, c'est-à-dire, leur intersection C, soit horisontale. Si l'on fait maintenant $x = CT = \frac{RT \sin n}{\cos n} = \frac{EF \sin n}{\cos n} = \frac{u \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)$.* ; θ exprimant l'angle que fait la direction du mouvement avec la ligne CL, EF étant l'espace dont une dénivellation s'étend sur l'autre, on aura la force horisontale qui agit sur la surface $CR = mc\left(\frac{Du \sin n (\sin \Theta - \sin \theta)}{\cos n} + \frac{u^2 \sin n^2 (\sin \Theta - \sin \theta)^2}{2 \cos n^2}\right) + \ldots$ $\frac{1}{6} mcu \sin \Theta \left(\left(D + \frac{u \sin n (\sin \Theta - \sin \theta)}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) - \ldots$ $\frac{mc \cos n}{10 \sin n}\left(D + \frac{u \sin n (\sin \Theta - \sin \theta)}{\cos n}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{mcD \cos n}{6 \sin n}\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{mc \cos n}{15 \sin n} D^{\frac{5}{2}} + \frac{mcu^3 (\sin \Theta^3 - \sin \theta^3) \sin n}{3.64 . \cos n}$.

COROLLAIRE I.

(701.) La force horisontale qui agira sur la surface CR, & qui résulte de la dénivellation produite par cette surface, est (611.) $= mc\left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} u\left((D + x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 x \sin \theta^2\right) = \ldots$ $mc\left(\frac{Du \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta) + \frac{u^2 \sin n^2 (\sin \Theta - \sin \theta)^2}{2 \cos n^2}\right) + \ldots$ $\frac{1}{6} mcu \sin \theta \left(\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{mcu^3 \sin \theta^2 \sin n}{64 \cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)$, en mettant pour x sa valeur (700, *& la Note.*). Donc, en soustrayant cette valeur de la force trouvée ci-dessus, il restera l'excès de force horisontale que lui communique la dénivellation de l'autre surface ; & cet excès est $= \frac{1}{6} mcu (\sin \Theta - \sin \theta)\left(\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) -$

---

trieme partie du *Cours de Mathématiques de* M. *Bezout*, Art. 91.). Substituant maintenant cette quantité dans l'intégrale précédente ; on aura l'intégrale complette $= \ldots$ $mc\left(Dx + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} u (D + x)^{\frac{3}{2}} \sin \Theta\right) + mc\left(\frac{u^2 x}{64} \sin \Theta^2 - \left(\left(\frac{1}{10} (D + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} D (D + x)^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\cos n}{\sin n}\right) - mc\left(\frac{u x^2 \sin \Theta . \cos n}{64 \sin n} - \frac{x^3 \cos n^2}{3.64 . \sin n^2}\right) + H$; en désignant par H la quantité constante qui complette l'intégrale. Pour trouver la valeur de cette constante, je considere que l'intégrale représentant la résistance qu'éprouve la surface NCL, elle doit s'évanouir au point C ; c'est-à-dire, lorsque $x = 0$; on aura donc $mc\left(\frac{1}{6} u D^{\frac{3}{2}}\right) + mc\left(\frac{1}{6} D \left(D^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{10} D^{\frac{5}{2}}\right) \frac{\cos n}{\sin n} + H = 0$; ce qui donne, en transposant & réduisant, $H = mc\left(-\frac{1}{6} u D^{\frac{3}{2}}\right) + mc\left(-\frac{1}{15} D^{\frac{5}{2}}\right) \frac{\cos n}{\sin n}$. Substituant donc cette valeur de H dans l'intégrale, on a l'expression même de l'Auteur.

* Car $BO = u \sin \Theta$, & $BD = OM = u \sin \theta$ (597.) : donc $BO - OM = BM = EF = u (\sin \Theta - \sin \theta)$; & par conséquent $x = CT = \frac{EF . \sin n}{\cos n} = \frac{u \sin n}{\cos n} (\sin \Theta - \sin \theta)$.

$\frac{mc\,cos\,n}{sin\,n}\left(\frac{4}{10}\left(D+\frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\,\Theta - sin\,\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}D\left(D+\frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\Theta - sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$
$+\frac{mcu^3 sin\,n}{3.64\,cos\,n}(sin\,\Theta - sin\,\theta)^2(sin\,\Theta + 2 sin\,\theta)$.

COROLLAIRE II.

(702.) La force horisontale qui agit sur toute la surface CL, en vertu de la dénivellation qu'elle produit elle seule, est (611.) $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}u\,sin\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a\,sin\,\theta^2\right)$, a exprimant toute la hauteur verticale de la même surface : donc, en ajoutant cette quantité à l'excès de force horisontale que lui communique l'autre surface, toute la force horisontale qui agit sur la surface CL, sera $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}u\,sin\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a\,sin\,\theta^2\right) + \ldots$
$\frac{2}{3}mcu\,(sin\,\Theta - sin\,\theta)\left(\left(D+\frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\,\Theta - sin\,\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) - \ldots\ldots$
$\frac{mc\,cos\,n}{sin\,n}\left(\frac{4}{10}\left(D+\frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\,\Theta - sin\,\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}D\left(D+\frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\Theta - sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$
$+\frac{mcu^3 sin\,n}{3.64\,cos\,n}(sin\,\Theta - sin\,\theta)^2(sin\,\Theta + 2\,sin\,\theta)$.

SCOLIE.

(703.) Après l'intégration, nous avons substitué $x = \frac{u\,sin\,n}{cos\,n}(sin\Theta - sin\theta)$ afin d'avoir la force horisontale qui agit sur la surface CR, comprise entre les points C & R, ce dernier point correspondant à la verticale FR qui passe par F, extrémité de l'espace auquel s'étend la plus grande élévation au-dessus de la moindre. Mais cela ne doit s'entendre que pour le cas où la verticale FR coupe la surface CL, dans un point comme R : si CL étoit moindre que CR, alors il ne faudroit substituer pour x que sa valeur légitime, laquelle seroit $k\,sin\,n$, k marquant la longueur de la surface CL.

SCOLIE II.

(704.) Si BT est moindre que BC, ou si la surface CL tombe dans la partie qui est au-dessus de l'horisontale du point C, les quantités x, a & $sin\,n$ seront négatives ; ainsi il faudra, dans ce cas, avoir attention de faire, dans les formules précédentes, les changements qu'exigent ces circonstances.

PROPOSITION XLIX.

(705.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane.*

choquée, qui est entiérement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre surface également choquée.

Cette proposition ne differe de la précédente, qu'en ce que KI, & par conséquent $\frac{1}{8}(u \sin\theta - \frac{x \cos n}{\sin n})$, est négative. Changeant donc les signes des produits correspondants, on aura la force horisontale qui agit sur la surface CR * = ...

$$mc\left(\frac{Du \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta) + \frac{u^2 \sin n^2}{2 \cos n^2}(\sin\Theta - \sin\theta)^2\right) - \ldots$$

$$\tfrac{1}{6} mcu \sin\Theta\left(\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \ldots$$

$$mc\frac{\cos n}{\sin n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3 \sin n}{3.64 \cos n}(\sin\Theta^3 - \sin\theta^3).$$

COROLLAIRE I.

(706.) Par les mêmes raisons, l'excès de force horisontale que lui communiquera la dénivellation de l'autre surface, sera = . . .

$$mc\left(-\tfrac{1}{6}u(\sin\Theta - \sin\theta)\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \ldots$$

$$\frac{mc \cos n}{\sin n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3 \sin n}{3.64 \cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)^2(\sin\Theta + 2\sin\theta).$$

COROLLAIRE II.

(707.) Par la même raison, la force horisontale qui agira sur la surface CL, sera $= mc\left(Da + \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}u \sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right) -$

$$\tfrac{1}{6} mcu(\sin\Theta - \sin\theta)\left(\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \ldots$$

$$\frac{mc \cos n}{\sin n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}D\left(D + \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3 \sin n}{3.64 \cos n}(\sin\Theta - \sin\theta)^2(\sin\Theta + 2\sin\theta).$$

PROPOSITION L.

(708.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane choquée, qui est entiérement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface plane choquante.*

La vîtesse avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice H, & qui résulte de la dénivellation que produit la surface choquante NC, est, par ce qui a été dit, *Art.* 700, $= 8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u \sin\Theta - \frac{x \cos n}{\sin n}$;

* Pour plus de facilité dans ce changement de signes, *Voyez* la premiere note de l'*Art.* 700.

mais en ſuppoſant maintenant que la ſurface CL eſt choquée, ou qu'elle fuit le Fluide avec la vîteſſe $u\,\text{ſin}\,\theta$, le Fluide aura cette vîteſſe de moins, & il en ſortira moins par l'orifice H. La vîteſſe effective du même Fluide ſera donc = ... $8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u(\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)-\frac{x\,\text{coſ}\,\eta}{\text{ſin}\,\eta}$; expreſſion qui ne differe de la premiere qu'en ce que $\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta$ y tient la place qu'occupe $\text{ſin}\,\Theta$ ſeul dans la premiere. Ce problême ſe réſoudra donc, en ſubſtituant, dans l'expreſſion donnée, *Art.* 700, $\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta$ en place de $\text{ſin}\,\Theta$ ſeul, & la force horiſontale qui agit ſur la ſurface CR, ſera =

$$mc\left(Dx+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}u(\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2x(\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)^2\right)-\frac{mc\,\text{coſ}\,\eta}{\text{ſin}\,\eta}\left(\tfrac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)-mc\left(\frac{ux^2\text{coſ}\,\eta}{64\,\text{ſin}\,\eta}(\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)-\frac{x^3\,\text{coſ}\,\eta^2}{3.64\,\text{ſin}\,\eta^2}\right).$$

Subſtituant maintenant la valeur de $x = CT = \frac{RT\,\text{ſin}\,\eta}{\text{coſ}\,\eta} = \frac{BO\,\text{ſin}\,\eta}{\text{coſ}\,\eta} = \frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}$, pour le cas où CL eſt = ou > CR, la force horiſontale qui agit ſur la ſurface CR, ſera = ...

$$mc\left(\frac{Du\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}+\frac{u^2\text{ſin}\,\eta^2.\text{ſin}\,\Theta^2}{2\,\text{coſ}\,\eta^2}+\tfrac{1}{6}u(\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)\left(\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)-\frac{mc\,\text{coſ}\,\eta}{\text{ſin}\,\eta}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)+\ldots\frac{mcu^3\,\text{ſin}\,\eta((\text{ſin}\,\Theta-\text{ſin}\,\theta)^3-\text{ſin}\,\theta^3)}{3.64.\text{coſ}\,\eta}.$$

COROLLAIRE I.

(709.) La force horiſontale qui agit ſur la ſurface CR, & qui réſulte de la dénivellation que cette ſurface produit, eſt (611.) = $mc\left(\frac{Du\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}+\frac{u^2\text{ſin}\,\eta^2.\text{ſin}\,\Theta^2}{2\,\text{coſ}\,\eta^2}-\tfrac{1}{6}u\,\text{ſin}\,\theta\left(\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)+\ldots mc\,\frac{u^3\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta.\text{ſin}\,\theta^2}{64\,\text{coſ}\,\eta}$: donc, en ſouſtrayant cette valeur de la force trouvée ci-deſſus, il reſtera la force horiſontale que lui communique la dénivellation de l'autre ſurface, laquelle ſera = $mc\left(\tfrac{1}{6}u\,\text{ſin}\,\Theta\left(\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)-\frac{mc\,\text{coſ}\,\eta}{\text{ſin}\,\eta}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta}{\text{coſ}\,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)+\ldots\ldots\frac{mcu^3\,\text{ſin}\,\eta.\text{ſin}\,\Theta^2(\text{ſin}\,\Theta-3\,\text{ſin}\,\theta)}{3.64\,\text{coſ}\,\eta}$.

COROLLAIRE II.

(710.) La force horiſontale qui agit ſur toute la ſurface CL, & qui réſulte de la dénivellation qu'elle produit elle ſeule, eſt (611.) = $mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\,\text{ſin}\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,\text{ſin}\,\theta^2\right)$, a exprimant

toute la hauteur verticale de la même ſurface : donc, en ajoutant cette quantité à celle que lui communique l'autre ſurface, la force horiſontale entiere qui agit ſur cette ſurface *CL*, ſera = ... PLANC. III.

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\,\mathit{ſin}\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2 a\,\mathit{ſin}\,\theta^2\right)+\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{2}{6}\,ncu\,\mathit{ſin}\,\Theta\left(\left(D+\frac{u\,\mathit{ſin}\,n.\mathit{ſin}\,\Theta}{\mathit{coſ}\,n}\right)^{\frac{3}{2}}-L^{\frac{3}{2}}\right)-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{mc\,\mathit{coſ}\,n}{\mathit{ſin}\,n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\mathit{ſin}\,n.\mathit{ſin}\,\Theta}{\mathit{coſ}\,n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\mathit{ſin}\,n.\mathit{ſin}\,\Theta}{\mathit{coſ}\,n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}L^{\frac{5}{2}}\right)+\ldots\ldots$$

$$\frac{mcu^3\,\mathit{ſin}\,n.\mathit{ſin}\,\Theta^2}{3.64.\,\mathit{coſ}\,n}(\mathit{ſin}\,\Theta-3\,\mathit{ſin}\,\theta).$$

SCOLIE I.

(711.) Après l'intégration, nous avons ſubſtitué, à la place de x, la quantité $\frac{u\,\mathit{ſin}\,n.\mathit{ſin}\,\Theta}{\mathit{coſ}\,n}$, pour le cas où *RC* eſt = ou < *CL* ; mais ſi *RC* étoit > *CL*, il faudroit ſubſtituer pour x ſa valeur légitime, qui ſera $k\,\mathit{ſin}\,n$; k marquant la longueur de *CL*.

SCOLIE II.

FIG. 68.

(712.) Si *BT* étoit moindre que *BC*, ou ſi la ſurface *CL* tomboit au-deſſus de l'horiſontale du point *C*, les quantités x, a & $\mathit{ſin}\,n$ ſeroient négatives ; par conſéquent les ſignes correſpondants doivent être changés dans les formules. On peut ſe repréſenter ce cas, en imaginant la ſurface choquée étendue juſqu'à ſortir du Fluide, comme ſi au lieu de la poſition *CL*, elle avoit la poſition *CV*.

SCOLIE III.

(713.) Lorſque la ſurface choquée s'étend juſqu'au dehors du Fluide, il ſe préſente deux cas très-diſtincts ; un lorſqu'elle coupe la droite *OR* plus bas que le point *O*, lequel a déjà été réſolu dans la *Propoſition* précédente & ſes *Corollaires* : l'autre cas eſt celui où cette ſurface coupe la droite *OB*, & la dénivellation *OA*. On réſoudra ce cas dans le *Corollaire* ſuivant.

SCOLIE IV.

(714) La quantité $\frac{x\,\mathit{coſ}\,n}{\mathit{ſin}\,n}$ qui entre dans l'expreſſion . . . . . . $8(D\pm x)^{\frac{1}{2}}+u\,\mathit{ſin}\,\Theta-\frac{x\,\mathit{coſ}\,n}{\mathit{ſin}\,n}$ de la vîteſſe, eſt zéro, non-ſeulement lorſque $\mathit{ſin}\,n=1$, mais encore lorſque $\mathit{coſ}\,n$ eſt négatif, ou que la ſurface choquée tombe entre *AC* & *NC*, parce qu'entre ces deux lignes la dénivellation qui eſt terminée par la ligne *AN* parallele

à la ſuperficie OQ, eſt conſtante, étant toujours $= \frac{1}{64} u^2 \sin \Theta^2$; de ſorte que le ſecond terme de la quantité $\frac{1}{64}(u \sin \Theta - \frac{x \cos n}{\sin n})^2$, laquelle donnoit auparavant la valeur de KI, s'évanouit.

COROLLAIRE III.

(715.) Quand la ſurface choquée s'étend juſqu'au dehors du Fluide, & qu'elle coupe la dénivellation OA, la vîteſſe du Fluide dans le point le plus élevé, ou dans le point même M où la ſurface ſort du Fluide, eſt $=0$; c'eſt-à-dire que $8(D \pm x)^{\frac{1}{2}} + u(\sin \Theta - \sin \theta) - \frac{x \cos n}{\sin n} = 0$, laquelle équation donne $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{u \sin n}{\cos n}(\sin \Theta - \sin \theta) \pm \frac{64 \sin n^2}{2 \cos n^2} \pm \frac{8 \sin n}{\cos n}\left(D \pm \frac{u \sin n}{\cos n}(\sin \Theta - \sin \theta) + \frac{64 \sin n^2}{4 \cos n^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

c'eſt la valeur qu'on doit ſubſtituer pour x, après avoir intégré.

COROLLAIRE IV.

(716.) Si l'on avoit $\sin n = -1$, il reſteroit $x = D - \frac{1}{64} u^2 (\sin \Theta - \sin \theta)^2$; & la même choſe aura lieu pour tous les cas où la ſurface choquée tombe entre AC & NC, ſur AC, ou ſur NC.

COROLLAIRE V.

(717.) La même ſurface tombant ſur CN, c'eſt-à-dire, les deux ſurfaces, choquante & choquée, ſe réduiſant à une ſeule ſurface, on a $\sin \Theta = \sin \theta$: donc, pour ce cas, on a $x = D$: ce qui montre que le Fluide ſe terminera à la ſurface OQ, demeurant parfaitement de niveau, & ſans laiſſer la moindre cavité derriere la ſurface choquée.

COROLLAIRE VI.

(718.) Pour l'un quelconque des cas, dans leſquels la ſurface choquée tombe entre AC & NC, $\cos n$ devant s'évanouir, la force horiſontale qui agit ſur elle, devient $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$mc\left(-Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(\sin \Theta - \sin \theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{64}u^2 x (\sin \Theta - \sin \theta)^2\right).$$

COROLLAIRE VII.

(719.) Si les deux ſurfaces, choquante & choquée, ſe réduiſent à une ſeule, on vient de voir qu'on aura $x = D$, & $\sin \Theta = \sin \theta$: donc en ſubſtituant ces valeurs, on aura la force qui agit ſur la ſurface choquée $= -\frac{1}{2} mcD^2$, le ſigne négatif exprimant que la force agit dans une direction oppoſée à celle de la force choquante.

COROLLAIRE VIII.

COROLLAIRE VIII.

PLANC. III.

(720.) Si x étoit négligeable à l'égard de D, la force horifontale qui agiroit fur la furface choquée, feroit $=$ . . . . $mc(-Dx+\frac{1}{4}u(\sin\Theta-\sin\theta)D^{\frac{1}{2}}x-\frac{1}{64}u^2x(\sin\Theta-\sin\theta)^2)$; expreffion qui devient $=-mcDx$, lorfque $\sin\Theta=\sin\theta$.

PROPOSITION LI.

(721.) *Trouver les forces horifontales qui agiffent fur une furface choquante, ou choquée, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre furface, lorfque ces deux furfaces font féparées par quelque diftance.* FIG. 67.

Suppofons que NC foit une furface choquante, qui produife la dénivellation AO. Suppofons auffi qu'en C il y ait une autre furface CG unie à la premiere, & à celle-ci une troifieme furface GH, unie avec elle en G : il eft queftion de trouver la force qui agit fur cette furface, en ayant égard à la dénivellation AO. Confidérant que cette force dépend de la hauteur de la dénivellation, & que la hauteur qui correfpond au point G eft FB, & non AE que nous avons employée ci-deffus; il eft vifible qu'il ne s'agit ici que de fubftituer BF en place de AE, & le problême fera réfolu. AE eft égal à $\frac{1}{64}\overline{OE}^2=\frac{1}{64}u^2\sin\Theta^2$, & $BF=\frac{1}{64}\overline{OF}^2=\frac{1}{64}(OE-EF)^2$: donc il n'y aura qu'à fubftituer $(OE-EF)^2$ en place de $\overline{OE}^2$, ou $OE-EF$ en place de OE; c'eft-à-dire, $u\sin\Theta-EF$ en place de $u\sin\Theta$ feul, pour que les formules précédentes correfpondent au cas préfent. La même chofe aura lieu, quoique ce foit la furface NC qui foit choquée, parce qu'on peut appliquer le même raifonnement à un cas quelconque. Si la diftance horifontale EF comprife entre les deux verticales AC, BG eft $=q$, nous n'aurons qu'à fubftituer $u\sin\Theta-q$, en place de $u\sin\Theta$ feul.

COROLLAIRE I.

(722.) La diftance horifontale q étant $=u\sin\Theta$, ou égale à toute l'amplitude de la dénivellation EO, on aura $u\sin\Theta-q=0$; & par conféquent la dénivellation ne communiquera aucune force qui agiffe fur la furface.

COROLLAIRE II.

(723.) Comme la même chofe a lieu, lorfqu'on a $EF>EO=u\sin\Theta$, ou $q>EO=u\sin\Theta$, il s'enfuit que pour le cas où

q eſt $=$ ou $>$ $EO = u$ *ſin* Θ, on doit ſubſtituer dans les formules, q à la place de u *ſin* Θ.

COROLLAIRE III.

(724.) Comme les quantités qui expriment la force que communique la dénivellation produite par l'autre ſurface, ſont toutes affectées de la quantité u (*ſin* Θ — *ſin* θ), quand il ſera queſtion de la combinaiſon de ſurfaces choquantes ou choquées entre elles, & qu'il faudra ſubſtituer u *ſin* $\Theta - q$ en place de u *ſin* Θ ſeul, toutes les quantités ſeront affectées par u (*ſin* Θ — *ſin* θ) $- q$: donc ſi l'on avoit u *ſin* $\Theta = u$ *ſin* $\theta + q$, il n'y auroit, dans ces cas, aucune force communicante.

COROLLAIRE IV.

(725.) Comme la différence entre les angles Θ & θ eſt très-petite dans les courbes, lorſque les différencielles ſont peu éloignées, & comme dans celles où la diſtance augmente, il eſt néceſſaire de ſouſtraire de la différence des ſinus de ces angles la quantité $\frac{q}{u}$: il s'enſuit que, dans les courbes, on peut négliger la force que les parties de ſurface ſe communiquent les unes aux autres, ce qui ſimplifiera les calculs, & les rendra plus faciles.

PROPOSITION LII.

(726.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte ſur un Fluide, deux de ſes côtés étant paralleles à l'horiſon, en ſuppoſant que c'eſt le parallélipipede qui ſe meut, & non le Fluide, ſuivant une direction parallele à deux de ſes autres côtés, dans le cas où l'on auroit* $a =$ *ou* $> \frac{1}{64} u^2$ ſin θ^2, *& en ayant égard à la force que la dénivellation produite par la ſurface choquante, communique à la ſurface choquée.*

Puiſque, dans ce cas, *ſin* $n = 1$, on aura (708.) la force qui agit ſur la ſurface choquée $=$ . . . .
$mc\left(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(\text{ſin}\,\Theta - \text{ſin}\,\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2x(\text{ſin}\,\Theta - \text{ſin}\,\theta)^2\right)$; expreſſion dans laquelle on doit faire x négative, & (716.) $=$ . . $D - \frac{1}{64}u^2(\text{ſin}\,\Theta - \text{ſin}\,\theta)^2$. Subſtituant maintenant u *ſin* $\Theta - q$ pour u *ſin* Θ, q marquant la longueur du parallélipipede, & obſervant que, dans le cas préſent, *ſin* $\Theta =$ *ſin* θ, la force deviendra $=$ $-mc\left(Dx - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}q\left((D+x) - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}q^2x\right)$, & la valeur de $x =$

$D - \frac{1}{64} q^2$. Subſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de la force, elle deviendra $- mc(\frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{6} q D^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} q^2 D - \frac{1}{6.64^2} q^4)$, ou en faiſant à préſent $D = a$, qui eſt toute la profondeur à laquelle l'une & l'autre extrêmité du parallélipipede eſt enfoncée au-deſſous de la ſurface du Fluide, la force qui agit ſur la ſurface choquée, ſera $= - mc(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{6} q a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} q^2 a - \frac{1}{6.64^2} q^4)$. Celle qui agit ſur la ſuperficie choquante, le Fluide étant ſuppoſé ne pas paſſer par-deſſus, eſt (600.) $= mc(\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{6} u a^{\frac{3}{2}} \sin\theta + \frac{1}{64} u^2 a \sin\theta^2 + \frac{u^4 \sin\theta^4}{6.64^2})$: donc la réſiſtance qu'éprouvera le parallélipipede, ſera $= \ldots\ldots$ $mc(\frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} (u \sin\theta + q) + \frac{1}{64} a(u^2 \sin\theta^2 - q^2) + \frac{1}{6.64^2} (u^4 \sin\theta^4 + q^4))$.

COROLLAIRE I.

(727.) Si la longueur du parallélipipede étoit égale, ou plus grande que $u \sin\theta$, on ſubſtitueroit $u \sin\theta$ au lieu de q, & la réſiſtance qu'il éprouveroit feroit $= mc(\frac{1}{3} u a^{\frac{3}{2}} \sin\theta + \frac{1}{3.64^2} u^4 \sin\theta^4)$; c'eſt la même que nous avons trouvée, *Art.* 640.

COROLLAIRE II.

(728.) Si l'on avoit $q = 0$; c'eſt-à-dire, ſi le parallélipipede ſe réduiſoit à un plan, la réſiſtance qu'il éprouveroit, ſe réduiroit à $mc(\frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin\theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2 + \frac{1}{6.64^2} u^4 \sin\theta^4)$.

COROLLAIRE III.

(729.) La réſiſtance qu'éprouvera le parallélipipede (727.) ſera plus grande que celle qu'éprouvera le plan de la quantité ... $mc(\frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin\theta - \frac{1}{64} a u^2 \sin\theta^2 + \frac{1}{6.64^2} u^4 \sin\theta^4)$.

COROLLAIRE IV.

(730.) La réſiſtance qu'éprouve le parallélipipede, ſera donc double de celle du plan, moins la quantité $\frac{1}{32} mcau^2 \sin\theta^2$; ou la réſiſtance qu'éprouve la plan eſt la moitié de celle qu'éprouve le parallélipipede, plus la quantité $\frac{1}{64} mcau^2 \sin\theta^2$.

COROLLAIRE V.

(731.) Si la viteſſe u étoit fort petite, on pourroit négliger le

terme $\frac{1}{64}mcau^2 \sin\theta^2$, comme très-petit à l'égard du premier terme $\frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u \sin\theta$, & dans ce cas, la résistance du plan se trouveroit précisément égale à la moitié de celle du parallélipipede.

COROLLAIRE VI.

(732.) Si le parallélipipede est tellement enfoncé dans le Fluide, que a soit négligeable à l'égard de D, la force qu'éprouvera la surface choquée, sera (720.) $= mcDa$; & celle qui agit sur la surface choquante étant en ce cas $= mc(Da + \frac{1}{2}au D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64}au^2)$, la résistance qu'éprouvera le parallélipipede deviendra $= \frac{1}{2}mcau(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$; ou $= \frac{1}{2}mcauD^{\frac{1}{2}}$, si u est fort petit à l'égard de D; résistance qui est la moitié de celle qu'il éprouve, en faisant abstraction de la dénivellation (654.).

COROLLAIRE VII.

(733.) La résistance qu'éprouve un parallélipipede dont la hauteur & la largeur sont égales, est (654.) $= \frac{1}{2}ma^2uD^{\frac{1}{2}}$, lorsqu'on n'a point égard à la dénivellation, & lorsqu'on peut négliger a par rapport à D. La résistance qu'éprouve une sphere est (664.) $= \frac{1}{12}a^2mcuD^{\frac{1}{2}}$. Ces deux résistances sont donc entre elles comme 1 est à $\frac{1}{6}c$: mais la résistance du même parallélipipede, en ayant égard à la dénivellation, est $= ma^2u(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$, celle qu'éprouve la sphere sera donc dans les mêmes circonstances, $= \frac{1}{24}mca^2u(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u)$.

SCOLIE I.

(734.) C'est d'après ce qui est démontré dans le *Corollaire V*, (731.), que, dans le calcul appliqué aux expériences rapportées dans le *Scolie* de la *Proposition XXXVI*, *Art.* 644, on a pris, pour la résistance que devoit éprouver la planche, la moitié de la résistance qui a lieu pour un parallélipipede.

SCOLIE II.

(735.) On peut trouver de la même maniere la résistance qu'éprouvent les autres corps terminés par des surfaces rectilignes, en ayant égard à la dénivellation qui altere les forces; mais ce que nous avons dit suffit d'autant plus pour notre objet, que nous nous réduirons à la considérations des surfaces courbes, dans lesquelles cette attention devient superflue.

CHAPITRE VIII.

Des dimensions & de la figure que doivent avoir les lignes & les surfaces, pour qu'étant mues dans un Fluide, elles éprouvent la plus grande ou la moindre résistance.

LEMME II.

(736.) *TROUVER la ligne, ou la surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré; ou celle qui, entre différentes lignes, ou surfaces, qui jouissent d'une certaine propriété dans un degré égal, jouisse aussi d'une autre propriété distincte dans le plus haut, ou le plus bas, degré.*

Ayant divisé la ligne, ou la surface, en différencielles, on peut exprimer par une quantité différencielle la propriété dont chacune d'elles doit jouir; & comme on demande la plus grande, ou plus petite, la différencielle de cette quantité doit être constante: car, dans ce cas, l'expression d'une différencielle ne peut augmenter, qu'une autre ne diminue d'autant, cette condition étant essentielle, & absolument nécessaire, pour que la propriété dont il s'agit ne puisse être ni plus grande ni plus petite. Qu'on différencie donc la quantité, ou l'expression différencielle, qui exprime la propriété, en la divisant par la quantité commune qui multipliera tous les termes, on égalera le quotient à une quantité constante. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété en question dans le plus haut, ou le plus bas, degré.

Dans le cas où il s'agit de trouver une ligne, ou une surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré, sans cesser de jouir d'une autre propriété qu'elle auroit déjà dans le même degré, les différencielles des deux quantités différencielles qui expriment les propriétés, doivent, dans ce cas, être égales entre elles, attendu que l'une ne doit point augmenter au préjudice de l'autre. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété dont il s'agit, dans le degré le plus haut, ou le plus bas, sans avoir rien perdu de celle dont elle jouissoit auparavant dans le même degré.

PROPOSITION LIII.

(737.) *Une surface plane verticale étant donnée de grandeur, & étant supposée se mouvoir horisontalement dans un Fluide immobile, trouver la figure qu'elle doit avoir pour éprouver la p' ; grande, ou la moindre, resistance.*

Soit x les abscisses mesurées verticalement depuis la superficie du Fluide, & y les ordonnées horisontales, dont la relation avec les abscisses exprime l'équation de la ligne qui termine la surface. D'après cela on voit que ydx sera une différencielle horisontale de la même surface, laquelle doit être constante, par la condition du problême. La résistance qu'éprouvera la même différencielle sera (654.) = . . $\frac{2}{3}myx^{\frac{1}{2}}dxu\, sin\, \theta$: donc, suivant le *Lemme* précédent (736.), nous devons égaler la différencielle de cette quantité à celle de ydx; mais cette derniere expression étant constante, nous pouvons substituer q à sa place, & nous aurons $\frac{2}{3}\, mqu\, sin\, \theta \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 0 = \frac{mq^2u\, sin\, \theta}{4y\sqrt{x}}$. Donc pour que la surface éprouve la plus grande, ou la plus petite, résistance, il faut que x ou y soit infinie, & par conséquent que y, ou x, soit zéro. La surface devra donc être d'une extension horisontale infinie, & d'une profondeur infiniment petite, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible.

COROLLAIRE.

(738.) Si la dimension de la surface dans le sens horisontal est déterminée, de façon qu'on ne puisse nullement l'excéder, la surface qui éprouvera la moindre résistance, sera celle d'un rectangle qui se meut, ayant deux de ses côtés paralleles à l'horison.

PROPOSITION LIV.

(739.) *Déterminer les dimensions que doit avoir la même surface verticale, ou le rectangle qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance possible; dans le cas où l'on a égard à la dénivellation.*

La résistance qu'éprouve le rectangle, en ayant égard à la dénivellation, est (640 & 658.) = $\frac{2}{3}muy\, sin\, \theta \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sin\, \theta^3}{64^{\frac{3}{2}}}\right)$; & comme on demande que cette résistance soit la moindre possible, sa différencielle sera égale à zéro; c'est-à-dire que . . . .
$\frac{2}{3}\, muyx^{\frac{1}{2}}dx\, sin\, \theta + \frac{2}{3}\, mux^{\frac{3}{2}}dy\, sin\, \theta + \frac{mu^4 dy\, sin\, \theta^4}{3.64^{\frac{3}{2}}} = 0$; mais, puisque

l'aire du rectangle doit être constante, on a $xy = q^2$, q exprimant une constante : donc $xdy + ydx = 0$, ou $dx = -\frac{xdy}{y}$. Cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donne, après avoir divisé par $mudy \sin\theta$, $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 \sin\theta^3}{3.64^2} = 0$, ou $\frac{2u^3 \sin\theta^3}{64^2} = x^{\frac{3}{2}}$; d'où l'on tire $x = \frac{u^2 \sin\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, & $y = \frac{16^2 q^2}{u^2 \sin\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}$. Telles sont les dimensions que doit avoir le rectangle pour éprouver la moindre résistance possible.

COROLLAIRE I.

(740.) Les dimensions du rectangle dépendent donc, non-seulement de la vitesse u avec laquelle il se meut, mais encore de l'angle θ sous lequel le Fluide le frappe. Plus l'une quelconque de ces deux quantités sera grande, plus doit être grande la profondeur x, ou la dimension verticale du rectangle, & plus la largeur y, ou la dimension dans le sens horisontal, doit être petite. Ce sera le contraire lorsque ces quantités diminueront.

COROLLAIRE II.

(741.) La largeur infinie y que nous avons déterminée (737.) ne convient donc au rectangle, que dans le cas où l'on négligeroit la dénivellation, ou lorsqu'on auroit $u \sin\theta = 0$.

COROLLAIRE III.

(742.) Si l'on substitue la valeur de $x = \frac{u^2 \sin\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, & celle de $y = \frac{16^2 q^2}{u^2 \sin\theta^2 (4)^{\frac{1}{3}}}$ dans l'expression $\frac{1}{3} muy \sin\theta \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 \sin\theta^3}{64^2}\right)$ de la résistance qu'éprouve le rectangle, on aura la moindre résistance que l'aire rectangulaire puisse éprouver $= \frac{mq^2 u^2 \sin\theta^2}{16(4)^{\frac{1}{3}}}$.

COROLLAIRE IV.

(743.) Ce qui a été dit dans les deux *Propositions* précédentes & leurs *Corollaires*, convient également à un parallélipipede rectangle, qui flotte ayant sa base parallele à l'horison, lorsqu'on n'a point égard à l'effet que la dénivellation produit sur sa base.

PROPOSITION LV.

(744.) *Trouver la ligne qui doit terminer un plan horisontal, pour*

PLANC. IV. *qu'étant mu horiſontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre réſiſtance poſſible.*

FIG. 68. Soit ABC le plan horiſontal composé de deux moitiés égales & ſemblables, ſéparées l'une de l'autre par la ligne, ou axe BD, dans la direction duquel ſe fait le mouvement. Soit pris auſſi les abſciſſes x ſur BD, & les ordonnées y ſur ſes perpendiculaires. Soit ſupposé de plus, que le plan ait une épaiſſeur infiniment petite da, & que cette épaiſſeur forme par-tout un angle droit avec l'horiſon, on aura la force qu'éprouvera une différencielle de AB, ou $BC = mdady\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2$, attendu que $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ exprime ici le ſinus de l'angle ſous lequel la différencielle rencontre le Fluide, & a la profondeur à laquelle le plan ſe trouve abaiſſé au-deſſous de la ſuperficie du Fluide. La différencielle de cette expreſſion eſt . . . $mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) +$ . . . . $mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$, en ſuppoſant dx conſtante. Diviſant maintenant par $mdaddy$, & faiſant $-dy = \frac{bd}{z}$, z exprimant une variable, ou une indéterminée quelconque, & b une conſtante, on aura (736.) $a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{4\sqrt{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n$, n exprimant une autre conſtante. Connoiſſant donc a & u, on déterminera z par cette équation, par conſéquent cette quantité era conſtante dans toute la ligne ABC, & dans l'équation $-dy = \frac{bdx}{z}$. On aura donc, en intégrant, $b - y = \frac{bx}{z}$, équation à la ligne droite; donc les lignes AB, BC, qui terminent le plan, ou qui couvrent la baſe AC doivent être droites.

COROLLAIRE I.

(745.) Ayant ſuppoſé $-dy = \frac{bdx}{}$, ou que les ordonnées diminuent, tandis que les abſciſſes augmentent, il s'enſuit que l'origine des abſciſſes ſe trouvera en D.

COROLLAIRE II.

(746.) Faiſant $x = 0$, on a $b - y = 0$, ou $y = b$. Donc la demi-ordonnée DC correſpondante à l'abſciſſe $x = 0$, ſera $= b$.

COROLLAIRE III.

COROLLAIRE III.

(747.) Pour déterminer le point B, dans lequel les droites AB ou CB coupent l'axe DB, nous n'avons qu'à ſuppoſer $y=0$; ce qui donnera, pour ce point, $b=\frac{bx}{z}$, & par conſéquent $x=DB=z$.

COROLLAIRE IV.

(748.) Comme la quantité $z=DB$ dépend de l'équation ... $a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^3}{4\sqrt{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n$, on voit que ſans faire varier les quantités a & u, on trouveroit autant de valeurs différentes de cette quantité, qu'on ſubſtitueroit de quantités différentes pour n : il s'enſuit donc que même, ſans faire varier ni a ni u, il y a une infinité de lignes droites différentes qui ſatisfont à la queſtion.

COROLLAIRE V.

(749.) La force qu'éprouvera l'une quelconque de ces lignes droites, comme CB, qui couvrent la demi-ordonnée CD, ſera $= mda.b\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$: d'où l'on voit que, u étant poſitif, la force ſera d'autant plus petite que $z=DB$ ſera plus grande, & au contraire : c'eſt une connoiſſance que nous avions déjà par anticipation.

COROLLAIRE VI.

(750.) Si u eſt négatif, plus z ſera grand, plus la force le ſera; & au contraire.

COROLLAIRE VII.

(751.) Si l'on prolonge l'axe BD juſqu'en K, & ſi l'on termine le plan par les quatre droites AB, BC, CK, KA, la force qui agira ſur ABC ſera $= 2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; & celle qui agira ſur CKA ſera $= 2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, DB étant $=z$, & $DK = Z$: donc la réſiſtance ſera $= 2bmda\left(\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right)$; & par conſéquent plus les axes DB & DK ſeront grands, plus la réſiſtance ſera petite.

SCOLIE.

(752.) De la ſolution de ce Problême & de ſes Corollaires, nous déduiſons ſeulement que les lignes AB, CB doivent être droites,

pour qu'elles éprouvent la plus grande, ou la plus petite résistance, & que cette résistance devient toujours de plus en plus petite, à mesure que le point B s'éloigne. Ce point peut cependant être donné, ou déterminé, ou, ce qui revient au même, la longueur du plan peut être déterminée, comme si elle devoit se réduire à DE. Il paroît évident que, dans ce cas, le plan doit se terminer par les droites AE, CE; & c'est ce qui arrive aussi dans quelques cas : mais dans d'autres il y a moins de résistance, lorsque la terminaison est faite par trois lignes droites AG, GF, & FC, la seconde étant parallele à la base AC, ou perpendiculaire à l'axe, & AG étant $= CF$, de même que $GE = EF$; c'est ce qu'on va démontrer dans le Problême suivant.

Proposition LVI.

(753.) *Etant donnés la demi-base* DC, *& l'axe, ou longueur* DE *du plan horisontal, avec la parallele* EF *à la base; trouver le point* F, *par lequel tirant la ligne* CF, *on termine le plan* DEFC, *de maniere que ce plan, étant mu horisontalement, suivant la direction de l'axe* DE, *éprouve la plus grande, ou la moindre résistance.*

Ayant tiré FH parallele à l'axe, & faisant $DE = x$, & $EF = DH = y$; la force qui agit sur EF sera $= mda.y(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u)^2$; & celle qui agit sur FC sera $= mda(b-y)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u(b-y)}{8(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; & les deux expressions reunies $= mda\left(ab \pm \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}uy + \frac{1}{64}u^2y \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^2}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2(b-y)^3}{64(x^2+(b-y)^2)}\right)$. Cette quantité devant être ou un *maximum*, ou un *minimum*, sa différencielle sera $= 0$; on aura donc . . . .
$mda\left(\pm \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}udy + \frac{1}{64}u^2dy \mp \frac{2a^{\frac{1}{2}}u(b-y)dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \pm$ . . . .
$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^3dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3u^2(b-y)^2dy}{64(x^2+(b-y)^2)} + \frac{2u^2(b-y)^4dy}{64(x^2+(b-y)^2)^2}\right) = 0$ *; d'où l'on tire, en divisant par $\frac{1}{4}udymda$, & en substituant t pour $b-y$,

* On remarquera dans ce calcul, 1°. que $\sin\theta = \frac{(b-y)}{(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$; car $\sin\theta = \sin HFC$, & dans le triangle rectangle HFC, on a $FC : 1 :: HC : \sin HFC = \frac{HC}{FC}$: or $HC = CD - EF = b-y$, & $CF = (HF^2 + HC^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}$; donc $\sin HFC$, ou $\sin\theta = \frac{b-y}{(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$. 2°. Que dans la différenciation on suppose x constante, comme cela doit être, *Art.* 752.

$\pm a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}u \mp \frac{2a^{\frac{1}{2}}x^2t + a^{\frac{1}{2}}t^3}{(x^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3ux^2t^2+ut^4}{16(x^2+t^2)^2} = 0$, ou . . . .

$\pm 16a^{\frac{1}{2}}(x^2+t^2)^2 \mp 16a^{\frac{1}{2}}(2x^2t+t^3)\sqrt{(x^2+t^2)} + ux^2(x^2-t^2) = 0$; expression qui donnera, en reduiſant & ordonnant, ...

$$\left.\begin{array}{l} 16^2a\,t^6 + 2.16^2ax^2t^4 \ldots * \ldots - 16^2a\,x^6 \\ \pm 32a^{\frac{1}{2}}ut^6 \pm 32a^{\frac{1}{2}}ux^2t^4 \mp 32a^{\frac{1}{2}}ux^4t^2 \mp 32a^{\frac{1}{2}}u\,x^6 \\ -\,u^2x^2t^4 + 2u^2x^4t^2 - u^2x^6 \end{array}\right\} = 0$$

; équation du troiſieme degré, qni contient une racine, ou valeur de t^2, réelle & poſitive ; c'eſt cette valeur qui ſatisfait à la queſtion *.

COROLLAIRE I.

(754.) Si l'on fait, dans cette équation, $t = 0$, il en réſulte $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$, quantité négative ; & ſi l'on fait $t = x$, il en réſulte 2.16^2ax^6, quantité poſitive : donc t eſt moindre que x, toutes les fois que a a quelque valeur, ou que le plan eſt ſubmergé à quelque profondeur dans le Fluide. Si l'on avoit $a = 0$, ou ſi le plan coïncidoit avec la ſuperficie du Fluide, on auroit $t = x$: de ſorte que la plus grande valeur de l'angle *HFC* ſera alors de 45°, & cet angle diminue à meſure que le plan doit être ſubmergé à une plus grande profondeur.

COROLLAIRE II.

(755.) Ayant $a = \infty$, l'équation ſe change en celle-ci . . . . $t^6 + 2x^2t^4 - x^6 = 0$, ou $t^6 + 2x^2t^4 = x^6$, qui, en ajoutant de part & d'autre x^4t^2, & diviſant par $t^2 + x^2$, devient $t^4 + x^2t^2 = x^4$. Cette équation étant réſolue, donne $t = x\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$; expreſſion de la moindre valeur de t ; & dans ce cas, l'angle *HFC* eſt, à fort peu près, de 37° 57′ **.

COROLLAIRE III.

(756.) La valeur de t varie également, en faiſant varier la viteſſe u. Le cas dans lequel $u = \infty$, correſpond à celui où $a = 0$, & l'on a, dans ces deux cas, $t = x$. Lorſque $u = 0$, ce qui correſpond au cas où $a = \infty$, l'on a, comme ci-deſſus, $t = x\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

---

* Ceci eſt évident, puiſque le dernier terme $(16^2a \pm 32a^{\frac{1}{2}}u + u^2) - x^6$, ou $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$ eſt négatif. (Voyez la *Troiſieme Partie* du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 201.)

** On trouve dans l'original 31° 44′, mais il eſt évident que c'eſt une faute de calcul ; car $\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1,118$, & $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}} = 0,78$. Donc $t = x\ (0,78)$; c'eſt-à-dire que ſi $x = 100$, t ſera $= 78$. Faiſant la proportion $HF : HC :: 1 : tang\ HFC$, ou $x : t :: 1 : tang\ \theta$, on trouve $\theta = 37° 57'$. On voit par-là que t eſt à peu près $= \frac{4}{5}x$.

COROLLAIRE IV.

(757.) Comme t eſt plus petit que x, la quantité . . . . $\pm 32a^{\frac{1}{2}}u(t^6+x^2t^4-x^4t^2-x^6)$ ſera négative pour la partie choquante $AGFC$ du plan, & elle ſera poſitive pour la partie choquée $AOLC$; donc la valeur de t correſpondante à la premiere, & $=CH$, ſera plus grande que la valeur de t correſpondante à la ſeconde, & qui eſt $=CM$; de ſorte que, ſuppoſant $DE=DN$, on doit avoir $GF<OL$, pour que le plan éprouve la moindre réſiſtance.

COROLLAIRE V.

(758.) Le point F tombera ſur l'axe DB toutes les fois que la valeur de t, déduite de l'équation, ſera égale à la demi-baſe CD; & dans ce cas, le demi-plan ſe réduira à un triangle. Mais ſi la valeur de t étoit plus grande que la demi-baſe, le point F tomberoit de l'autre côté de l'axe ſur EG, & la ligne CF couperoit l'axe entre D & E. Dans ce cas, ſi l'on termine le plan par une droite tirée depuis C juſqu'à E, on aura la Figure ſuſceptible de la moindre réſiſtance.

COROLLAIRE VI.

(759.) Les lignes EF & NL ſeront donc nulles dans tous ces cas, & le demi-plan ſe réduira à un triangle, comme AEC, ou AKC. Tous les cas de cette eſpece ſe préſentent, quelles que ſoient les valeurs de a & de u, lorſque DC eſt égale, ou moindre que $ED\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{5}}$, ou lorſque DC eſt à peu près égale, ou moindre que $\frac{4}{5}ED$ (755. *Note*.).

COROLLAIRE VII.

(760.) Puiſque les deux lignes CF, FE ſont celles qui éprouvent la moindre réſiſtance, elles en éprouveront donc une moindre que deux autres lignes CQ, QE; & celles ci une moindre que deux autres, l'une deſquelles ſeroit plus éloignée de CF. C'eſt une conſéquence néceſſaire de ce que toutes les racines de l'équation d'où l'on tire la valeur de t ſont imaginaires, excepté celle qui donne la poſition de CF.

COROLLAIRE VIII.

(761.) Si entre les deux paralleles DC, EF, on prend un point

quelconque comme *I*, & que de ce point on tire aux points *C* & *E* deux lignes droites *CI* & *IE*, ces droites éprouveront une plus grande résistance que celle qu'éprouvent les droites *CF*, *FE*. Car la ligne *CI* étant prolongée jusqu'en *Q*, il est clair, par le *Corollaire* précédent, que la résistance qu'éprouveront les lignes *IQ* & *QE*, sera moindre que celle qu'éprouvera *IE*, & par conséquent *CQ* & *QE* éprouveront moins de résistance que *CI* & *IE* : donc à plus forte raison *CF* & *FE*, qui éprouvent moins de résistance que *CQ* & *QE*, en éprouveront beaucoup moins que *CI* & *IE*.

COROLLAIRE IX.

(762.) De-là on conclut encore qu'avec quelques lignes qu'on termine le plan, qu'elles soient droites, courbes ou mixtes, pourvu que ces lignes soient comprises entre les deux paralleles *EF*, *DC* qui terminent le plan, elles éprouveront toujours une résistance plus grande que les deux lignes *CF* & *FE*.

COROLLAIRE X.

(763.) Plus la longueur du plan, ou de l'axe *DE*, sera grande, plus la résistance qu'il éprouvera sera petite; car *FR* & *RS* éprouvent une moindre résistance que *FE* : donc *CR* & *RS* en éprouvent aussi une moindre que *CF* & *FE*.

COROLLAIRE XI.

(764.) Un corps composé de deux prismes triangulaires *ABC*, *AKC*, dans lequel *BD* & *DK* sont plus grandes que $\frac{1}{4}$ *DC*, étant mu suivant la direction de l'axe horisontal *KB*, de façon que les côtés *AB* = *BC*, & *CK* = *KA*, soient verticaux, éprouvera une moindre résistance que s'il étoit terminé par quelque surface courbe que ce soit : car on vient de voir, par la *Proposition* précédente, qu'une section quelconque horisontale, terminée par les droites *AB*, *BC*, *CK* & *KA*, éprouvera moins de résistance que si elle étoit terminée par d'autres lignes, quelles qu'elles fussent.

COROLLAIRE XII.

(765.) On doit entendre la même chose d'un autre prisme quelconque, quoique ses côtés *AB*, *BC*, *CK* & *KA* ne soient pas verticaux, pourvu que les sections, ou différencielles horisontales, forment un angle constant avec l'horison : car, en ce cas, la force

qu'éprouvera une différencielle quelconque, sera exprimée par $mbda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{ub \sin n}{8(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; b exprimant la moitié de la largeur du prisme; & l'angle n que forme la différencielle horisontale du corps avec l'horison étant constant : il est par conséquent évident que les résultats qu'a donné la solution du Problême, ne peuvent changer, que ce Problême contient également le cas dont il s'agit ici, & qu'il n'est question que de substituer $u \sin n$ à la place de u (584 & 586.).

Proposition LVII.

(766.) *Connoissant la longueur* BK *du plan horisontal, ainsi que sa largeur* AC, *on demande* BD, *ou le point* D, *où l'on doit placer cette largeur, pour qu'en formant les deux triangles isocelles,* ABC, CKA *qui terminent le plan, ce plan éprouve la plus grande, ou la moindre résistance possible, étant mu horisontalement dans la direction de l'axe* BK.

Faisant $BK = e$, $DC = b$, & $BD = x$, la force qui agit sur BC sera (753.) $= mda\left(ab + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)}\right)$; & celle qui agit sur CK sera $= mda\left(ab - \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$. La résistance qui résulte de ces deux forces sera donc = ...
$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$; or cette résistance devant être la plus grande, ou la plus petite, sa différencielle sera = o. Donc $mda\left(-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2xdx}{4(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^3xdx}{64(x^2+b^2)^2}\right) +$
$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2(e-x)dx}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^3(e-x)dx}{64((e-x)^2+b^2)^2}\right) = o$. Divisant cette expression par $\frac{1}{4}mda.ub^2dx$, & transposant, on aura . . . .
$\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$. En résolvant cette équation, on en déduira la valeur de $x = BD$, & cela pour toutes les différentes valeurs qu'on peut donner aux quantités a & u.

Corollaire I.

(767.) L'équation ne résout pas le cas dans lequel $a = o$, ou $\frac{a}{u} = o$, parce qu'il en résulteroit $-\frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2} = \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$; ce qui est impossible.

COROLLAIRE II.

(768.) Au contraire, si l'on avoit $\frac{u}{a} = 0$, l'équation deviendroit $\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$: ce qui donne $x = \frac{1}{2}e$; c'est la valeur de x qui produit la moindre résistance.

COROLLAIRE III.

(769.) A mesure que le rapport $\frac{u}{a}$ augmente, la valeur de x, pour produire la moindre résistance, augmente aussi, mais cependant sans jamais parvenir à être $= e$; puisque, dans ce cas, l'équation deviendroit $0 = \frac{a^{\frac{1}{2}}e}{(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ube}{8(e^2+b^2)^2}$; ce qui est impossible.

COROLLAIRE IV.

(770.) Au contraire, la valeur de x qui produit la plus grande résistance, est moindre que $\frac{1}{2}e$; & l'on a $x = 0$, lorsque $a^{\frac{1}{2}} = \frac{ub}{8(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

PROPOSITION LVIII.

(771.) *Soit un corps* ABFA *terminé par deux bases horisontales triangulaires & semblables* ABC, DEF, *rectangles en* A *&* D, *& par les trois autres plans* ABED, CBEF, *&* ACFD, *l'un desquels* ABED *est vertical. Soit supposé que ce corps se meuve horisontalement dans un Fluide, & dans la direction de ce même plan vertical* ABED; *on propose de trouver la relation entre la profondeur* AD, *& la largeur* DF *de la base, pour que, le volume du corps étant constant, ce corps éprouve la moindre résistance possible.* FIG.

Supposons que *GHI* soit une section, ou différencielle horisontale du corps, laquelle par conséquent sera un triangle semblabl aux bases : soit prolongé *GH*, & tiré la verticale *CK*, qui se parallele à *AG*, & faisons $AB = e$, $AC = b$, $AG = CK = a$, $HK = z$. D'après cela on aura $GH = b - z$; le sinus de *GIF* $ABC = \frac{b}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$; & la force qui agira sur la différencielle hor-ale (584 & 586.) $= mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubS}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; S exprant le sinus de l'angle qui forme le plan *CBEF* avec le plan horontal *GHI*. Mais on a $S = \frac{a(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$ * : donc la force qi agit

* Voici le procédé qu'il faut suivre pour trouver cette valeur de S. Soit mené par ligne

ſur la différencielle $= mda\,(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{uba(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 =$ $mada\,(b-z)\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

Pareillement, les deux triangles ABC, GIH étant ſemblables, on aura $b : e :: b-z : GI = \frac{e(b-z)}{b}$: donc l'aire du triangle $GIH = \frac{e(b-z)^2}{2b}$; & l'eſpace qu'occupe la différencielle horiſontale $= \frac{eda(b-z)^2}{2b}$. Cet eſpace devant être conſtant par la condition du problême, on aura $\frac{eda(b-z)^2}{2b} = q^3$, & par conſéquent $da = \frac{2bq^3}{e(b-z)^2}$, q exprimant une conſtante. Subſtituant maintenant cette valeur de da dans l'expreſſion de la force, elle ſe changera en $\frac{2mbaq^3}{e(b-z)}\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Pour parvenir à la réſolution du problême, nous n'avons qu'à égaler la différencielle de cette force à celle de l'eſpace q^3; mais cette derniere étant $=0$, la premiere le ſera auſſi, & nous aurons par conſéquent $-\frac{dz}{(b-z)^2} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}dz}{8(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)e^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}e^2zdz}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $-\frac{u^2b^2adz}{64(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)} - \frac{2u^2b^2ae^2z\,dz}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2} = 0$ * ; or cette équa-

---

CK le plan vertical CRK, perpendiculaire au plan $CBEF$, lequel coupera ce dernier dans la ligne CR, & le plan horiſontal GH dans la ligne KR. Dans le triangle rectangle BAC, on a $BC = (b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}$, & par conſéquent $\sin ACB = \sin GHI = \sin RHK = \frac{e}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$. Dans le triangle HRK rectangle en R, on a $RK = HK \sin RHK = \frac{ez}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$; & dans le triangle CRK rectangle en K, on a $CR = (CK^2 + KR^2)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 + \frac{e^2z^2}{b^2+e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$. Ceci poſé, on touvera le $\sin CRK$, ou S, par cette proportion, $CR : 1 :: CK : \sin CRK$, ce qui donne $\sin CRK$, ou $S = \frac{CK}{CR} = \frac{a(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$.

* Ce paſſage préſente une difficulté qui pouroit embarraſſer quelques lecteurs, la voici. La différencielle de $\frac{2mbaq^3}{e(b-z)}\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, ou en diviſant par la quantité conſtante $\frac{2mbaq^3}{e}$, la différencielle de $\frac{1}{b-z}\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, doit être égalée à zéro. Or, d'après les regles générales du calcul, cette différencielle, égalée à zéro, eſt inconteſtablement $\frac{dz}{(b-z)^2} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}dz}{8(b+z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^2adz}{64(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)} -$ $\frac{uba^{\frac{1}{2}}e^2zdz}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u^2b^2ae^2zdz}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2} = 0$ Diviſant enſuite, comme le

tion

tion se divise exactement par $-\frac{dz}{b-z}$: ainsi elle devient . . . PLANC. IV.

$$\frac{1}{(b-z)} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}}{8(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}c^2z}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{u^2b^2a}{64(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)} + \frac{2u^2b^2ac^2z}{64(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^2}.$$

Comme en prenant z positivement, ou de K vers H, elle ne peut jamais parvenir à être plus grande que b, tous les termes de cette équation sont positifs, & par conséquent on n'en peut tirer aucune valeur pour z. Ainsi il nous reste seulement à faire usage de celle qui résulte de la quantité $-\frac{dz}{b-z}$, par laquelle on a divisé la premiere équation. Cette quantité égalée à zéro, en supposant z négative, donne $z = -\infty$; c'est-à-dire que la base GH de la différencielle horisontale doit être infinie, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible; & par conséquent tout le corps entier doit se réduire à un plan horisontal de la même étendue, pour qu'il éprouve la moindre résistance possible.

COROLLAIRE I.

(772.) Un double prisme *AFCHA*, dont les deux bases hori- FIG. 70.

---

veut l'Auteur, par $\frac{-dz}{b-z}$, on aura $-\frac{1}{b-z} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}}{8(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^2a}{64(b-z)(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}c^2z}{8(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2u^2b^2ac^2z}{64(a^2(b^2+c^2)+c^2z^2)^2} = 0$. Cette équation est fort différente de celle de l'Auteur, & tous ses termes ne sont point positifs, soit qu'on prenne z positivement, soit même qu'on le prenne négativement. Si l'équation donnée par l'Auteur ne pouvoit avoir lieu, il est clair que les conséquences qu'il en tire, tant dans la *Proposition* que dans ses *Corollaires*, tomberoient d'elles-mêmes : mais nous croyons que c'est avec raison que l'Auteur a modifié les regles générales du calcul différenciel, parce que la nature de la question l'exige. La différencielle qu'il donne, differe de celle qu'on trouve directement par le calcul, en ce qu'il a pris pour la différencielle du facteur $\frac{1}{b-z}$, la quantité $\frac{-dz}{(b-z)^2}$; au lieu que le calcul donne $\frac{dz}{(b-z)^2}$, & c'est cette différence qui en produit dans les signes des trois premiers termes de la différencielle. Or cette modification est indiquée par la nature de la question. En effet, AG étant $= a$, hauteur de la surface supérieure au-dessus de la section, ou différencielle, GHI, à mesure que a diminuera, HK ou z diminuera : par conséquent dz est l'expression du décrément de la quantité z, lequel est égal à l'incrément de $GH = b - z$, qui est celui qu'on doit considérer. Comme la partie variable de cette quantité est négative, ou est exprimée par $-z$, son décrément devra être pris positivement, ainsi pour $d(-z)$ il faudra écrire dz. Au reste, on fera attention que la Figure suppose la base inférieure du corps plus petite que la supérieure : si on l'avoit supposée plus grande, ce qui eût été conforme à la conséquence de la *Proposition*, alors le point H ayant tombé de l'autre côté de K, par rapport à G, on auroit eu $GH = b + z$, & la difficulté qui résulte des signes n'auroit plus eu lieu.

sontales sont égales, & dont les arrêtes *AE*, *BF*, *CG* & *DH* sont verticales, éprouvera donc moins de résistance qu'aucun autre prisme qui lui seroit égal, & dont la base inférieure *EFGH* seroit moindre que la supérieure *ABCD*.

COROLLAIRE II.

(773.) Ce qu'on vient de dire des prismes doit s'entendre de même de tout autre corps, dont les bases, ou sections horisontales, ne seroient pas des triangles, mais des plans terminés par une courbe quelconque comme *ABC*. Car la différencielle horisontale étant divisée en différents petits quadrilateres sensiblement plans, on démontrera la même chose pour chacun en particulier, & par conséquent pour le tout, ou pour toute la différencielle horisontale, ainsi que pour tout le corps.

PROPOSITION LIX.

(774.) *Trouver la ligne qui doit terminer un plan horisontal, pour qu'étant mu horisontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre, force possible, & qu'en même temps il renferme l'aire la plus grande, ou la plus petite.*

On a déjà résolu ce problême, *Art.* 744, quant à la pemiere partie, ou condition ; & nous avons trouvé que la différencielle de la force qui agit sur une différencielle de la ligne cherchée, est = . . . $mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udv}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udv^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) +$ . . . . $mdaddy\left(\frac{3u^2dv^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dv^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$. Cette différencielle doit maintenant être égalée à celle qui résulte de la différenciation de *mdaxdy*, qui est la différencielle de l'aire : or cette différencielle est *mdaxddy* * : donc, après avoir divisé par *mdaddy*, nous aurons . . . .

$$a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} = x.$$

Faisant maintenant $-dy = \frac{zdx}{b}$, z exprimant une quantité variable, & b une constante, on aura ** $x = a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2) + \frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(3b^2+z^2)$. Prenant la différencielle de cette équation, on aura

* On regarde encore x comme constante, par les mêmes raisons que ci-dessus.

** Le calcul de l'Auteur paroît ici en défaut. On est parvenu à l'équation . . . : $x = \pm a \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dv^4}{64(dx^2+dy^2)^2}$. On suppose

$dx = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2 dz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2 - z^2) + \frac{2u^2b^2 z dz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2 - z^2)$; & cette valeur étant substituée dans l'équation précédente $-dy = \frac{zdz}{b}$, on aura $-dy = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ubzdz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2 - z^2) + \frac{2u^2b^2zdz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2 - z^2)$; & en intégrant $b - y = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^2b}{32}\int \frac{z^2dz}{(b^2+z^2)^3}(3b^2 - z^2)$. En supposant qu'on connoisse la valeur de z, on aura par conséquent les valeurs de x & de y, & on pourra décrire la ligne.

COROLLAIRE I.

(775.) Si, au lieu de la plus grande, ou de la plus petite, force, on demandoit la ligne qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance : comme elle est composée de deux parties, l'une choquante, & l'autre choquée, la différencielle de la résistance qui résulte de la somme des forces qui agissent sur les deux différencielles opposées de la ligne cherchée, sera . . . .

$$mdaddy\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dX^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dX^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) +$$
$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{3u^2dy^2}{64(dX^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} - \frac{2u^2dy^4}{64(dX^2+dy^2)^2}\right).$$

La différencielle de l'aire est $= mdady\,(x + X)$, & la différencielle de cette différencielle est $= mdaddy\,(x + X)$, x exprimant les abscisses de la partie choquante, & X celles de la partie choquée. Or c'est à cette derniere différencielle qu'il faut égaler celle de la résistance : formant donc cette équation, divisant par $mdaddy$, & faisant $-dy = \frac{zdx}{b} = \frac{ZdX}{b}$, on aura . . . .

$$x + X = -\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+z^2) - \frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+Z^2) + \ldots$$
$$\frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(2b^2+z^2) - \frac{u^2Z^2}{64(b^2+Z^2)^2}(2b^2+Z^2)\ *.$$

$-dy = \frac{zdx}{b}$, ou $dy = \frac{-zdx}{b}$, & l'on substitue, dans l'équation ci-dessus, cette valeur supposée de dy. Or il est évident que la substitution faite, on aura . . . .

$x = a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+z^2) + \frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(3b^2+z^2)$, & non $x = a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+z^2) + \&c.$ comme on le trouve dans le texte Espagnol. Cette erreur, si elle est réelle, feroit de la plus grande conséquence, si l'on faisoit usage de cette expression générale. Comme la différence n'est que dans les signes, nous avons rétabli ce passage.

* On retrouve ici la même erreur que dans l'*Article* précédent. Ceci nous fait penser que l'Auteur

Corollaire II.

PLANC. IV. (776.) Si l'on suppose, en outre, qu'on prenne constamment les abscisses x de la partie choquante égales aux abscisses X de la partie choquée, de façon qu'on ait constamment $x = X$, on aura aussi $z = Z$, & l'équation deviendra $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)$ * : & $b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, ou enfin $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Corollaire III.

(777.) Multipliant en croix les deux équations précédentes, on aura $\frac{(b-y)a^{\frac{1}{2}}uz(2b^2+z^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2x}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; & en divisant par $\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, il vient $(b-y)(2b^2+z^2) = bzx$; ou $b - y = \frac{bzx}{2b^2+z^2}$; c'est l'équation de la courbe.

Corollaire IV.

FIG. 72. (778.) Si l'on suppose $b - y = 0$, on aura $x = 0$, & $y = b$: prenant donc C pour l'origine, & menant, perpendiculairement à l'axe CA des abscisses, la droite $CB = b$, le point B sera l'origine de la courbe pour les deux parties choquantes & choquées.

---

n'a pas fait à part les calculs de ce *Corollaire*, & qu'il s'est contenté d'employer le résultat de la *Proposition*, en y faisant les changements de signe convenables. Si nos réflexions sont justes, on ne peut avoir $x + X = \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2) + \frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+Z^2) +$ &c. comme on le trouve dans le texte. Mais $x + X = -\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2) - \frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+Z^2) +$ &c.

* Par une suite de la même faute, l'expression du *Corollaire* précédent ne donne point $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)$; mais $x = -\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)$. On doit cependant employer la valeur donnée par l'Auteur, & par conséquent l'erreur dont il est question dans la note des deux *Articles* précédents ne peut altérer les conséquences que l'Auteur tire dans les *Corollaires* suivants; puisqu'elles dérivent toutes de l'équation particuliere de l'*Article* présent. En effet, l'Auteur supposant ici qu'on a constamment $x = X$, & faisant en conséquence $x + X = 2x$, il s'ensuit que, dans cette hypothese, x représente tout à la fois les abscisses de la partie choquante, & celles de la partie choquée, selon qu'on la prendra positivement ou négativement. Le calcul donne directement les abscisses négatives, & si on les prend positivement, comme cela doit être, puisqu'il s'agit de la partie choquante, on trouve pour x & pour y les mêmes valeurs que l'Auteur.

COROLLAIRE V.

(779.) Si nous prenons la différencielle de $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u z (2b^2 + z^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, nous trouverons $dx = \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u dz \left(\frac{2b^2+3z^2}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{6b^2z^2+3z^4}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$; différencielle qui, étant égalée à zéro, donne, en réduisant, $2b^2 - z^2 = 0$, ou $z = b\sqrt{2}$. Cette valeur étant substituée dans celle de x, donne . . . . $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u b \sqrt{2}(2b^2+2b^2)}{4(b^2+2b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}$. Cette quantité est la valeur de la plus grande x, & par conséquent CA étant égal à $\frac{1}{9} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}$, A sera le point jusqu'où doit s'étendre la courbe.

COROLLAIRE VI.

(780.) Si l'on prend de même la différencielle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u b z^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, on aura $dy = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u b dz \left(\frac{2z}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z^3}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$; cette différencielle étant égalée à zéro, donne $z = 0$, & $2b - z^2 = 0$, ou $z = b\sqrt{2}$, comme dans le *Corollaire* précédent. La premiere valeur, $z = 0$, étant substituée dans celle de y, donne $y = b$; b est donc la valeur d'une des plus grandes ordonnées, & celle qui correspond à l'origine C; car ayant $z = 0$, on a (777.) $x = 0$. La seconde valeur, $z = b\sqrt{2}$, étant substituée dans celle de y, donne la moindre $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$; & elle correspond au point A de la plus grande x.

COROLLAIRE VII.

(781.) Si l'on a donc $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}} = 0$, le point A tombera sur l'axe CA; si l'on a $b > \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe ne s'étendra pas jusqu'à l'axe, & elle ne renfermera pas d'espace; enfin si l'on a $b < \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe coupera l'axe.

COROLLAIRE VIII.

(782.) Dans le cas où $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{b} = \infty$, on aura $z = \infty$, cette valeur étant substituée dans celle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u b z^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, donne $y = b - 0$, ou $y = b$: c'est la valeur de l'autre plus grande ordonnée, & celle qui correspond au point F des abscisses.

COROLLAIRE IX.

(783.) Par les *Corollaires V & VI*, *Art.* 779 & 780, nous avons $-\frac{dy}{dx}=\frac{bz(2(b^2+z^2)-3z^2)}{(2b^2+3z^2)(b^2+z^2)-6b^2z^2-3z^4}=\frac{z}{b}$. Dans le point B, où $z=0$, on a $-\frac{dy}{dx}=0$; ce qui indique que la courbe, en ce point, eſt parallele à l'axe. De même dans le point D, où $z=\infty$, on a $-\frac{dy}{dx}=\infty$; c'eſt-à-dire que la courbe, en ce point, eſt perpendiculaire à l'axe. Enfin dans le point A, où $z=b\sqrt{2}$, on a $\frac{-dy}{dx}=\frac{b\sqrt{2}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{1}$: donc ſi AG eſt ſuppoſée une tangente à la courbe en A, on aura $\frac{AE}{EG}=\frac{\sqrt{2}}{1}$.

COROLLAIRE X.

(784.) En ſuppoſant $2b^2z+z^3=(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, on aura $x=\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}u=CF$. Il réſulte de cette équation deux valeurs de z, l'une $z=\infty$ *, qui nous a déja donné $y=FD$; & l'autre $z=b\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}$, qui donne $y=FH=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u(-1+\sqrt{5})}{3(2+2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE XI.

(785.) On voit, par ce qu'on vient de dire, que la courbe a deux branches : la premiere BHA, eſt celle qui éprouve la moindre réſiſtance; & la ſeconde AD, eſt celle qui éprouve la plus grande.

COROLLAIRE XII.

(786.) L'amplitude ED de cette derniere branche eſt $=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=\frac{1}{36}a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)$; donc la relation entre ſon amplitude ED & ſa longitude $EA=b$, ſera $\frac{a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)}{36b}$. Pareillement, la relation entre l'amplitude $CB=b$ de l'autre branche, & ſa longitude $AC=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}=\frac{9b}{a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}}$. Mais dans le point A, où l'axe eſt coupé par la courbe, on a (781.) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: donc la relation entre l'amplitude & la longitude de la ſeconde branche, ou la premiere relation ci-deſſus, ſera $=\frac{6\sqrt{3}(4\sqrt{6}-9)}{36}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$: & la même rela-

* Car $dx=0$, & par conſéquent $\frac{z}{b}=-\frac{dy}{dx}=\frac{-dy}{0}=\infty$.

tion pour la premiere branche eſt pareillement $= \frac{9}{6\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

COROLLAIRE XIII.

(787.) Les deux branches de la courbe ſont donc, comme on le voit, très-diſtinctes, la branche *AD* étant beaucoup plus aiguë en *EAD*, que l'autre branche *BHA* en *BAC*.

COROLLAIRE XIV.

(788.) Comme l'abſciſſe $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b\zeta^2+\zeta^3)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & l'ordonnée .... $b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, ſont chacune multipliées par $a^{\frac{1}{2}}u$, leur rapport demeurera conſtant, quelque valeur qu'on donne aux quantités a & u. Donc ſi la valeur de b eſt la même pour toutes les profondeurs dans le Fluide, comme pour toutes les viteſſes, la courbe ſera la même pour tous les cas.

COROLLAIRE XV.

(789.) Le corps qui éprouvera le moins de réſiſtance dans le Fluide, en ſuppoſant la même largeur, ou la même relation entre *CB* & *CA*, & qui en même temps renfermera le plus grand eſpace, ſera celui dont toutes les ſections horiſontales ſeront comme *IBA*.

COROLLAIRE XVI.

(790.) Si l'on vouloit prendre une partie de la courbe comme *KB*, de ſorte que la longueur *KL* fût à la largeur *LB*, comme un nombre donné n, eſt à l'unité, l'on auroit $KL = x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2\zeta+\zeta^3)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & $LB = b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, & l'on en déduiroit $2b^2\zeta + \zeta^3 = nb\zeta^2$, ou $2b^2 + \zeta^2 = nb\zeta$, ce qui donne $\zeta = \frac{1}{2}b(n \pm \sqrt{(n^2-8)})$. Subſtituant cette valeur de ζ dans celle de $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, il en réſulte ...

$$LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\,(n^2 \pm n\sqrt{(n^2-8)}-4)}{(4+2(n^2 \pm n\sqrt{(n^2-8)}-4))^{\frac{3}{2}}}, \ \& \ a^{\frac{1}{2}}u = \frac{LB\,(4+2(n^2 \pm n\sqrt{(n^2-8)}-4))^{\frac{3}{2}}}{n^2 \pm n\sqrt{(n^2-8)}-4}.$$

Cette valeur de $a^{\frac{1}{2}}u$ étant ſubſtituée dans celle de la plus grande abſciſſe *CA* (779.) $= \frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, & dans celle de la plus grande ordonnée *CB* (781.) $= \frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$, on aura les dimenſions *CB* & *CA*, au moyen deſquelles on pourra décrire, comme auparavant, la courbe, qui paſſera par le point *K*.

SCOLIE.

(791.) On trouve dans la Table suivante les valeurs de x & de y qui correspondent aux différentes valeurs de z dans la supposition de $b=1$. La premiere colonne à gauche de cette Table contient les valeurs de z; la seconde & la troisieme colonne contiennent, pour la premiere branche, les valeurs des abscisses & des ordonnées qui leur correspondent. Les quatrieme, cinquieme & sixieme colonnes contiennent les mêmes éléments pour la seconde branche.

TABLE des Abscisses & des Ordonnées de la Courbe qui, en renfermant le plus grand, ou le moindre, espace, éprouve la moindre, ou la plus grande, résistance.

Premiere Branche.			Seconde Branche.		
z	x	$b-y$	z	x	$b-y$
0	0	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{10}$	$\frac{1809}{102\sqrt{303}}$	$\frac{45}{101\sqrt{303}}$	2	$\frac{18\sqrt{15}}{25}$	$\frac{6\sqrt{15}}{25}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{99\sqrt{51}}{2.17^2}$	$\frac{6\sqrt{51}}{17^2}$	4	$\frac{108\sqrt{51}}{17^2}$	$\frac{24\sqrt{51}}{17^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27\sqrt{15}}{50}$	$\frac{3\sqrt{15}}{25}$	∞	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
1	$\frac{9\sqrt{6}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$			
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1			

* Si, dans les formules qui donnent la valeur de x & de $b-y$, l'on substitue pour $a^{\frac{1}{2}}u$ sa valeur; si l'on fait $b=1$, & z successivement égal aux nombres de la premiere colonne, on aura tous les nombres de cette Table. Or, $a^{\frac{1}{2}}u$ étant constant, on peut en prendre la valeur pour n'importe quel point de la courbe. Au point A, où la courbe coupe l'axe, on a (781) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$; donc $a^{\frac{1}{2}}u=6b\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, puisque $b=1$: c'est la quantité qu'on a substituée dans les valeurs de x & de $b-y$.

CHAPITRE IX.

Du Mouvement progressif horisontal que prennent les corps flottants, lorsqu'ils sont poussés par une ou par plusieurs puissances.

PROPOSITION LX.

(792.) *TROUVER la relation entre le temps & la vîtesse qu'acquiert un corps flottant, lorsqu'il est poussé par une puissance dont la direction est horisontale, & placée dans le centre des résistances, en supposant que celui-ci coïncide avec le centre de gravité.*

La direction de la puissance étant horisontale, celle de la résistance le sera pareillement ; & comme elles concourent toutes les deux dans un point, la résultante des forces sera comme une seule puissance qui agit sur le centre de gravité, puisqu'on suppose que ce centre coïncide avec celui des résistances. En conséquence, le corps ne prendra pas de mouvement de rotation, & il se mouvera seulement horisontalement, suivant la direction de la puissance. Cette puissance étant nommée π, & M représentant la masse du corps, nous aurons (19.) $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = Mdu$, la quantité $Ru \pm Qu^2 + Nu^4$ exprimant les résistances qu'éprouve le corps (674.), ou $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$. Cette équation, étant intégrée, donne $t = M\int \frac{du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, ou, en divisant le numérateur & le dénominateur par N, $t = \frac{M}{N}\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4}$. Soit maintenant ......

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4 = f^2gh - f^2(g-h)u - f^2u^2 - u^4 \\ \qquad - gh(g-h)u + (g-h)^2u^2 \\ \qquad + ghu^2\end{array}\right\}$$

. Dans cette équation il y a deux racines réelles, l'une positive $u = h$, & l'autre négative $u = -g$, avec deux racines imaginaires contenues dans l'équation $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$. Nous aurons donc . . $dt = \frac{(A + Bu)\,du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$; D étant $= \frac{M}{N(g+h)(2h^2 - gh + f^2)}$; $C = \frac{M}{N(g+h)(2g^2 - gh + f^2)}$; $B = D - C$, & $A = C(2g-h) - D(g-2h)$.

L'équation étant sous cette forme, on en déduit, en intégrant, $t = \frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc\ tang\left(u-\frac{1}{2}(g-h)\right) - Arc\ tang\left(V-\frac{1}{2}(g-h)\right)\right) + \frac{1}{2}B\ log\left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right) + C\ log\left(\frac{g+u}{g+V}\right) + D\ log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$. On observera que ces arcs appartiennent à un cercle dont le rayon est $= (f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$; & que V exprime la vîtesse positive avec laquelle le corps se mouvoit lorsque la puissance π a commencé à agir *.

---

* Nous allons développer les calculs de cette Proposition, qui pourroient embarrasser quelques Lecteurs.

L'Auteur parvient à l'équation $t = \frac{M}{N}\int\frac{du}{\frac{\pi}{N}-\frac{Ru}{N}\mp\frac{Qu^2}{N}-u^4}$: ainsi il ne s'agit, pour avoir t, que de trouver la valeur de l'intégrale $\int\frac{du}{\frac{\pi}{N}-\frac{Ru}{N}\mp\frac{Qu^2}{N}-u^4}$, & de la multiplier par $\frac{M}{N}$. Pour trouver l'intégrale de cette fraction, il faut décomposer son dénominateur en ses facteurs; en conséquence, on considérera $\frac{\pi}{N}-\frac{R}{N}u\mp\frac{Q}{N}u^2-u^4$ comme $=0$; & sous cette forme, on voit qu'il s'agit de trouver les racines d'une équation du quatrieme degré, dont le terme qui contient la troisieme puissance de l'inconnue est évanoui, puisque ce sont ces racines qui doivent former les facteurs de cette quantité. (Voyez la *Troisieme Partie* du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 178.).

La vîtesse u est une quantité réelle qui peut être positive, ou négative; ainsi cette équation ne peut avoir ses quatre racines imaginaires: & ce qui suit faisant voir qu'elle ne peut les avoir toutes quatre réelles, il faut conclure qu'il y en a deux réelles & deux imaginaires (ibid. *Art.* 204 & *suiv.*). Dans cette combinaison, l'inspection seule de la proposée, & l'état de la question, font connoître que les deux racines réelles ne peuvent être toutes deux positives, ni toutes deux négatives; car si l'on avoit $u=\pm g$, & $u=\pm h$, on auroit $g\mp u=0$, & $h\mp u=0$, & par conséquent $(g\mp u)(h\mp u)$, ou $gh\mp(g+h)u+u^2=0$; ce qui fait voir que l'autre facteur du second degré, qui, multiplié par celui-ci, doit produire la proposée délivrée du terme qui contient u^3, & ayant le terme u^4 négatif, est nécessairement de cette forme $f^2\mp(g+h)u-u^2=0$. Or, f^2 étant positif, ce second facteur ne peut avoir ses racines imaginaires, comme on le suppose, & les ayant réelles, alors la proposée auroit ses quatre racines réelles, ce qui ne peut convenir; car, dans le cas où l'on admet le signe $+$, c'est-à-dire, dans la supposition des racines négatives, le second terme de l'équation qui en résulte n'est pas négatif, comme dans la proposée. A la vérité, en admettant le signe $-$, ou en supposant les racines positives, le second terme de l'équation résultante est négatif, mais, dans ce cas, comme dans le précédent, le troisieme terme est excessivement positif, ce qui ne peut être admis dans la pratique, ainsi qu'on va le voir. Cette hypothese ne peut donc avoir lieu, & les quatre racines ne peuvent être réelles.

Il faut donc que les deux racines réelles soient, l'une positive, & l'autre négative; c'est la seule combinaison qui soit compatible avec l'état de la question, puisqu'il s'agit de trouver le rapport entre la vîtesse acquise u, & le temps employé à l'acquérir, & cette vîtesse peut être positive, ou négative. Ainsi cette seule considération suffiroit, indépendamment de toute analyse algébrique, pour exclure toutes les autres combinaisons des racines. Mais poursuivons. Soit $u=-g$, & $u=h$, on aura $(h-u)(g+u)$, ou $gh-(g-h)u-u^2=0$; l'autre

 PLANC. A.

COROLLAIRE I.

(793.) Dans le cas où le corps auroit une vîtesse déterminée, & que cette vîtesse viendroit à diminuer, à cause que la somme des forces résistantes deviendroit plus grande que la puissance π; l'équation seroit, en ce cas, $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = - Mdu$, la même qu'auparavant, avec cette seule différence, que du est négative. Donc la même équation & les mêmes racines satisferont

---

facteur, qui doit concourir avec celui-ci pour produire la proposée, sera de cette forme $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$. On aura donc $\left.\begin{array}{l} f^2gh - f^2(g-h)u - f^2u^2 - u^4 \\ -gh(g-h)u + (g-h)^2u^2 \\ +ghu^2 \end{array}\right\} = \frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4$; équation dont le second terme est négatif, ayant $h < g$, & dont le troisieme terme peut être positif, ou négatif, selon la valeur de f^2. Les deux racines de l'équation $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$, peuvent à la vérité être réelles; mais pour que ce cas extrême arrive, il faut que f^2 soit moindre que $\frac{1}{4}(g-h)^2$, ce qui rend le troisieme terme $u^2(-f^2 + (g-h)^2 + gh)$ excessivement positif, car ayant $f^2 < \frac{1}{4}(g-h)^2$, on aura à plus forte raison $f^2 < (g-h)^2$, & encore à bien plus forte raison $f^2 < (g-h)^2 + gh$. Or (666 & 667, *Note*) pour que le troisieme terme qui est celui qui suit la raison du quarré des vîtesses soit ainsi excessivement positif, il faut que la partie choquante du corps soit beaucoup plus aiguë que la partie choquée, ce qui ne convient nullement avec ce que la pratique exige. Venons maintenant à l'intégration dont il s'agit.

En substituant dans la valeur de dt, les facteurs dans lesquels nous venons de supposer son dénominateur décomposé, on aura $dt = \frac{\frac{M}{N}du}{(h-u)(g+u)(f^2-(g-h)u+u^2)}$. Supposons que cette valeur de dt soit aussi représentée par $\frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$, les Coëfficients A, B, C, D étant indéterminés. Alors en réduisant au même dénominateur les fractions qui composeront le second membre, supprimant le dénominateur commun, passant tous les termes dans un membre, & réduisant, on aura $(ghA + f^2hC + f^2gD - \frac{M}{N})u^0 + (A - gA + ghB - ghC + h^2C - f^2C - g^2D + ghD + f^2D)u + (-A + hB - gB + gC + hD)u^2 + (D - B - C)u^3 = 0$. Or, pour que cette équation ait lieu indépendamment de toute valeur de u, il faut que la somme des quantités qui multiplient chaque puissance de u soit $= 0$: remplissant donc cette condition, on aura quatre équations à l'aide desquelles on déterminera, par les regles ordinaires de l'Algebre, les valeurs des coëfficients A, B, C, D. Ces opérations faites, on trouvera $B = D - C$; $A = C(2g-h) - D(g-2h)$; $D = \frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$; & $C = \frac{M}{N(g+h)(2g^2-gh+f^2)}$, comme le dit l'Auteur.

Ceci posé, soit AM un arc de cercle dont AB est la tangente & CB la secante; soit mené la secante CE infiniment proche de la premiere, & du point C, comme centre, avec le rayon CB, soit décrit l'arc BS, lequel pourra être considéré comme une petite ligne droite perpendiculaire à CE. Le triangle BSE sera semblable au triangle ACE, puisqu'ils ont chacun un angle droit, & un angle commun, il sera donc aussi semblable au triangle ACB qui en differe infiniment peu. Faisant $AB = x$, l'arc $AM = y$, & le rayon $AC = a$; BE sera $= dx$, $MN = dy$, & $CB = \sqrt{(aa + xx)}$. Les triangles semblables FIG. 4.

aux deux cas, en observant seulement que dans celui-ci, à cause qu'on a $-Mdu$, il faut changer le signe des termes des inté-

---

ACB, *SEB* donnent $CB : AC :: BE : BS$, ou $\sqrt{(aa+xx)}:a::dx:BS=\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Les secteurs semblables *CBS*, *CMN* donnent aussi $CB : CM :: BS:MN$, ou $\sqrt{(aa+xx)}:a::\frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}:dy=\frac{aadx}{aa+xx}$: c'est l'expression générale de l'élement d'un arc de cercle dont x est la tangente & a le rayon.

Reprenons maintenant l'équation $dt=\frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2}+\frac{Cdu}{g+u}+\frac{Ddu}{h-u}$. Je vois d'abord que les deux derniers termes sont les différencielles du logarithme de $g+u$ & de $h-u$, dont l'une est multipliée par C, & l'autre par $-D$, (ibid. *Quatrieme Partie*, *Art.* 27). Ainsi leurs intégrales sont $C \log (g+u)$, & $-D \log (h-u)$. Quant au premier terme, je cherche à le ramener à la forme $\frac{aadx}{aa+xx}$, dont l'intégrale est *Arc tang* x, & pour cela je fais évanouir le second terme du dénominateur, en faisant $u=x+\frac{1}{2}(g-h)$ (ibid. *Troisieme Partie*, *Art.* 192); ce qui donne $x=u-\frac{1}{2}(g-h)$, & $dx=du$. Substituant donc ces quantités dans le premier terme, en place de leurs correspondantes, il deviendra. . . .

$(A+\frac{1}{2}(g-h))\left(\frac{dx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\right)+\frac{Bxdx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}=$ . . . .

$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\frac{(f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)dx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\right)+\frac{Bxdx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}$; quantités qui s'integrent facilement: car en faisant $f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2=aa$, ce qui donne $a=(f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, on voit aisément que l'intégrale de la premiere partie est $\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}$ (*Arc tang* $(u-\frac{1}{2}(g-h))$, & que celle de la seconde est $\frac{1}{2}B \log (x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)$, ou $\frac{1}{2}B \log(f^2-(g-h)u+u^2)$, en mettant pour x sa valeur. Réunissant donc toutes ces intégrales, on aura $t=$ . . . .

$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}(\text{Arc tang } (u-\frac{1}{2}(g-h))+\frac{1}{2}B \log (f^2-(g-h)u+u^2)+C \log(g+u)-D \log (h-u)+K.$

Pour trouver la constante K, je considere que l'intégrale doit être égale à zéro au commencement de l'action, ou lorsque $t=0$; & alors u devient égale à la vitesse initiale que l'Auteur désigne par V: donc on a . . . .

$0=\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}(\text{Arc tang } (V-\frac{1}{2}(g-h))+\frac{1}{2}B \log (f^2-(g-h)V+V^2)+C \log (g+V)-$

$D \log (h-V)+K$; d'où l'on tire $K=\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}(-\text{Arc tang } (V-\frac{1}{2}(g-h))-$ . . . .

$\frac{1}{2}B \log (f^2-(g-h)V+V^2)-C \log (g+V)+D \log (h-V)$. Substituant cette valeur de K dans celle de t, l'intégrale complette, ou la valeur entiere de t, sera $=$ . . . .

$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}(\text{Arc tang } (u-\frac{1}{2}(g-h))-\text{Arc tang } (V-\frac{1}{2}(g-h)))+\frac{1}{2}B(\log(f^2-(g-h)u+u^2)-$

$\log (f^2-(g-h)V+V^2))+C(\log (g+u)-\log (g+V))-D(\log(h-u)+\log(h-V))$; ou enfin $t=$

$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}(\text{Arc tang}(u-\frac{1}{2}(g-h))-\text{Arc tang}(V-\frac{1}{2}(g-h)))+\frac{1}{2}B \log\left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right)+$

$C \log \left(\frac{g+u}{g+V}\right)+D \log \left(\frac{h-V}{h-u}\right)$: c'est l'expression même de l'Auteur.

grales résultantes, pour avoir la véritable valeur qui convient à ce cas. Donc l'intégrale deviendra. . . . .

$t = \frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2} (Arc\ tang\,(V-\frac{1}{2}(g-h)) - Arc\ tang(u-\frac{1}{2}(g-h))) +$
$\frac{1}{2}B\ log\,(\frac{f^2-(g-h)V+V^2}{f^2-(g-h)u+u^2}) + C\ log\,(\frac{g+V}{g+u}) + D\ log\,(\frac{h-u}{h-V})$.

COROLLAIRE II.

(794.) Si l'on vouloit renfermer, dans le cas de la diminution de la viteſſe, celui dans lequel on a $\pi = 0$, on auroit $h = 0$, à cauſe que le terme $f^2 gh$ correſpondant à π, doit alors s'évanouir. Subſtituant donc, dans la derniere valeur de t, celle de $h = 0$, on aura celle qui convient à ce cas.

COROLLAIRE III.

(795.) Dans le cas où le corps a acquis ſa plus grande, ou ſa moindre vîteſſe, on a $du = 0$: donc on aura auſſi $\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4 = 0$, & la racine, ou facteur poſitif, $h - u$, ſera auſſi $= 0$: donc la plus grande, ou la plus petite, vîteſſe que puiſſe acquérir le corps, eſt $= h$.

COROLLAIRE IV.

(796.) Puiſque, dans le cas où le corps acquiert ſa plus grande, ou ſa plus petite, vîteſſe h, la quantité $D\ log\,(\frac{h-V}{h-u})$, ou $D\ log\,(\frac{h-u}{h-V})$ devient infinie, il s'enſuit que le temps t ſera auſſi infini, ou que le corps a beſoin d'un temps infini pour acquérir ſa plus grande, ou ſa moindre, vîteſſe; ou, ce qui revient au même, il s'enſuit que le corps ne pourra jamais acquérir cette vîteſſe.

COROLLAIRE V.

(797.) Si le corps avoit ſes deux moitiés, choquante & choquée, égales & ſemblables, on auroit $Q = 0$ (669.); & ſi, de plus, il étoit très-grand, ou s'il étoit ſubmergé à une grande profondeur dans le Fluide, & que ſa plus grande viteſſe h ne fût pas exceſſive, on pourroit négliger la quantité Nu^4, qui provient de la dénivellation (654, 668 & 673), & l'on auroit $t = M\int\frac{du}{\pi - Ru} = \frac{M}{R}\ log\,(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru})$*

---

* Car $dt = M\,(\frac{du}{\pi - Ru}) = -\frac{M}{R}(\frac{-Rdu}{\pi - Ru})$; donc $t = -\frac{M}{R} log\,(\pi - Ru) + K$. Mais au commencement de l'action, cette intégrale doit s'évanouir, & alors $u = V$; donc

pour le cas où la vîtesse va en augmentant; & $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}\right)$, pour le cas où elle va en diminuant.

COROLLAIRE VI.

(798.) D'après les conditions précédentes, la plus grande, ou la moindre, vîtesse sera $= \frac{\pi}{R}$ *.

COROLLAIRE VII.

(799.) On aura donc encore $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right) = \infty$, ou $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}\right) = -\infty$ **, pour le temps dans lequel le corps acquerra la plus grande, ou la moindre, vîtesse.

COROLLAIRE VIII.

(800.) Ayant trouvé $t = \frac{M}{R} \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$, on en conclura $\frac{Rt}{M} = \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$; & supposant $\log q = 1$, on aura $\frac{Rt}{M} \log q = \log \left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$, ou $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: ce qui donne la vîtesse, à quelque instant que ce soit de la course du corps, lorsqu'elle va en augmentant, ou la valeur de $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}}\right) + \frac{V}{q^{\frac{Rt}{M}}}$.

COROLLAIRE IX.

(801.) Dans le cas où la vîtesse va en diminuant, on aura

$0 = -\frac{M}{R} \log(\pi - RV) + K$; & par conséquent $K = \frac{M}{R} \log(\pi - RV)$. Substituant cette valeur de K dans l'intégrale, on a $t = \frac{M}{R} \log(\pi - RV) - \frac{M}{R} \log(\pi - Ru) = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$.

* Car alors $\pi - Ru = 0$, ce qui donne $u = \frac{\pi}{R}$.

** Il est évident qu'il y a ici une faute de calcul dans le texte Espagnol. On y trouve encore, pour ce second cas, $t = +\infty$, mais il faut $t = -\infty$, ainsi que le calcul l'indique; car, puisque, dans le cas de la vîtesse décroissante, $t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}\right)$, lors de la moindre vîtesse $u = \frac{\pi}{R}$, on a $t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{0}{\pi - RV}\right) = \frac{M}{R} \log 0 = -\infty$. On appliquera cette Remarque au *Corollaire IV*, *Art.* 796. Cette faute est d'une conséquence beaucoup plus grande qu'elle ne pourroit le paroître d'abord; il nous semble évident que c'est elle qui a donné lieu à une méprise bien étrange, qu'on trouve dans le *Corollaire X*, & que nous ferons remarquer.

$\frac{Rt}{M} = log\left(\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}\right)$, & $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$; ce qui donne la viteſſe, à quelque inſtant que ce ſoit de la courſe du corps, ou $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - q^{\frac{Rt}{M}}\right) + Vq^{\frac{Rt}{M}}$.

COROLLAIRE X.

(802.) La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant de l'eſpece des quantités fractionnaires, q ſera une quantité de la même eſpece : par conſéquent, lorſque $t = \infty$, on a $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$: donc on aura dans ce cas, comme auparavant, la même viteſſe $u = \frac{\pi}{R}$ *.

---

* Nous avons traduit littéralement ce *Corollaire*, quoiqu'il doive paroître au moins étrange. La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant, dit l'Auteur, de l'eſpece des quantités fractionnaires, q ſera une quantité de la même eſpece. Cette conſéquence eſt évidemment fautive. L'eſpece de la quantité q eſt déterminée, & ne dépend nullement de celle de $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$: q eſt le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. Ce nombre eſt connu, & eſt à fort peu près $= 2,7182818$, comme le ſçavent tous les Géometres. Or, ce nombre élevé à la puiſſance dont l'expoſant eſt $\frac{Rt}{M}$, R & M déſignant des quantités conſtantes & finies, & t une quantité infinie, loin de devenir $= 0$, devient au contraire infini. $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ eſt toujours dans le cas préſent une quantité fractionnaire, puiſque dans la viteſſe décroiſſante, u eſt moindre que V, & que le terme Ru des réſiſtances eſt plus grand que la puiſſance π (793) : mais cela prouve ſeulement que $q^{\frac{Rt}{M}}$ eſt une fraction, ce qui eſt évident, puiſque t eſt négatif. Or, lorſque le corps a atteint ſa plus petite viteſſe, $t = -\infty$ (799), & alors $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}} = 0$. Cette expreſſion $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$, que l'Auteur donne comme générale, étant appliquée au cas de la viteſſe décroiſſante (801), donne très-bien la plus petite viteſſe $= \frac{\pi}{R}$; mais s'il eût voulu appliquer la même expreſſion au cas de la viteſſe croiſſante, il ſe fût trouvé bien embarraſſé, & n'auroit pu que ſoupçonner quelque erreur dans ſes calculs. Il l'eût bientôt découverte dans le *Corollaire VII*, comme nous l'avons fait remarquer dans la note qui l'accompagne. Voici comment nous voudrions rétablir le *Corollaire X*, en raiſonnant toujours d'après les principes de l'Auteur.

» La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant de l'eſpece des quantités fractionnaires, $q^{\frac{Rt}{M}}$ ſera une quan-
» tité de la même eſpece. Par conſéquent, lorſque $t = -\infty$, on a $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$. Donc on aura
» dans ce cas, comme auparavant, la même viteſſe $u = \frac{\pi}{R}$.

L'expreſſion $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$, que l'Auteur donne comme générale, puiſqu'il dit que q eſt fractionnaire & $t = +\infty$, ne convient point au cas de la viteſſe croiſſante ; au contraire,

Corollaire XI.

(803.) Si dans la valeur $\frac{\pi}{R}$ de la plus grande viteſſe qu'on a trouvée en négligeant la dénivellation, on ſubſtitue les valeurs de $\pi = Nf^2gh$, & de $R = N(f^2+gh)(g-h)$, cette plus grande viteſſe ſera $= \frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)}$. Cette quantité eſt toujours plus grande que la plus grande viteſſe h qu'on trouve en ayant égard à la dénivellation, à moins qu'on n'ait $f^2 < g(g-h)$.

Corollaire XII.

(804.) Le cas dans lequel la plus grande viteſſe, en tenant compte de la dénivellation, eſt égale à la plus grande viteſſe qui a lieu en la négligeant, eſt celui dans lequel on a $f^2 = g(g-h)$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de f^2 dans le troiſieme terme de l'équation ſuppoſée, *Art.* 792, qui eſt $= u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$, ce terme ſe réduira à h^2u^2, & ſera par conſéquent poſitif. Donc la plus grande viteſſe h ne peut être plus grande que $\frac{\pi}{R}$, à moins que la quantité $\mp Q$ ne ſoit poſitive, ou, ce qui revient au même, que la partie choquante du corps ne ſoit pas beaucoup plus aiguë que la partie choquée. (*Voyez* les Notes des *Art.* 667 & 792.).

Corollaire XIII.

(805.) Si nous ſuppoſons $\frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)} = h + \theta$, θ exprimant la différence entre les deux plus grandes viteſſes, c'eſt-à-dire, ſi $\theta = \frac{\pi}{R} - h$, cette différence θ ſera $= \frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)} - h = \frac{h^2(f^2-g(g-h))}{(f^2+gh)(g-h)}$.

Scolie I.

(806.) Nous avons aſſuré dans la *Propoſition* ci-deſſus que $f^2-(g-h)u+u^2$ contient deux racines imaginaires; cependant

dans ce cas, cette quantité eſt infinie. Auſſi en faiſant $q^{\frac{Rt}{M}} = \infty$, dans la formule de la viteſſe croiſſante, on trouve la plus grande viteſſe $= \frac{\pi}{R}$ comme cela doit être. En général, il faut obſerver que dans le cas de la viteſſe décroiſſante, le calcul donne toujours pour t une quantité négative: puiſque (799) $t = \frac{M}{R}$ multiplié par le logarithme de la fraction $\frac{\pi-Ru}{\pi-RV}$; logarithme qui eſt négatif, comme chacun le ſçait.

cette

cette quantité peut en contenir deux réelles, si l'on a $\frac{1}{4}(g-h)^2 > f^2$; mais, pour que cela arrive, il est nécessaire que le troisieme terme $u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$ soit excessivement positif, ou que la partie choquante du corps soit excessivement aiguë, en comparaison de la partie choquée; ce qui ne convient pas dans la pratique. *Voyez* les Notes des *Art. 667 & 792.*

Scolie II.

(807.) Pour faciliter le calcul, nous avons supposé, dans la *Proposition*, que la puissance étoit placée au centre de gravité, & que le centre des résistances coïncidoit avec celui de gravité; mais cette supposition est impossible, à moins que le centre de gravité ne suive les variations du centre des résistances; variations qui sont très-réelles, comme on le verra par la suite, & comme on peut facilement le présumer dès-à-présent, en considérant seulement combien varient les résistances qui résultent de la dénivellation. Cependant, lorsque ces résistances ne seront pas excessives, ou que le corps n'aura pas une inclinaison assez considérable pour que les deux centres se séparent, on pourra avec sûreté négliger la différence qui en résulte.

Scolie III.

(808.) Quoiqu'on ait fait voir (796.) que le temps dont un corps a besoin pour acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vîtesse, est infini, cependant il ne laisse pas, pour cela, de l'acquérir presque toute dans un temps très-court. Car soit T le temps nécessaire pour acquérir cette vîtesse depuis le repos, & t celui qui est nécessaire pour l'acquérir, en commençant à se mouvoir avec la vitesse primitive V: on aura $T = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi}{\pi - Ru}\right)$, & $t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$. Donc le temps qu'il faut au corps pour acquérir la vîtesse V, sera .... $T - t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi}{\pi - Ru}\right) - \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right) = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi}{\pi - RV}\right)$. Supposons maintenant que V soit une vîtesse un peu moindre que la plus grande vîtesse $\frac{\pi}{R}$; soit, par exemple, $V = \frac{\pi}{R} - \frac{\pi}{100R} = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, on aura $T - t = \frac{M}{R} \log\left(\frac{\pi}{\pi - \pi\left(1 - \frac{1}{100}\right)}\right) = \frac{M}{R} \log 100 = \frac{M}{R}(4,6)$: de sorte que si $M = R$, on aura $T - t = 4'' \, 36'''$; c'est le temps qu'emploîra le corps, depuis le repos, pour acquérir une vitesse qui n'est moindre que la plus grande que de $\frac{1}{100}$. Si l'on a $M = 2R$, le temps

sera double ; il sera triple, si $M = 3R$, & ainsi de suite : de sorte que si M étoit cent fois plus grand que R, le temps ne seroit que de $460''$, ou $7'\,40''$. Pour un parallélipipede rectangle qui flotte, ayant sa base parallele à l'horison, on a $M = mbae$, e exprimant la longueur du parallélipipede, & $R = \frac{1}{3} mba^{\frac{3}{2}}$ (642.) : donc $\frac{M}{R} = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}$, & $T - t = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}$ $(4''\,36''')$. Si donc on avoit $a = 1$, & $e = 20$, le temps $T - t$ que le parallélipipede emploîroit à acquérir une vîtesse moindre seulement de $\frac{1}{100}$ que la plus grande, seroit $= 4'\,36''$. D'où l'on voit que, dans très-peu de temps, les corps acquierent une vîtesse qu'on peut supposer sans erreur sensible, égale à la plus grande. On dira la même chose de l'expression $D \log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$, qui donne le temps infini, dans le cas où l'on tient compte de la dénivellation.

PROPOSITION LXI.

(809.) *Trouver la relation entre la vîtesse & l'espace que parcourt un corps flottant, poussé par une puissance dont la direction est horisontale, & qui est placée dans le centre des résistances, en supposant que ce centre coïncide avec celui de gravité.*

On a, par la *Proposition* précédente (792.), $dt = \frac{Mdu}{1 - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, & par l'*Art.* 29, $dt = \frac{de}{u}$, e exprimant l'espace parcouru. Cette valeur de dt étant donc substituée, donnera $de = \frac{Mudu}{1 - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, l'on aura donc aussi, comme dans la *Proposition* précédente, ... $de = \frac{(A + Bu)\,du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$; D étant $= \frac{Mh}{N(g+h)(2h^2 - gh + f^2)}$; $C = \frac{-Mg}{N(g+h)(2g^2 - gh + f^2)}$* ; $B = D - C$; & $A = C(2g - h) - D(g - 2h)$; d'où l'on tirera, en intégrant, (*Voyez* la Note de l'*Article* 792.) $e = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\text{Arc tang}\left(u - \frac{1}{2}(g-h)\right) - \text{Arc tang}\left(V - \frac{1}{2}(g-h)\right)\right) + \frac{1}{2} B \log\left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)V + V^2}\right) + C \log\left(\frac{g+u}{g+V}\right) + D \log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$.

COROLLAIRE I.

(810.) Les intégrales avec lesquelles on trouve la valeur de l'espace parcouru e, sont donc les mêmes que celles avec lesquelles on

---

* Les valeurs de D & de C doivent être telles qu'on les voit ici ; elles sont très-fautives dans l'original.

trouve la valeur du temps t, dans lequel il eſt parcouru ; elles ne différent que par les coëfficients conſtants A, B, C, D *.

COROLLAIRE II.

(811.) Le corps ne pourra donc acquérir ſa plus grande, ou ſa moindre, viteſſe, qu'après avoir parcouru un eſpace infini.

COROLLAIRE III.

(812.) Si le corps avoit ſes deux moitiés, choquante & choquée, égales & ſemblables, & ſi l'on négligeoit l'effet de la dénivellation exprimé par Nu^4, on auroit $de = \frac{Mu\,du}{\pi - Ru}$, & par conſéquent $e = \frac{M}{R^2}\left(R(V-u) + \pi \log\left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)\right)$ **.

COROLLAIRE IV.

(813.) Si la marche du corps commençoit depuis le repos pour parcourir l'eſpace e, on auroit $V = 0$; donc alors $e = \frac{M}{R^2}\left(-Ru + \pi \log\left(\frac{\pi}{\pi - Ru}\right)\right)$.

COROLLAIRE V.

(814.) Si nous ſubſtituons à la place de u ſa valeur $\frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, nous aurons $e = \frac{M}{R^2}\left(-\pi\left(1 - \frac{1}{100}\right) + \pi(4,6)\right) = \frac{M\pi}{R^2}(3,61)$.

COROLLAIRE VI.

(815.) L'eſpace parcouru ſera donc en raiſon directe de la puiſſance & de la maſſe, & en raiſon inverſe doublée de la conſtante R qui multiplie les réſiſtances.

---

* L'Auteur dit qu'elles ne different que par les trois coëfficients conſtants A, B & C ; mais cette conſéquence eſt une ſuite de la faute de calcul que nous venons de faire remarquer.

** Pour trouver cette intégrale, il faut employer une méthode analogue à celle que nous avons développée dans la note de l'*Art.* 792. Soit $\frac{Mu\,du}{\pi - Ru} = A\,du + \frac{B\,du}{\pi - Ru}$. En réduiſant le ſecond membre en fraction, diviſant par du, ſupprimant le dénominateur commun, & paſſant tous les termes d'un côté, on aura $\pi A + B - RAu - Mu = 0$. Cette équation devant avoir lieu indépendamment de toute valeur de u, on aura $\pi A + B = 0$, & $-RA - M = 0$, d'où l'on tire $A = -\frac{M}{R}$, & $B = \frac{\pi M}{R}$. Subſtituant ces quantités, on aura $\frac{Mu\,du}{\pi - Ru}$, ou $de = -\frac{M}{R}du + \ldots \frac{\frac{\pi M}{R}.du}{\pi - Ru}$, ou $= -\frac{M}{R}du + \frac{\pi M}{-R^2}\left(\frac{-R\,du}{\pi - Ru}\right)$; quantité dont le premier terme s'integre exactement, & dont le ſecond s'integre par les logarithmes. Intégrant donc, on aura . . . . . . $e = -\frac{M}{R}u - \frac{M\pi}{R^2}\log(\pi - Ru) + K$. Or cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, temps auquel la viteſſe u eſt égale à la viteſſe initiale V. Donc $K = \frac{M}{R}V + \frac{\pi M}{R^2}\log(\pi - RV)$ & par conſéquent $e = \frac{M}{R^2}\left(R(V-u) + \pi \log\left(\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)\right)$.

PROPOSITION LXII.

(816.) *Trouver la vîtesse des Lames.*

La puissance qui agit dans les Lames, est la gravité de la Lame même. Si une partie de la superficie d'un Fluide s'éleve par quelque cause que ce soit, après qu'elle a acquis sa plus grande élevation, sa gravité l'oblige de descendre, & lui fait prendre une disposition & une figure vers le bas, qui est égale à celle qu'elle avoit prise vers le haut; puisque l'action & la réaction sont égales; c'est-à-dire, qu'elle forme au-dessous de la superficie du Fluide un enfoncement dont la figure est absolument la même que celle de l'élevation : d'où il s'ensuit que dans les Lames *ABCDEFG*, la partie
Fig. 73. *ABC* qui s'éleve au-dessus du niveau *AG*, est égale & semblable à la partie *CDE*, celle-ci à *EFG*, & ainsi des autres. Le mouvement de la Lame consiste donc en ce que le point *D* s'éleve en *H*, auquel cas on dit que la Lame a parcouru l'espace de *B* en *H*, ou de *I* en *D*; & cette élevation dépend du poids de la colonne *BI*, qui doit mettre en mouvement la masse *BID*. Soit donc la hauteur $BI = a$; la moitié ID de l'amplitude de la Lame $= b$; la partie dont cette Lame est déjà abaissée; c'est-à-dire, $BK = DL = x$; t le temps, & u la vîtesse des points *K* ou *L*. Cela posé, nous aurons (19 & 47.) $32(a - 2x)\,dt = (a + b)\,du$, &, en substituant à la place de dt sa valeur $\frac{dx}{u}$, $32(a - 2x)\,dx = (a + b)\,udu$, d'où l'on tirera, en intégrant, $64(ax - x^2) = (a + b)\,u^2$, ou $u = \frac{dx}{dt} = \frac{8(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$. Cette derniere équation donne $dt = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}\,dx}{8(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, &, en intégrant, $t = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc BM* *, *BMI* étant un demi-cercle décrit sur le diametre $BI = a$. Lorsque le point *K* s'abaisse en *I*, & que le point *L* s'éleve en *H*, l'Arc *BM* devient tout le demi-cercle *BMI*, & dans ce cas le rapport $\frac{Arc\ MB}{\frac{1}{2}a}$ est celui de la demi-circonférence au rayon. Ce rapport étant donc représenté par c, on aura $\frac{1}{8}(a + b)^{\frac{1}{2}}\,c$, pour l'expression de tout le temps dans le-

* En mettant la valeur de dt sous cette forme $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a} \cdot \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{(ax - xx)^{\frac{1}{2}}}$, on voit que le second facteur est l'élément d'un Arc de cercle dont a est le diametre, & x le sinus verse. (*Voyez* la premiere Note de l'*Art.* 365.).

quel le point B s'abaiſſe en I, & dans lequel le point B s'éleve en H, ou pour celui dans lequel B paſſe en H. Ce temps eſt le même que celui qu'un pendule de la longueur $\frac{a+b}{2}$ emploie à faire une oſcillation (369.). Ce temps $\frac{1}{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, eſt à une ſeconde, comme la longueur, ou l'eſpace $ID = b$ que la Lame parcourt dans ce temps, eſt à $\frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}.c}$; eſpace que parcourra la Lame dans une ſeconde de temps, & qui indique par conſéquent ſa véritable viteſſe (28.).

COROLLAIRE I.

(817.) Le temps $\frac{1}{2}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, eſt à un autre temps quelconque $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc* BM, que le point B emploie à paſſer de B en N, comme l'eſpace b que parcourt la Lame pendant ce temps, eſt à l'eſpace $BN = \frac{b.\,Arc\,BM}{c.\frac{1}{2}a}$; de ſorte que ſi nous faiſons $BN = y$, nous aurons $y = \frac{b.\,Arc\,BM}{c.\frac{1}{2}a}$; équation de la Lame, ou de la courbe BOC, qui eſt une eſpece de cycloïde.

SCOLIE I.

(818.) La relation entre a & b eſt différente dans les Lames, ſelon qu'elles vont en augmentant, ou en diminuant. La force du vent fait toujours augmenter les premieres, & le rapport $\frac{a}{b}$ eſt plus grand que dans les ſecondes, qui ſont celles qui ſubſiſtent après que le vent a diminué, ou qu'il a ceſſé entiérement *. Dans ces dernieres Lames la quantité b peut être beaucoup de fois plus grande que a; parce que b demeurant conſtante, a diminue continuellement juſqu'à devenir égale à zéro. Si, dans les premieres Lames, ou dans celles qui ſont parvenues à tout l'accroiſſement poſſible, à l'égard du vent qui les occaſionne, on ſuppoſe que le mouvement du point B vers H, ſe réduiſe à l'application continuelle, ou à la rotation, du cercle BMI ſur la droite ID, nous aurons $PC = \frac{1}{2}3PI = \frac{1}{2}ac$ (365, *Note Ire*.), & $ID = b = a + \frac{1}{2}ac = a(1 + \frac{1}{2}c)$. Le plus grand rapport $\frac{a}{b}$ ſera donc, dans cette

* Les Marins Eſpagnols appellent *Picadas*, ou *Olas Picadas*, les Lames qui vont en augmentant, par l'augmentation de la viteſſe du vent; & ils nomment *Olas de Leva*, ou *Mares de Leva*, celles qui ſubſiſtent après que le vent qui les a produites eſt diminué, ou même après qu'il s'eſt entiérement calmé. Il eſt viſible que ces dernieres ſont de la ſeconde eſpece, & vont toujours en diminuant.

ſuppoſition, $\frac{a}{a(1+\frac{1}{2}c)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2,57}$: tous les autres rapports ſeront moindres, & iront en diminuant juſqu'à l'infini, dans toutes les autres Lames.

SCOLIE II.

(819.) *Newton*, dans ſa *Philoſophie Naturelle*, *Liv. II*, *Propoſition XLVI*, néglige la valeur de a; or, en négligeant d'avoir égard à cette quantité, la viteſſe de la Lame eſt $= \frac{8b^{\frac{1}{2}}}{c}$, & ſuit la raiſon des racines quarrées de ſes amplitudes, comme le dit cet illuſtre Auteur.

CHAPITRE X.

Des Moments que les corps éprouvent dans leur mouvement progreſſif horiſontal.

PROPOSITION LXIII.

(820.) *TROUVER les moments qu'éprouve un Corps qui ſe meut horiſontalement dans un Fluide.*

La réſiſtance eſt une action, ou force, par laquelle le Fluide agit ſur le corps; on peut par conſéquent la regarder comme une puiſſance. Donc ſi l'on multiplie les différentes actions, ou réſiſtances, que le Fluide exerce ſur chaque différencielle de la ſurface du corps, ſuivant des directions perpendiculaires aux plans qui, paſſant par ces différencielles, coïncident avec l'axe de rotation; ſi l'on multiplie, dis je, ces différentes actions par leurs diſtances à ce même axe, la ſomme des produits ſera celle des moments.

SCOLIE.

(821.) Les moments peuvent être conſidérés, ou peuvent être calculés, par rapport à trois axes, deux horiſontaux perpendiculaires entre eux, & le troiſieme vertical; les deux premiers peuvent même être pris arbitrairement. Nous nous bornerons cependant dans nos recherches à trouver les moments qui ont lieu à l'égard d'un axe horiſontal perpendiculaire à la direction du mouvement, parce que, quelle que puiſſe être cette direction, on peut toujours la décompoſer en deux autres perpendiculaires à deux axes donnés.

PROPOSITION LXIV.

(822.) *Trouver les moments qu'éprouve un corps flottant quelconque qui se meut horisontalement dans un Fluide immobile.*

Soit divisé la surface du corps, par des plans horisontaux & verticaux, en petits quadrilateres sensiblement plans; & soit calculé la force qui agit sur chacun dans une direction perpendiculaire au plan qui, passant par le même petit quadrilatere, coïncide avec l'axe horisontal de rotation. Multipliant ensuite cette force par la distance du petit quadrilatere à l'axe, le produit sera le moment qu'éprouve ce petit quadrilatere. Sommant donc tous les moments qui proviennent de tous les petits quadrilateres, on aura celui qu'éprouve tout le corps.

La force horisontale qui agit sur un petit quadrilatere a été trouvée (624.) $= mc\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathit{sin}\,\theta^2\right)$: donc (613.) celle qu'il éprouve dans une direction perpendiculaire au plan qui, passant par le même petit quadrilatere, coïncide avec l'axe, sera $= \frac{mb\,\mathit{sin}\,x}{\mathit{sin}\,n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathit{sin}\,\theta^2\right)$: x exprimant le complément de l'angle que forme le petit quadrilatere avec le plan qui, passant par ce quadrilatere, coïncide avec l'axe*; u étant la vitesse horisontale, & θ l'angle que forme le petit quadrilatere avec la direction du mouvement. Multipliant cette force par r, distance du petit quadrilatere à l'axe, le moment qu'il éprouvera, sera exprimé par . . . .
$\frac{mbr\,\mathit{sin}\,x}{\mathit{sin}\,n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathit{sin}\,\theta^2\right)$.

COROLLAIRE I.

(823.) Les moments qu'éprouvent les petits quadrilateres, & qui sont produits par les deux dénivellations, seront (625.) $= \frac{mbr\,\mathit{sin}\,x}{\mathit{sin}\,n}\left(Da - \frac{1}{6}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathit{sin}\,\theta^2\right)$, & tous les deux sont positifs**. Donc, pour avoir égard à la dénivellation

* L'angle x que la direction suivant laquelle on a décomposé la force, forme avec le petit quadrilatere sur lequel elle agit (571.), est le complément de celui que forme le petit quadrilatere, avec le plan qui, passant par ce quadrilatere, coïncide avec l'axe; car la direction de la force faisant un angle droit avec ce dernier plan (820.), les deux autres angles ne doivent valoir ensemble qu'un angle droit. Donc, &c.

** Car si, par exemple, l'augmentation de force dans la partie choquante, qui provient de la dénivellation, tend à faire tourner le corps, en lui élevant son extrêmité choquante, il est évident

du Fluide, il faudra les ajouter à ceux qu'on a déterminés ci-dessus.

COROLLAIRE II.

(824.) En décomposant les forces, & par conséquent les moments relatifs à un axe horisontal, on peut les distinguer en moments horisontaux & en moments verticaux. Les moments horisontaux seront le produit des forces horisontales qui agissent sur les petits quadrilateres, par leur distance verticale au plan horisontal qui passe par le centre de gravité; & les moments verticaux seront le produit des forces verticales, qui agissent sur les mêmes petits quadrilateres, par leur distance horisontale au plan vertical qui passe par le centre de gravité.

COROLLAIRE III.

(825.) En décomposant de même les forces, & par conséquent les moments qui en résultent relativement à un axe vertical, on peut réduire ces moments à deux autres, avec des directions perpendiculaires entre elles, & toutes deux par rapport au même axe.

COROLLAIRE IV.

(826.) Si le plan vertical coïncidant avec l'une de ces directions, coupoit le corps en deux parties égales & semblables, les moments qui résulteroient par rapport à cette direction, se détruiroient réciproquement, parce que les moments positifs d'un côté se trouveroient égaux aux moments négatifs de l'autre.

PROPOSITION LXV.

(827.) *Trouver les moments relatifs à un axe vertical, qu'éprouve un corps flottant quelconque, qui se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui partage le corps en deux parties égales & semblables.*

La force horisontale qui agit sur un petit quadrilatere quelconque, ou sur une des différencio-différencielles, dans lesquelles on

---

que la diminution de force dans la partie choquée, qui provient de la même cause, tend à abaisser l'extrémité choquée; puisque le moment de la force qui agit sur la partie choquée, est *négatif*, & que la diminution d'une quantité négative produit le même effet que l'augmentation d'une quantité positive. L'extrémité choquante s'élevera donc encore, en vertu de la dénivellation dans la partie choquée: donc les moments qui proviennent des deux dénivellations sont conspirants, c'est-à-dire, sont tous deux positifs. On raisonnera de même pour tous les autres cas.

divise

divise la surface du corps, est (624.) = ...
$mc\left(Da \pm \frac{1}{6}u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$; ou, en substituant x pour D, & dx pour a, en supposant que x désigne la distance verticale du petit quadrilatere à la superficie du Fluide, ou la profondeur à laquelle il est enfoncé dans le Fluide, & dx la hauteur de ce petit quadrilatere; cette expression deviendra = $mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$, (626 & 627) : ou bien parce qu'on suppose la partie choquante du corps égale & semblable à la partie choquée, la résistance des deux petits quadrilateres correspondants sera (655.) $= \frac{1}{2}mcux^{\frac{1}{2}}dx \sin\theta$. Si donc y désigne la distance horisontale de l'axe à la ligne qui joint les deux petits quadrilateres, le moment qu'ils éprouveront sera $= \frac{1}{2}mcuyx^{\frac{1}{2}}dx \sin\theta$; quantité dont l'intégrale $\frac{1}{2}mu\int cyx^{\frac{1}{2}}dx \sin\theta$ exprimera le moment qu'éprouve tout le corps.

COROLLAIRE.

(828.) Les momens qu'éprouvent les petits quadrilateres, & qui proviennent des deux dénivellations, seront $= mcydx(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$.

DÉFINITION III.

(829.) On appellé *Stabilité* les moments qu'éprouve un corps à l'égard d'un axe horisontal; parce que ce sont ces moments qui agissent pour maintenir le corps dans l'état où il se trouvoit auparavant.

PROPOSITION LXVI.

(830.) *Trouver la Stabilité d'un corps flottant quelconque, ou les moments qu'il éprouve, lorsqu'il se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire à l'axe horisontal de rotation.*

La force horisontale qui agit sur un petit quadrilatere quelconque, est, par ce qu'on vient de voir, $= mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$. Supposons maintenant que k représente la profondeur verticale à laquelle le centre de gravité du corps est abaissé au-dessous de la superficie du Fluide, il est clair que $k - x$ sera la distance verticale du même centre de gravité au plan horisontal qui passe par le petit quadrilatere *. Donc $mcdx(k-x)\,(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u \sin\theta)^2$ sera l'expression du moment horisontal qu'éprouvera ce petit quadrilatere. Pareillement si l'on nomme y

* Cette expression paroît supposer k plus grand que x, ou que le petit quadrilatere est plus proche de la superficie du Fluide que le centre de gravité du corps; mais elle n'en convient pas moins au cas, où il en seroit plus éloigné; car alors $k-x$ est négatif, ce qui est concevable, puisque le moment horisontal doit aussi l'être.

l'ordonnée du corps, ou la diſtance horiſontale du petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe de rotation, on aura $mcdy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2$ pour l'expreſſion de la force verticale qui agit ſur ce quadrilatere (556.), & par conſéquent ſon moment vertical ſera $= mcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2$: donc la totalité des moments qu'éprouvera le corps ſera $= mſcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2 + mſcdx(k - x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2$.

COROLLAIRE I.

(831.) Les moments qui réſultent des dénivellations ſeront par conſéquent $mſcydy(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2 + mſcdx(k \pm x)(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2$, le ſigne + ayant lieu pour la partie choquante, & le ſigne — pour la partie choquée *.

COROLLAIRE II.

(832.) Si le plan vertical qui coïncide avec l'axe, partage le corps en deux moitiés égales & ſemblables, la ſomme des moments de deux petits quadrilateres correſpondants dans l'une & l'autre moitié ſera $= \frac{1}{2} mſcux^{\frac{1}{2}} ydy \, ſin \, \theta + \frac{1}{2} mſcu(k - x) x^{\frac{1}{2}} dx \, ſin \, \theta$.

COROLLAIRE III.

(833.) Si y exprime l'ordonnée de la partie choquante, & Y celle de la partie choquée ; les moments de cette derniere étant négatifs, on aura l'expreſſion ſuivante pour les moments qu'éprouve le corps ; $mcydy(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u \, ſin \, \theta)^2 - mcYdY(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u \, ſin \, \Theta)^2$ . . . . $+ mcdx(k - x)\left(\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} u(ſin \, \theta + ſin \, \Theta)\right) + \frac{1}{64} u^2 (ſin \, \theta^2 - ſin \, \Theta^2)$, θ & Θ exprimant les angles que forment les petits quadrilateres avec la direction du mouvement, tant dans la partie choquante que dans la partie choquée.

COROLLAIRE IV.

(834.) Si l'on a $u = 0$, ou ſi le corps n'a point de mouvement horiſontal, les moments ſe réduiront aux ſeuls moments verticaux $ſmcyxdy - ſmcYxdY = ſmcx(ydy - YdY)$.

---

* Il eſt eſſentiel de ſe rappeller ici que la quantité x eſt ſeulement relative à la hauteur de la dénivellation, & $= \frac{1}{64} u^2 ſin \, \theta^2$, (594.) ; ainſi cette lettre n'exprime point la même grandeur que dans l'expreſſion des moments du corps qui proviennent des réſiſtances. On appliquera cette remarque aux *Articles* 823 & 828.

COROLLAIRE V.

(835.) La quantité $mfcx\,(ydy - YdY)$, eſt égale au produit du poids de tout le corps, par la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale qui paſſe par le centre du volume *. Donc ſi nous appellons P le poids de tout le corps, & h la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale qui paſſe par celui du volume, on aura $mfcx\,(ydy - YdY) = hP$. PLANC. III.

COROLLAIRE VI.

(836.) Ces moments verticaux $mfcx\,(ydy - YdY) = hP$ peuvent être poſitifs, ou négatifs, ſelon que $fcxydy$ ſera plus grand, ou plus petit qne $fcxYdY$; ou ſelon que la verticale qui paſſe par le centre du volume, paſſera entre le centre de gravité & la partie choquante, où entre ce même centre & la partie choquée.

COROLLAIRE VII.

(837.) Si donc on avoit $fcxydy = fcxYdY$, les moments verticaux ſeroient zéro.

COROLLAIRE VIII.

(838.) Dans les corps formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horiſontal H, la verticale QH, qui paſſe par le centre du volume, paſſe auſſi par ce même axe : donc, en nommant K la diſtance HO du centre de volume au centre de gravité O, & Δ l'angle QHO, la diſtance de O à la verticale QH ſera $= h = K\,\text{ſin}\,\Delta$, & $hP = KP\,\text{ſin}\,\Delta$. FIG. 60.

COROLLAIRE IX.

(839.) Dans les corps qui ne ſont point formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horiſontal, on ne laiſſera pas d'avoir $hP = KP\,\text{ſin}\,\Delta$; mais K ſera variable ſuivant les différentes inclinaiſons Δ que peut prendre le corps.

COROLLAIRE X.

(840.) Si le centre de volume H étoit plus bas que le centre

---

* Car le moment qui réſulte de la ſomme des moments verticaux, ou le moment vertical total, eſt égal à la réſultante des forces verticales, ou à la force verticale totale, multipliée par la diſtance horiſontale de ſa direction à la verticale qui paſſe par le centre de gravité du corps. Or la force verticale totale eſt (561.) égale au poids du volume de Fluide que le corps déplace, ou (562.) égale au poids de tout le corps ; & elle paſſe par le centre du volume déplacé : donc, &c.

PLANC. IV. de gravité, K feroit alors négatif, & par conféquent le moment $KP\ fin\ \Delta$ le feroit auffi.

SCOLIE.

(841.) Il eft néceffaire de ne pas perdre de vue, que les moments qui proviennent du poids du corps doivent être pris dans leur entier, parce que le poids eft réel & pofitif; ils different par conféquent des moments qui proviennent des réfiftances, parce que celles-ci doivent être réduites aux deux tiers (644.). Ainfi, dans le cas où il fera queftion de combiner ces moments les uns avec les autres, on aura attention de réduire aux deux tiers toute quantité qui fera multipliée par la viteffe u.

PROPOSITION LXVII.

(842.) *Trouver en général le moment qu'éprouve un corps quelconque qui eft fans mouvement, & eft compofé de deux moitiés égales & femblables, féparées l'une de l'autre par un plan qui coïncide avec l'axe horifontal.*

FIG. 74. Soit ABD le corps compofé de deux moitiés égales & femblables ABE, DBE; & C fon centre de gravité. Soit de plus BCE perpendiculaire à la droite AD, cette ligne AD étant fuppofée coïncider avec la fuperficie du Fluide, lorfque le corps eft droit, ou que la ligne BCE eft verticale. Suppofons maintenant que le corps foit dans une fituation inclinée, GL étant la fuperficie du Fluide; & foit tiré les verticales MC, FN, la premiere paffant par le centre de gravité C, & la feconde par le centre F, qui eft celui du volume du corps, lorfqu'il fe trouve dans une fituation droite. Cela pofé, faifant $AD = e$, $CE = k$, $CF = \pm H$, & l'angle de l'inclinaifon $MCE = CFN = LED = \Delta$; l'horifontale CN fera $= H\ fin\ \Delta$; $EM = k\ fin\ \Delta$; & l'aire du triangle DEL, ou AEG, fera $= \frac{1}{8}e^2\ fin\ \Delta$ *, DL, ou AG étant fenfiblement des lignes droites. Le moment qu'éprouvera toute la partie ABD du corps, le poids de cette partie étant P, fera $\pm\ CN.P = \pm\ HP\ fin\ \Delta$: & celui qu'éprouvera le triangle LED fera $= m(\frac{2}{3}EL + EM)\frac{1}{8}e^2\ fin\ \Delta =$

---

* Car, en abaiffant la perpendiculaire DS fur la ligne EL, on aura $1 : ED :: fin\ LED : DS$, ou $1 : \frac{1}{2}e :: fin\ \Delta : DS = \frac{1}{2}e\ fin\ \Delta$. Donc le triangle $DEL = \frac{EL.DS}{2} = \frac{\frac{1}{2}e.\frac{1}{2}e\ fin\ \Delta}{2} = \frac{1}{8}e^2 fin\Delta$. Dans les inclinaifons infiniment petites, le point S eft fenfiblement confondu avec le point L.

$m(\frac{1}{3}e+k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta$ * ; enfin celui qu'éprouvera le triangle *AEG* sera $= m(\frac{2}{3}EG - EM)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta = m(\frac{1}{3}e - k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta$. Ainsi la somme de tous les moments qu'éprouvent les triangles tels que *LED* dans toute la longueur du corps, sera $=\frac{m}{8}\int ce^2\sin\Delta(\frac{1}{3}e+k\sin\Delta)$: & la somme de tous ceux qui correspondent aux triangles tels que *AEG*, sera $=\frac{m}{8}\int ce^2\sin\Delta(\frac{1}{3}e-k\sin\Delta)$. Or la somme de tous ces moments étant jointe au moment $\pm HP\sin\Delta$, est le moment total qu'éprouve le corps ** : donc ce moment sera $=\pm HP\sin\Delta + m\int\frac{1}{8}ce^2\sin\Delta(\frac{1}{3}e+k\sin\Delta) + m\int\frac{1}{8}ce^2\sin\Delta(\frac{1}{3}e-k\sin\Delta) = \ldots\ldots (\pm HP+\frac{m}{12}\int e^3c)\sin\Delta$ ***.

---

* Car la distance *Eg* du centre de gravité *g* du triangle *LED* au point *E*, est égale à $\frac{2}{3}EL$; mais, puisqu'on suppose l'inclinaison infiniment petite, $Eg = En$; donc la distance du centre de gravité *g* du triangle *LED* à la verticale *CM* qui passe par le centre de gravité, est égal à $En + EM = \frac{2}{3}EL + EM$, &c.

** Pour voir clairement la raison pour laquelle l'Auteur ajoute les moments des deux triangles *LED*, *AEG*, au moment $\pm HP\sin\Delta$ qu'éprouve la partie *ABD*, qui étoit submergée lorsque le corps étoit dans une situation droite, on décomposera le volume actuellement submergé *GBL*, de maniere qu'il comprenne le volume *ABD*, ce qui donnera $GBL = ABD + LED - AEG$; d'où l'on voit que, pour avoir le moment qui agit sur *GBL*, il faut ajouter ensemble les moments qui agissent sur *ABD* & sur *LED*, & retrancher de leur somme le moment qui agit sur *AEG*. Mais on vient de voir que le moment de $ABD = \pm HP\sin\Delta$, le signe + ayant lieu lorsque le centre de volume est plus haut que celui de gravité, comme on le suppose dans la Figure, parce que la force verticale du Fluide, passant par le point *F* (562.), tend à redresser le corps (836.) avec une énergie, ou un moment représenté par $HP\sin\Delta$. Au contraire le signe − a lieu lorsque le centre de volume est plus bas que celui de gravité, parce qu'alors la quantité *H* est négative (840.), & que la force verticale de l'eau tend à renverser le corps; & elle le renverseroit en effet, s'il n'étoit retenu par l'action d'autres moments qui agissent pour le retablir dans la situation droite, lesquels doivent être plus puissants que le moment $HP\sin\Delta$, pour que le corps ait de la stabilité. Le moment du triangle *LED* qui est submergé par l'inclinaison $= m(\frac{1}{3}e+k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta$; & ce moment est toujours positif, parce que l'action verticale de l'eau agissant de bas en haut sur le centre de gravité *g* de ce triangle, tend à redresser le corps, ou à diminuer son inclinaison. Enfin le moment qui correspond au triangle *AEG* qui est sorti du Fluide, est $= m(\frac{1}{3}e-k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta$. Ce moment est toujours négatif, puisque le centre de gravité de ce triangle est situé de l'autre côté de l'axe de rotation; mais, comme on vient de le voir, ce moment est à retrancher de la somme des deux moments qu'on vient de considérer, il s'ensuit qu'il agira encore positivement, c'est-à-dire, qu'il concourra avec celui du triangle *LED*, pour rétablir le corps dans la situation droite. Donc la somme des moments qui agissent sur $GBL = \pm HP\sin\Delta + m(\frac{1}{3}e+k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta + m(\frac{1}{3}e-k\sin\Delta)\frac{1}{8}e^2\sin\Delta$. Donc, &c.

On voit, d'après ce que nous venons de dire, que le corps a toujours de la stabilité, lorsque le centre de gravité tombe au-dessous du centre de volume, c'est-à-dire, qu'il ne peut manquer de revenir dans une situation droite, lorsqu'ayant reçu une inclinaison infiniment petite, il est abandonné à lui-même. Mais lorsque le centre de gravité est au-dessus de celui de volume, ce qui ne peut gueres manquer d'avoir lieu dans les Vaisseaux, le corps peut manquer de stabilité, selon la valeur du moment $-HP\sin\Delta$

*** La lettre *c* représente l'intervalle entre un triangle & le suivant, ou la hauteur des petits prismes triangulaires compris entre deux triangles consécutifs.

SCOLIE I.

(843) On a ſuppoſé dans le calcul que les deux lignes *AD*, *GL*, ſe coupent ſur la ligne *BE*, ce qui, pour l'ordinaire, n'arrivera pas ; mais, en ſuppoſant que l'inclinaiſon ſoit infiniment petite, on pourra faire cette ſuppoſition ſans erreur ſenſible ; & il eſt néceſſaire que l'inclinaiſon ſoit telle, pour qu'en général on puiſſe prendre *AG* & *DL* pour des lignes droites.

COROLLAIRE I.

(844.) Puiſqu'on vient de voir que, dans des inclinaiſons infiniment petites, le corps étant arrêté, le moment eſt $= (HP + \frac{m}{12}\int e^3c) \sin\Delta$: & ayant vu pareillement (835.) que ce moment eſt dans le même cas $= m\int cx(ydy - YdY) = hP$; on aura, par conſéquent, dans les inclinaiſons infiniment petites, $(HP + \frac{1}{12}\int e^3c)\sin\Delta = m\int cx(ydy - YdY) = hP = KP \sin\Delta$.

COROLLAIRE II.

(845.) Subſtituant cette valeur de $m\int cx(ydy - YdY)$ dans l'expreſſion du moment, lorſque le corps eſt en mouvement, ce moment ſera encore exprimé dans le cas des inclinaiſons infiniment petites, par $(PH + \frac{1}{12}\int e^3c) \sin\Delta + \frac{1}{4} mu\int cx^{\frac{1}{2}}(ydy \sin\theta + YdY \sin\Theta) + \frac{1}{64} mu^2\int c(ydy \sin\theta^2 - YdY \sin\Theta^2) + \frac{1}{4} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x)(\sin\theta + \sin\Theta) + \frac{1}{64} mu^2\int cdx(k - x)(\sin\theta^2 - \sin\Theta^2)$.

COROLLAIRE III.

(846.) Comme on ſuppoſe le corps compoſé de deux moitiés égales & ſemblables, & que les inclinaiſons ſont infiniment petites ; le troiſieme & le cinquieme terme de l'équation ci-deſſus peuvent être ſuppoſés égaux à zéro, ſans qu'il en réſulte aucune erreur ſenſible *; ce qui réduira le moment à $(HP + \frac{1}{12} m\int e^3c) \sin\Delta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} ydy \sin\theta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x) \sin\theta$; les moments qu'éprouve le corps étant exprimés par la quantité $\frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} ydy \sin\theta$, & . . . $\frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x) \sin\theta$, exprimant les moments horiſontaux.

---

* Ceci ſeroit rigoureuſement vrai, s'il n'y avoit point d'inclinaiſon, parce qu'alors $\sin\theta = \sin\Theta$ (660.) : mais on voit que ces ſinus doivent différer très-peu, puiſqu'on ſuppoſe l'inclinaiſon infiniment petite.

S c o l i e I I.

(847.) On doit ajouter à ces moments ceux qui résultent de la dénivellation, à moins qu'ils ne soient susceptibles d'être négligés. Il en est de même de ceux qui pourroient résulter de l'action des surfaces les unes sur les autres.

S c o l i e I I I.

(848.) MM. *Léonard Euler* & *Bouguer*, qui sont les Auteurs qui ont traité ce sujet avec le plus d'étendue, n'ont cependant calculé que les moments qui ont lieu dans le cas où le corps est en repos, ou lorsque $u = 0$. Les formules ci-dessus manifestent la différence qu'il peut y avoir d'un cas à l'autre. Dans le cas où le corps est en repos, le moment est seulement $= (HP + \frac{1}{12} m\int e^2 c) \sin \Delta$, & dans celui où le corps est en mouvement, il est $= \ldots\ldots$ $(PH + \frac{1}{12} m\int e^3 c) \sin \Delta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} y dy \sin \theta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx (k - x) \sin \theta$; u ayant une valeur un peu considérable, la différence entre ces deux expressions est très-grande.

P r o p o s i t i o n L X V I I I.

(849.) *Trouver les moments qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte sur un Fluide, ayant deux de ses côtés paralleles à l'horison, le parallélipipede se mouvant horisontalement, dans une direction parallele à deux de ses côtés verticaux.*

Le moment vertical qu'éprouvent les côtés verticaux est zéro, à cause que pour eux $dy = 0$. Le moment horisontal ..... $m\int cdx (k - x) (\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} u (\sin \theta + \sin \Theta) + \frac{1}{64} u^2 (\sin \theta^2 - \sin \Theta^2))$ se réduit à $m\int cdx (k - x) \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} u = mcu (\frac{1}{3} kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}})$, à cause que $\sin \theta = \sin \Theta = 1$. Les moments qu'éprouve la base sont zéro, parce que pour elle on a $dx = 0$, $\sin \theta = \sin \Theta = 0$, $y = Y$, & $dy = dY$. Enfin ceux qui proviennent de la dénivellation, sont, à cause de $dy = 0$, & de $\sin \theta = \sin \Theta = 1$, sont, dis-je, dans l'une & l'autre surface $= m\int cdx (k \pm x) (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u)^2$, & pour toutes les deux réunies, $= 2m\int cdxk (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u)^2 = 2mck (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} u + \frac{1}{64} u^2 x)$; expression qui se réduit à $\frac{mcku^4}{3 \cdot 64^2}$, en substituant $\frac{1}{8} u$ pour $x^{\frac{1}{2}}$ (594 & 831, *Not.*); de sorte que tous les moments qu'éprouve le parallélipipede, sont $= mc (\frac{1}{3} k (x^{\frac{3}{2}} u + \frac{u^4}{64^2}) - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} u)$, ou, en mettant a pour toute la hauteur

verticale submergée dans le Fluide, ces moments seront $= \ldots$ $mc(\frac{1}{3}k(a^{\frac{3}{2}}u + \frac{u^4}{64^2}) - \frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u)$.

COROLLAIRE I.

(850.) Puisque $mc\left(\frac{1}{3}k(a^{\frac{3}{2}}u + \frac{u^4}{64^2}) - \frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u\right)$ exprime les moments horisontaux, en les divisant par les résistances horisontales (840.) $\frac{1}{3}mc\left(a^{\frac{3}{2}}u + \frac{u^4}{64^2}\right)$, on aura la distance du centre de gravité à celui des résistances horisontales $= k - \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$, & par conséquent la distance de ce dernier centre à la superficie du Fluide $= \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$.

COROLLAIRE II.

(851.) Ces moments seront positifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en élevant son extrêmité choquante, si l'on a $k > \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$; au contraire, ils seront négatifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en abaissant son extrêmité choquante, si l'on a $k < \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$; enfin ces moments seront zéro, ou le parallélipipede demeurera dans la situation horisontale, si $k = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3}{64^2}\right)}$.

SCOLIE.

(852.) La dénivellation des deux côtés, choquant & choqué, altere les forces qui agissent sur la base du parallélipipede, & par conséquent la dénivellation produit des moments qui agissent sur cette base.

PROPOSITION LXIX.

(853.) *Trouver les moments qu'éprouve la base du même parallélipipede rectangle, & qui résultent des forces que lui communiquent les deux dénivellations.*

La force horisontale qui agit sur une différencielle de surface plane choquante, submergée dans le Fluide, cette force étant produite par la dénivellation d'une autre surface également choquante,

a

a été trouvée (700.) $= mcdx\left(\left(D+x\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(u \sin \Theta-\frac{x \cos s}{\sin s}\right)\right)^2$, $D+x$ exprimant la distance verticale de la différencielle à la superficie du Fluide, laquelle est $= a$ dans le cas présent ; $\sin \Theta$ étant le sinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la surface qui cause la dénivellation, lequel sinus est, dans notre cas, $= 1$; & $\frac{x \cos s}{\sin s}$ la distance horisontale de la différencielle à l'extrêmité de la surface ; distance que nous pouvons appeller y, de sorte qu'on aura $y=\frac{x \cos s}{\sin s}$, & $dx=\frac{dy \sin s}{\cos s}$. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on la réduit à $\frac{mcdy \sin s}{\cos s}\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(u-y)\right)^2$. Multipliant ensuite cette force horisontale par $\frac{\cos s}{\sin s}$ (580 & 613.) *, elle se transforme dans la force verticale, qui est par conséquent $= mcdy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(u-y)\right)^2$. Nommant maintenant e la longueur du parallélipipede, on aura $\frac{1}{2}e-y$, pour la distance de son centre à la verticale qui passe par la différencielle ; & par conséquent le moment que la différencielle éprouve sera $= mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(u-y)\right)^2$. Par la même raison, le moment qu'éprouvera une autre différencielle également éloignée de l'autre extrêmité de la base, à raison de la dénivellation sur la surface choquée, sera = ... $mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(u-y)\right)^2$. Or ce moment étant soustractif, tandis que l'autre est additif, le moment qui résulte des deux sera par conséquent $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}e-y\right)(u-y)dy$; quantité dont l'intégrale est $= \frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{4}ey-\frac{1}{2}uy+\frac{1}{3}y^2\right)$; ou, en faisant $y=u$ (597.), l'espace jusqu'où atteint la dénivellation n'étant pas plus grand que e, les moments qu'éprouve la base entiere, seront $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u^2\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}u\right)$.

COROLLAIRE I.

(854.) Ayant $u>e$, on doit faire, dans l'intégrale, $y=e$, & les moments qu'éprouve la base, deviendront $= \frac{1}{24}mca^{\frac{1}{2}}e^3$.

COROLLAIRE II.

(855.) Comme la vîtesse u n'entre pas dans l'expression de ces

* L'application des *Art.* cités au cas présent, paroîtra évidente, si l'on remarque, pour l'*Art.* 580, que $\sin \lambda = 1$ dans le cas dont il s'agit ici ; & pour l'*Art.* 613, que $dc = db$, & par conséquent $c = b$.

moments, il s'ensuit que u étant $= e$, les moments qu'éprouve la base ne peuvent pas augmenter, quelque augmentation qui survienne dans la vîtesse du parallélipipede.

Corollaire III.

(856.) La quantité e étant positive, aussi bien que $\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}u$, il s'ensuit que les moments qu'éprouve la base, dans un temps quelconque, seront positifs.

Corollaire IV.

(857.) Les moments qu'éprouve tout le parallélipipede seront donc exprimés par $mc(\frac{1}{3}k(a^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{64^2}u^4) - \frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}eu^2 - \frac{1}{3}u^3))$.

Corollaire V.

(858.) Ces moments seront positifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en élevant son extrêmité choquante, si l'on a $k > \frac{12a^{\frac{5}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2)}{20(a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64^2}u^3)}$; & au contraire, ils seront négatifs, & obligeront le parallélipipede à tourner en abaissant son extrêmité choquante, si l'on a $k < \frac{12a^{\frac{5}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2)}{20(a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64^2}u^3)}$ *.

Corollaire VI.

(859.) On voit que la quantité u venant à varier, les moments varient aussi, que le parallélipipede doit tourner, & que par conséquent les résistances varieront. Ainsi les résistances ne dépendront pas seulement de la vîtesse, mais encore de la disposition, ou de l'inclinaison que prend le parallélipipede.

Scolie I.

(860.) Tout ce qui précede suffit pour faire voir combien il est différent de considérer le corps sans mouvement horisontal, ou de le considérer quand ce mouvement existe. Dans le premier cas, le parallélipipede n'éprouve aucun moment, ou, pour en éprouver, il est nécessaire qu'il s'incline, en abaissant sa surface cho-

---

* On trouve ces expressions en divisant la somme des moments donnés dans l'*Art.* 857, par la somme des résistances, laquelle est toujours la même que celle qu'on a employée dans l'*Art.* 850, ainsi qu'on l'a démontré *Art.* 727; & on raisonnera d'ailleurs, comme on l'a fait dans l'*Art.* 851, pour distinguer le cas où ces moments sont positifs, ou négatifs.

quante. Dans le second cas, au contraire, non seulement le corps éprouve des moments, sans qu'il soit nécessaire qu'il s'incline, mais ces moments peuvent le faire tourner, en l'obligeant d'élever sa surface choquante, principalement lorsque k est $> \frac{1}{3}a$. PLANC. III.

SCOLIE II.

(861.) Par ce que nous venons de dire, on voit encore clairement la vérité de la remarque que nous avons faite, en passant, dans *l'Art.* 807. Le corps varie sa disposition, ses résistances variant pendant le mouvement ; & par conséquent les résistances ne demeurent pas constamment les mêmes que celles sur lesquelles nous avons fondé notre calcul, pour démontrer qu'il falloit au corps un temps infini pour acquérir sa plus grande vîtesse : ainsi cette démonstration ne peut point subsister en rigueur, & ce que nous avons établi à ce sujet n'est vrai qu'à peu près dans les petites vîtesses.

LEMME III.

(862.) *Si l'on éleve une perpendiculaire sur un petit quadrilateré parallele à l'axe horisontal de rotation, & si l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan vertical qui coïncide avec l'axe, l'expression* $\frac{r \sin x}{\sin n}$ *sera égale à la verticale comprise entre la perpendiculaire & l'axe.*

Que C soit un petit quadrilatere sur lequel on éleve la perpendiculaire CK, laquelle rencontre en K le plan vertical KO, qui coïncide avec l'axe O. Cela posé, il est clair que l'angle CKO est égal à celui que forme le petit quadrilatere avec l'horison, angle dont le sinus est $\sin n$, (569.). Pareillement $\sin x$ est le sinus de l'angle OCK, complément de celui que forme CO avec le petit quadrilatere (822, *Note*.). Ainsi nous aurons le sinus de $CKO = \sin n$, est au sinus de $OCK = \sin x$, comme $r = CO$, est à $KO = \frac{r \sin x}{\sin n}$. FIG. 61.

PROPOSITION LXX.

(863.) *Trouver les moments qu'éprouve le même parallélipipede rectangle, flottant comme on l'a dit ci-dessus, mais ayant sa base inclinée à l'horison, & les deux côtés de cette base qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement, étant paralleles au même horison.*

Soit $AKBF$ le parallélipipede, O son centre de gravité, & ED la superficie du Fluide. Soit mené LOM parallele aux côtés KA, FIG. 63.

BF, l'horiſontale AJ, & les verticales FQ, EG, & RON. Soit enfin $AF=e$, $AM=g$, $OM=n$, $EG=a$, l'angle de l'inclinaiſon $JAF=\Delta$, & $FQ=a+e\sin\Delta$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la ſurface choquante eſt $=\frac{mbrdx\sin z}{\sin\theta}(x+\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2)$ *. Or puiſque $HC=x$, & que CS eſt perpendiculaire à DF, on aura (862.) $OS=\frac{r\sin z}{\sin\theta}$; $DC=\frac{x}{\cos\Delta}$; $FD=\frac{a+e\sin\Delta}{\cos\Delta}$; $FC=\frac{a+e\sin\Delta-x}{\cos\Delta}$; $FC-OM=OV=\frac{a+e\sin\Delta-x}{\cos\Delta}-n$; & $OS=\frac{r\sin\theta}{\sin z}=\frac{a+e\sin\Delta-x}{\cos\Delta^2}-\frac{n}{\cos\Delta}$. Subſtituant cette derniere valeur de OS dans l'expreſſion du moment, elle devient $mbdx(\frac{a+e\sin\Delta-x}{\cos\Delta^2}-\frac{n}{\cos\Delta})(x+\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2)$; d'où l'on tire, en intégrant, & ſubſtituant, après l'intégration, $a+e\sin\Delta$ à la place de x, $\frac{mb(a+e\sin\Delta)^2}{\cos\Delta^2}(\frac{1}{6}(a+e\sin\Delta)+\frac{1}{15}u(a+e\sin\Delta)^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{2.64}u^2\cos\Delta^2)$ $-\frac{mbn(a+e\sin\Delta)}{\cos\Delta}(\frac{1}{2}(a+e\sin\Delta)+\frac{1}{6}u(a+e\sin\Delta)^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2)$: c'eſt l'expreſſion des moments qu'éprouve toute la ſurface choquante.

Les moments qu'éprouve la ſurface choquée, ſont les mêmes en changeant le ſigne de u, & ſuppoſant $e\sin\Delta=0$: ces moments ſeront donc $=\frac{mba^2}{\cos\Delta^2}(\frac{1}{6}a-\frac{1}{15}a^{\frac{1}{2}}u\cos\Delta+\frac{1}{2.64}u^2\cos\Delta^2)-$ . . . $\frac{mbna}{\cos\Delta}(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}ua^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}\cos\Delta^2)$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la baſe eſt $=$ . . . $\frac{mbr\sin z\,dx}{\sin\theta}(a+x-\frac{1}{4}u\sin\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{64}u^2\sin\Delta^2)$ (*Voyez* la Note de *l'Art.* 659.). Or, puiſque $ZY=x$, & que YW eſt perpendiculaire à AF, on aura (862.) $OW=\frac{r\sin z}{\sin\theta}$; $AY=\frac{x}{\sin\Delta}$; . . . . . . $MY=g-\frac{x}{\sin\Delta}$; & $OW=\frac{r\sin z}{\sin\theta}=\frac{g}{\sin\Delta}-\frac{x}{\sin\Delta^2}$; ce qui réduit le moment à $mbdx(\frac{g}{\sin\Delta}-\frac{x}{\sin\Delta^2})(a+x-\frac{1}{4}u\sin\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{64}u^2\sin\Delta^2)$; quantité dont l'intégrale, après avoir ſubſtitué $e\sin\Delta$ pour x, eſt $=$ $\frac{mbg}{\sin\Delta}(ae\sin\Delta+\frac{1}{2}e^2\sin\Delta^2-\frac{1}{6}u\sin\Delta((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}})+\frac{1}{64}u^2e\sin\Delta^3)-$ $\frac{mb}{\sin\Delta^2}\left(\frac{1}{2}ae^2\sin\Delta^2+\frac{1}{3}e^3\sin\Delta^3-\frac{1}{2}u\sin\Delta(a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{5}(a+e\sin\Delta)-\frac{1}{3}a)\right)$ $+\frac{mb}{\sin\Delta^2}(\frac{1}{15}ua^{\frac{5}{2}}\sin\Delta-\frac{1}{2.64}u^2e^2\sin\Delta^4)$.

* Car $\sin\theta=\cos\Delta$.

Les moments qu'éprouve une différencielle de la surface choquante, en vertu de la dénivellation, sont . . . . $mbdx\left(\frac{a+e\sin\Delta-x}{\cos\Delta^2}-\frac{n}{\cos\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2\right)$; & ceux qu'éprouve une différencielle de la surface choquée, sont $=$ . . . $mbdx\left(\frac{a-x}{\cos\Delta^2}-\frac{n}{\cos\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2\right)$: ces deux moments réunis seront donc $=$ . . . . $mbdx\left(\frac{2a+e\sin\Delta}{\cos\Delta^2}-\frac{2n}{\cos\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\cos\Delta+\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2\right)$*: quantité dont l'intégrale, après avoir substitué $\frac{1}{64}u^2\cos\Delta^2$ pour x, est $=$ . . . . . $\frac{mbu^4\cos\Delta^4}{6.64^2}\left(\frac{2a+e\sin\Delta}{\cos\Delta^2}-\frac{2n}{\cos\Delta}\right)$; c'est l'expression des moments provenants des deux dénivellations.

Si l'on ajoute maintenant ces moments avec ceux qu'éprouve la surface choquante, & si l'on soustrait de la somme ceux qu'éprouve la surface choquée, & ceux de la base, les moments qu'éprouvera tout le parallélipipede, seront exprimés par . . . .

$$mb\left\{\begin{array}{l}\frac{(a+e\sin\Delta)^3-a^3}{6.\cos\Delta^2}+\frac{u\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}\right)}{15\cos\Delta}+\frac{u^2\left((a+e\sin\Delta)^2-a^2\right)}{2.64}+\frac{u^4(2a+e\sin\Delta)\cos\Delta^2}{6.64^2}\\ -\frac{n\left((a+e\sin\Delta)^2-a^2\right)}{2\cos\Delta}-\frac{1}{6}nu\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{64}nu^2e\sin\Delta\cdot\cos\Delta-\frac{2nu^4\cos\Delta^3}{6.64^2}\\ -ge\left(a+\frac{1}{2}e\sin\Delta\right)+\frac{1}{6}gu\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{64}gu^2e\sin\Delta^2\\ +\frac{1}{2}e^2\left(a+\frac{2}{3}e\sin\Delta\right)-\frac{u(a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}}{2\sin\Delta}\left(\frac{1}{5}(a+e\sin\Delta)-\frac{1}{3}a\right)-\frac{ua^{\frac{5}{2}}}{15\sin\Delta}+\frac{u^2e^2\sin\Delta^2}{2.64}\end{array}\right.$$ **.

COROLLAIRE I.

(864.) Comme tous les termes qui sont affectés de n sont négatifs, il s'ensuit que moins cette quantité sera grande, ou plus le centre de gravité sera bas, plus les moments seront positifs, & par conséquent plus le parallélipipede élevera avec force son extrêmité choquante.

COROLLAIRE II.

(865.) Les moments seront positifs, ou négatifs, suivant la

---

* Il faut observer que dans l'expression des moments causés par la dénivellation, si l'on prend x positivement pour la surface choquante, il faut la prendre négativement pour la surface choquée, & réciproquement.

** Nous n'avons point développé les intégrations & les autres calculs que renferme cette *Proposition*, parce que nous sommes déjà entrés dans ces détails pour des calculs analogues. Les Commençants pourront s'exercer sur ceux-ci, qui n'ont d'autres difficultés que leur longueur. Nous nous contentons d'avoir corrigé quelques négligences typographiques qui se trouvent en cet endroit dans l'original.

PLANC. III. relation qui aura lieu entre les trois quantités, a, $\sin\Delta$, & u, lesquelles sont variables, & dépendent les unes des autres.

COROLLAIRE III.

(866.) Comme la quantité n ne se trouve dans aucun des moments qui proviennent de la base, il s'ensuit que, quoique le centre de gravité soit plus ou moins élevé, cela ne peut altérer aucunement ces moments.

COROLLAIRE IV.

(867.) Dans le premier instant de l'action, ou du mouvement du parallélipipede, $u = 0$, & les moments deviennent par conséquent $= mb\left(\frac{(a+e\sin\Delta)^3-a^3}{6\cos\Delta^2} - \frac{n((a+e\sin\Delta)^2-a^2)}{2\cos\Delta} - ge(a+\frac{1}{2}e\sin\Delta) + \frac{1}{2}e^2(a+\frac{1}{3}e\sin\Delta)\right)$ Donc, pour que, dès ce premier instant, les moments soient positifs, il est nécessaire qu'on ait $n < \frac{(a+e\sin\Delta)^3-a^3+ea(3e-6g)\cos\Delta^2+e^2(2e-3g)\sin\Delta.\cos\Delta^2}{3((a+e\sin\Delta)^2-a^2)\cos\Delta}$.

SCOLIE.

(868.) De même qu'on a calculé les effets que les dénivellations produisent dans la base du parallélipipede, dans le cas où on le supposoit horisontal, on peut pareillement les calculer, dans le cas où le corps seroit incliné; mais comme le calcul est long & pénible, & que d'ailleurs il n'est pas nécessaire pour remplir notre objet, nous avons cru pouvoir nous dispenser de le donner ici.

PROPOSITION LXXI.

(869.) *Trouver les moments qu'éprouve un cylindre qui flotte, & qui se meut horisontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.*

Soit $BQDE$ le cylindre, H son axe, & O son centre de gravité. Soit GI la superficie du Fluide, BE un diametre horisontal, FIG. 62. & les lignes CL, HQ & OK, des droites verticales. Soit tiré la ligne HOD, & faisant $CH = R$, $OH = K$, $CA = x$, $AL = f$, & l'angle $HOK = \Delta$, on aura $CL = x+f$; $HL = \sqrt{R^2-(x+f)^2}$; $FO = K\cos\Delta$; $NO = k = K\cos\Delta - f$; $HF = K\sin\Delta$; $KF = \frac{K\sin\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{KF}{HF} = \frac{x+f}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$; $\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{R}$; & $LH+HF = y = \sqrt{R^2-(x+f)^2} + K\sin\Delta$: ce qui donne $\frac{ydy}{dx} = x+f+\frac{K\sin\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$. Ces valeurs étant substituées dans la for-

mule des moments qui (830.) est $mc\left(\frac{ydy}{dx}+k-x\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{udx}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2 dx$,
elle deviendra $mcK\left(cos\,\Delta\pm\frac{(x+f)\,sin\,\Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{u\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{8K}\right)^2 dx$;
le signe — ayant lieu pour la partie chequée, puisque, pour cette partie, la quantité $KF=\frac{K\,(x+f)\,sin\,\Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$ est négative. Soustrayant maintenant le moment de la partie choquée, de celui de la partie choquante, & intégrant, on trouvera, pour l'expression des moments qu'éprouve tout le cylindre, la quantité $\frac{mcKu\,cos\,\Delta}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}+\ldots$
$2mcK\,sin\,\Delta\left(\int\frac{(x+f)\,xdx}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x+f)\,dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(870.) La quantité $\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}$ est (663.) l'expression de la résistance horisontale qu'éprouve le cylindre; & $2mc\left(\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x\pm f)dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}\right)$, (637.), est l'expression de la force, ou résistance verticale: si nous appellons N la premiere de ces résistances, & Q la seconde, les moments qu'éprouve le cylindre deviendront $=NK\,cos\,\Delta+QK\,sin\,\Delta=K\,(N\,cos\,\Delta+Q\,sin\,\Delta)$.

COROLLAIRE II.

(871.) Si l'on avoit $u=0$, le moment qu'éprouveroit tout le cylindre, seroit $=2mcK\,sin\,\Delta\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$, ou, parce que . . $2\,mc\int\frac{(x\pm f)\,xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$ exprime, dans ce cas, la force verticale qu'éprouve le même cylindre, laquelle force est égale à son poids (561 & 562.), si nous appellons P le poids du cylindre, le moment que ce corps éprouvera, lorsque $u=0$, sera $=PK\,sin\,\Delta$, comme on l'a dit ci-dessus, *Art.* 838.

SCOLIE.

(872.) Quoique dans le calcul qu'on vient de faire des moments qu'éprouve le cylindre, on n'ait pas fait mention de ceux qui proviennent de la dénivellation, ils ne laissent pas pour cela d'être compris dans l'expression $K\,(N\,cos\,\Delta+Q\,sin\,\Delta)$. La formule de ces moments est $mc\int\frac{r\,sin\,n}{sin\,n}dx\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sin\,n+\frac{1}{64}u^2\,sin\,n^2\right)$ *, tant pour

* Car $sin\,\theta=sin\,n$ dans le cas dont il est ici question (584 & 586.).

ceux de la surface choquante que pour ceux de la surface choquée, parce qu'ils sont positifs dans les deux surfaces (823, *Note.*). Substituant dans cette formule, à la place de $\frac{r\, fin\, u}{fin\, n} = KO$ (862.) $= FO \pm FK$, sa valeur $K cos\Delta \pm \frac{K\, fin\, \Delta\, (x \pm f)}{\sqrt{K^2 - (x \pm f)^2}}$; & prenant la somme des moments pour les deux surfaces, les moments effectifs seront $= \ldots$ $2mcK\, cos\Delta\, fdx\, (x - \frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\, fin\, n + \frac{1}{64}u^2\, fin\, n^2)$: mais la résistance horisontale que produit la dénivellation, est aussi $= \ldots\ldots\ldots$ $2mcfdx\, (x - \frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\, fin\, n + \frac{1}{64}u^2\, fin\, n^2)$: donc la résistance horisontale N n'est pas seulement égale à la premiere quantité $\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{K^2 - (x \pm f)^2}$; mais à cette quantité plus $2mcfdx(x - \frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}} fin\, n + \frac{1}{64}u^2\, fin\, n^2)$. Par conséquent, N exprimant la résistance horisontale totale qu'éprouve le cylindre, les moments qui résultent de la dénivellation seront compris dans l'expression $K\,(N\, cos\Delta + Q\, fin\, \Delta)$.

CHAPITRE XI.

De l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.

PROPOSITION LXXII.

(873.) TROUVER *l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.*

L'inclinaison n'est autre chose que la situation dans laquelle se trouve le corps à l'égard de la verticale, lorsqu'il cesse déjà de tourner sur un axe horisontal, étant poussé par une, ou par plusieurs puissances, à cause que, dans cette situation, les moments des puissances font équilibre à ceux des résistances du Fluide. Il n'est donc question que de trouver les uns & les autres moments, par ce qu'on a dit dans les *Chapitres* précédents, ou par les *Propositions* qui suivent; égalant ensuite leur somme à zéro, on déduira, de l'équation qui en résultera, l'inclinaison que prendra le corps.

PROPOSITION LXXIII.

(874.) *Trouver le moment avec lequel agit un poids qu'on ajoute*

à

à un corps flottant, ce poids étant placé dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité. PLANC. III.

Que π soit le poids qu'on suppose placé dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité O. Que p soit la perpendiculaire πX au plan qui coïncide avec l'axe, & avec les centres de gravité & de volume ; & soit enfin $OX = q$. Cela posé, πR, perpendiculaire au plan vertical qui coïncide avec l'axe, sera $= q \sin \Delta + p \cos \Delta$, Δ exprimant l'angle de l'inclinaison ROX que prend le corps, & le moment du poids sera par conséquent $= \pi\,(q \sin \Delta + p \cos \Delta)$ *. FIG. 89.

S C O L I E.

(875.) On suppose que l'axe de rotation est horisontal, & que le corps a toute la régularité nécessaire, pour qu'après s'être incliné, l'axe se conserve de la même maniere, c'est-à-dire, dans sa situation horisontale; sans cela, il faut avoir égard à une nouvelle inclinaison perpendiculaire à la premiere.

C O R O L L A I R E I.

(876) Si l'on ajoutoit au corps différents poids π, chacun d'eux en particulier produiroit le moment $\pi(q \sin \Delta + p \cos \Delta)$; & la somme de tous ces moments seroit le moment total qui agit sur le corps.

C O R O L L A I R E II.

(877.) Si, au lieu d'ajouter un poids π, on le retranchoit, alors π seroit négatif, & son moment seroit $= -\pi\,(q \sin \Delta + p \cos \Delta)$.

C O R O L L A I R E III.

(878.) Si en même temps on retranchoit un poids π de la partie opposée à l'axe de rotation, p seroit négatif, & le moment seroit $= -\pi\,(q \sin \Delta - p \cos \Delta) = \pi\,(p \cos \Delta - q \sin \Delta)$, moment qui est positif dans le cas où $p \cos \Delta > q \sin \Delta$.

---

* Car l'angle $Xn\pi$ est le complément de l'angle d'inclinaison ROX : ainsi la ligne $\pi n = \frac{p}{\cos \Delta}$, & $Xn = \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$. Retranchant Xn de OX, il reste $On = q - \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$, & par conséquent $Rn = q \sin \Delta - \frac{p \sin \Delta^2}{\cos \Delta}$. Donc $\pi R = Rn + \pi n = q \sin \Delta - \frac{p \sin \Delta^2}{\cos \Delta} + \frac{p}{\cos \Delta} = \frac{q \sin \Delta . \cos \Delta + p(1 - \sin \Delta^2)}{\cos \Delta}$; mais $1 - \sin \Delta^2 = \cos \Delta^2$; substituant donc cette valeur, on aura $\pi R = q \sin \Delta + p \cos \Delta$.

COROLLAIRE IV.

(879.) Si le poids qu'on retranche d'un côté, étoit transporté au côté opposé, & placé à une même distance q de l'axe, les moments seroient $\pi(q\,\text{sin}\,\Delta + p\,\text{cos}\,\Delta) - \pi(q\,\text{sin}\,\Delta - \Pi\,\text{cos}\,\Delta) = (p + \Pi)\pi\,\text{cos}\,\Delta$; c'est-à-dire que le moment seroit égal au produit du poids π par le cosinus de l'inclinaison, & par la distance horisontale $p + \Pi$, du point d'où l'on a ôté le poids jusqu'à celui où on l'a placé.

COROLLAIRE V.

(880.) Si l'inclinaison étoit très-petite, le même moment seroit $= \pi(p + \Pi)$; c'est-à-dire qu'il seroit égal au produit du poids π, par la distance $p + \Pi$ à laquelle on l'auroit transporté.

COROLLAIRE VI.

(881.) Si p & π demeurant positifs, on avoit q négatif; c'est-à-dire, si on plaçoit le poids π au-dessous du plan horisontal qui coïncide avec l'axe, le moment seroit $= \pi(p\,\text{cos}\,\Delta - q\,\text{sin}\,\Delta)$.

COROLLAIRE VII.

(882.) Si, de plus, on avoit $p = 0$, le moment se réduiroit à $-\pi q\,\text{sin}\,\Delta$: donc tout poids placé au-dessous du centre de gravité, dans le plan qui passe par l'axe & par les centres de gravité & de grandeur, résiste à l'inclinaison dans la raison de $\pi q\,\text{sin}\,\Delta$.

COROLLAIRE VIII.

(883.) Si au contraire on ôtoit le poids, le moment seroit $= \pi q\,\text{sin}\,\Delta$, & il contribueroit à l'accroissement de l'inclinaison dans la raison de $\pi q\,\text{sin}\,\Delta$.

PROPOSITION LXXIV.

(884.) *Trouver l'inclinaison que prendra un parallélipipede rectangle, flottant sur un Fluide avec sa base parallele à l'horison, auquel on ajoute un nouveau poids dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à deux de ses côtés, & qui passe par le centre de gravité.*

Puisqu'on suppose, dans ce cas, que le parallélipipede est sans mouvement, on a $n = 0$. Les moments se réduiront donc (867.) à

$$mb\left(\frac{(a + e\,\text{sin}\,\Delta)^3 - a^3}{6\,\text{cos}\,\Delta^2} - \frac{n((a + e\,\text{sin}\,\Delta)^2 - a^2)}{2\,\text{cos}\,\Delta} - ge(a + \tfrac{1}{2}e\,\text{sin}\,\Delta) + \tfrac{1}{2}e^2(a + \tfrac{2}{3}e\,\text{sin}\,\Delta)\right),$$

& l'on aura $\pi(q\,\text{sin}\,\Delta + p\,\text{cos}\,\Delta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$mb\left(\frac{(a+e\sin\Delta)^3-a^3}{6\cos\Delta^2}-\frac{n((a+e\sin\Delta)^2-a^2)}{2\cos\Delta}-ge(a+\frac{1}{2}e\sin\Delta)+\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e\sin\Delta)\right)$; ou, parce que, dans ce cas, $g=\frac{1}{2}e$, $\pi(q\sin\Delta+p\cos\Delta)=$ $mb\left(\frac{(a+e\sin\Delta)^3-a^3}{6\cos\Delta^2}-\frac{n((a+e\sin\Delta)^2-a^2)}{2\cos\Delta}+\frac{1}{12}e^3\sin\Delta\right)$. La force verticale qui agit sur le parallélipipede est (561.) $=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\sin\Delta}{\cos\Delta}\right)$ *; qui, en supposant que P exprime le poids total du parallélipipede, sera $P+\pi=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\sin\Delta}{\cos\Delta}\right)$, qui donne $a=\frac{(P+\pi)\cos\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\sin\Delta$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle se réduit à $\pi(q\sin\Delta+p\cos\Delta)=mbe\sin\Delta\left(\frac{P^2}{2m^2b^2e^2}-\frac{nP}{mbe}+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2\sin\Delta^2}{24\cos\Delta^2}\right)$**.

Si l'on suppose que a soit la hauteur verticale dont le parallélipipede étoit enfoncé dans le Fluide, avant qu'on y ajoutât le poids π***, ou lorsque sa base étoit dans une situation horisontale; comme, dans ce cas, $P=mbea$, on aura . . . . $\pi(q\sin\Delta+p\cos\Delta)=mbe\sin\Delta\left(\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2\sin\Delta^2}{24\cos\Delta^2}\right)$, ou $\frac{\pi p\cos\Delta}{mbe\sin\Delta}-\frac{e^2\sin\Delta^2}{24\cos\Delta^2}=\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}$. Si l'on fait maintenant $\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}=\pm A^2$, & $x=\frac{e\sin\Delta}{\cos\Delta}=FJ$, on aura $\frac{\pi p}{mbx}-\frac{1}{24}x^2=\pm A^2$; ce qui donne $x^3\pm 24A^2x-\frac{24\pi p}{mb}=0$. Cette équation étant résolue par les regles de l'algebre commune, donnera la valeur de x, & par conséquent de l'inclinaison que prendra le parallélipipede ****.

* Car le poids du volume de Fluide que déplace le parallélipipede est $=mb.\left(\frac{AE+FD}{2}\right)AF$; quantité qui devient celle de l'Auteur, en substituant pour AE, FD & AF leur valeur (561.).

** On remarquera que l'Auteur n'a pas substitué la valeur entiere de a; mais seulement $a=\frac{P\cos\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\sin\Delta$, en négligeant le terme $\frac{\pi\cos\Delta}{mbe}$, qui contient le poids additionnel π multiplié par le cosinus de l'inclinaison, & divisé par mbe, comme étant très-petit par rapport aux autres. Au reste, toute difficulté disparoîtra, si l'on conçoit que P représente non seulement le poids total primitif du parallélipipede, mais ce poids augmenté de π: car alors $a=\frac{P\cos\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\sin\Delta$, comme l'Auteur l'a fait dans la substitution. Il nous paroît que c'est ainsi qu'on doit considérer P.

*** Conformément à la Note précédente, a doit représenter la hauteur verticale dont le parallélipipede seroit submergé, même après l'addition du poids π, en supposant la base du parallélipipede horisontale, & par conséquent π placé au centre de gravité, ou dans la verticale qui passe par ce centre. Cette distance a ne peut être supposée égale à celle qui auroit lieu avant l'addition de π, qu'en considérant π comme une différencielle du poids total du parallélipipede.

**** Car $x=\frac{e\sin\Delta}{\cos\Delta}=e\tang\Delta$: donc $\tang\Delta=\frac{x}{e}$.

Corollaire I.

(885.) Si A^2 étoit positif, ou si, étant négatif, on avoit $(8A^2)^3$ moindre que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, l'équation auroit deux racines imaginaires, & par conséquent une seule réelle, qui seroit = ...

$$\left(\frac{12\pi p}{mb}+\left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2 \pm (8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \mp \frac{8A^2}{\left(\frac{12\pi p}{mb}+\left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2 \pm (8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} \text{ *;}$$

racine qui indique la disposition unique du parallélipipede, ou l'inclinaison qu'il doit prendre; le signe supérieur ayant lieu lorsque A^2 est positif, & l'inférieur lorsqu'il est négatif.

Corollaire II.

(886.) Lorsque A^2 est négatif, si l'on avoit en même temps $(8A^2)^3$ plus grand que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, l'équation auroit ses trois racines réelles **; & par conséquent le parallélipipede pourroit prendre trois dispositions, ou inclinaisons différentes.

Scolie I.

(887.) Comme la formule $x^3 \pm 24A^2x - \frac{24\pi p}{mb}$, est l'expression de la somme des moments, toutes les fois que ces moments sont positifs, leur effet se dirige pour soutenir, pour redresser, ou pour s'opposer à l'inclinaison du parallélipipede; en un mot, leur effet est alors de le rendre plus stable. Au contraire, lorsque ces moments sont négatifs, ils tendent à le faire tomber davantage, ou à l'incliner de plus en plus. Les racines de l'équation sont donc les limites de ces moments positifs ou négatifs; & par conséquent toutes les fois que le parallélipipede ira en s'inclinant, & qu'on passera d'une racine à une autre, on passera également des moments positifs aux négatifs, ou, au contraire, des négatifs aux positifs. Si les moments sont négatifs, lorsque le parallélipipede va en s'inclinant, pour prendre la situation correspondante à la premiere racine; ils deviendront positifs, lorsque le parallélipipede passera à la situation correspondante à la seconde racine, & ainsi de suite.

---

* *Voyez*, pour la démonstration, la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 195 & 197. Avec une légere habitude du calcul, on verra facilement l'identité de la seconde partie de cette racine, avec celle qu'on trouve à l'*Art.* 195 de l'Ouvrage cité.

** Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 198.

COROLLAIRE III.

(888.) Avant que le parallélipipede s'établisse dans la situation correspondante à la premiere racine, les moments sont négatifs ; car, en faisant $x = 0$ dans la formule qui exprime ces moments, elle se trouve réduite à $-\frac{24\pi p}{mb}$.

COROLLAIRE IV.

(889.) Le parallélipipede doit donc s'incliner jusqu'à ce qu'il ait pris la situation correspondante à la premiere racine; & il ne peut passer à la situation qui correspond à la seconde, sans qu'une autre force étrangere, quelle qu'elle soit, ne détruise & surmonte l'effet des moments positifs qui s'y opposent, & ne les rende par conséquent négatifs.

SCOLIE II.

(890.) Le parallélipipede ne peut se rétablir dans la situation correspondante à la seconde racine, s'il en est tiré par l'action de quelque force étrangere. Car si cette force l'oblige à se mettre plus vertical, les moments deviendront positifs, & par conséquent il continuera à se mettre de plus en plus vertical jusqu'à ce qu'il ait atteint la situation qui correspond à la premiere racine : & si elle l'oblige, au contraire, à se mettre moins vertical, les moments deviendront négatifs, & conséquemment le parallélipipede continuera de s'incliner de plus en plus.

COROLLAIRE V.

(891.) La stabilité, ou la conservation des forces du parallélipipede pour se maintenir sans tomber entiérement, consiste en ce qu'aucune force étrangere ne soit capable de l'incliner jusqu'à le faire passer au-delà de la situation correspondante à la seconde racine.

COROLLAIRE VI.

(892.) Si l'on avoit π, ou $p = 0$, l'équation deviendroit $x^3 \pm 24A^2x = 0$, dont la premiere racine est $x = 0$: donc le parallélipipede doit se maintenir droit, ou vertical, sur le Fluide, à moins que quelque force étrangere ne surmonte les moments positifs dont l'effet se manifesteroit dans l'inclinaison.

COROLLAIRE VII.

(893.) Les deux autres racines de l'équation $x^3 \pm 24A^2 x = 0$,

ſont $x = 2A\sqrt{\mp 6}$, qui ſont imaginaires, lorſque A^2 eſt poſitif : d'où il paroît qu'on devroit inférer que, dans ce cas, les moments qu'éprouvera le parallélipipede dans ſon inclinaiſon, à quelque degré qu'elle parvienne, ſeront toujours poſitifs.

SCOLIE III.

(894.) Ce *Corollaire* ſeroit généralement vrai, ſi le cas où l'angle *A* de la baſe ſort du Fluide, ne pouvoit pas arriver : dans ce cas, les moments, ainſi que la force verticale qui agit ſur le parallélipipede, ne ſont plus les mêmes ; & par conſéquent il en réſulte une équation différente, & particuliere à ce cas ; équation qui, comme on le verra, produit plus de racines que celle que nous avons premiérement trouvée. Comme M. *Bouguer*, dans ſon *Traité du Navire*, n'examine la ſtabilité que dans les inclinaiſons infiniment petites, il pourroit paroître qu'il admet la généralité du *Corollaire*, puiſqu'il recommande qu'on ait ſoin que le ſigne du ſecond terme ne ſoit pas négatif, afin que les moments ſoient toujours poſitifs, & qu'à leur moyen, le parallélipipede ſe redreſſe, ou ſoit ſtable. Nous n'inſiſterons pas ſur ce que ces moments ne peuvent être négatifs que lorſque la totalité de la formule $x^3 \pm 24A^2x$ eſt négative, & non pas ſeulement lorſque ſon ſecond terme eſt négatif ; parce que l'Auteur ſe bornant à la conſidération des inclinaiſons infiniment petites, regarde comme négligeable le premier terme x^3. Or, pour que le ſecond terme $24A^2x$ ne ſoit pas négatif, il ſuffit que A^2, ou ſa valeur $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2 - \frac{\pi q}{mbe}$ ne le ſoit pas, ou à cauſe que M. *Bouguer* ſuppoſe $\pi = 0$, il ſuffit que la quantité $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2$ ne ſoit pas négative. De là il déduit que toutes les fois qu'on n'aura pas $n > \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, ou qu'on aura ſoin que le centre de gravité ne ſoit pas plus haut que $\frac{1}{2}a^2 + \frac{e^2}{12a}$, on pourra être aſſuré de la ſtabilité du parallélipipede. Il ajoute, en même temps, que cette quantité exprimant la hauteur à laquelle le centre de gravité peut être placé ſans riſque, on peut, avec raiſon, donner le nom de *Métacentre* au point qui la termine.

L'erreur à laquelle peut conduire cette concluſion de M. *Bouguer*, en ne conſidérant pas les choſes avec le ſoin qu'il recommande, eſt palpable ; car l'expreſſion $\frac{e^2}{12a}$ fait voir clairement que plus a ſera petit, plus la hauteur du Métacentre ſera grande, & par conſéquent

la ſtabilité du parallélipipede : de ſorte que ſi *a* devenoit infiniment petite, on pourroit placer le centre de gravité à une hauteur infinie, ſans que le parallélipipede perdît rien de ſa ſtabilité ; conſéquence dont chacun peut appercevoir l'abſurdité à la premiere vue. Cependant la conſéquence dont il s'agit ici eſt certaine, lorſque les angles de la baſe ne ſortent pas du Fluide, & c'eſt ſur cette ſuppoſition que l'Auteur a fondé ſon raiſonnement. Mais lorſque *a* eſt fort petite, il eſt ſi facile que les angles de la baſe ſortent du Fluide, quoiqu'on ſuppoſe l'inclinaiſon infiniment petite, qu'on reconnoit clairement l'erreur dans laquelle on peut tomber. PLANC. IV.

Cette erreur n'a pas ſeulement lieu dans le cas du parallélipipede, elle s'étend aux autres corps, parce que le défaut vient de la ſuppoſition qu'on fait en ſe bornant à l'examen des ſeules inclinaiſons infiniment petites, qui eſt que la ſection de la ſuperficie du Fluide, ainſi que le plan qui coïncide avec l'axe, & diviſe le corps en deux parties égales, ſont toujours les mêmes ; ce qui eſt très-éloigné d'être certain, lorſque le corps occupe peu d'eſpace dans le Fluide, & que la puiſſance π qui agit ſur lui, eſt très-conſidérable ; car la même puiſſance qui ne produit qu'une inclinaiſon infiniment petite, quand le corps occupe beaucoup d'eſpace dans le Fluide, en produira une très-ſenſible, lorſqu'il en occupe peu ; & dans ce cas, la ſuppoſition qu'on fait, que l'inclinaiſon eſt infiniment petite, eſt fauſſe, quelque petite qu'on ſuppoſe la puiſſance. A tout cela on doit ajouter que le poids du corps varie de la quantité π, & cette différence, à laquelle on n'a jamais fait attention, eſt d'autant plus conſidérable, que le poids du corps eſt plus petit.

PROPOSITION LXXV.

(895.) *Trouver l'inclinaiſon que prendra le même parallélipipede rectangle, lorſque quelqu'un de ſes angles de la baſe ſortira du Fluide.*

Les moments qu'éprouve le parallélipipede ſont (867.) = FIG. 75.
$mb\left(\frac{(a+e\,\text{ſin}\,\Delta)^3-a^3}{6\,\text{coſ}\,\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\text{ſin}\,\Delta)^2-a^2)}{2\,\text{coſ}\,\Delta}\right)+$ . . . . $mb\left(e(g-e)(a+\tfrac{1}{2}e\,\text{ſin}\,\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\,\text{ſin}\,\Delta)\right)$* ; mais, à cauſe que, dans ce cas, $e=EF$, $g=FM$, & $a=0$, ces moments ſe réduiſent à $mb\left(\frac{e^3\,\text{ſin}\,\Delta^3}{6\,\text{coſ}\,\Delta^2}-\frac{ne^2\,\text{ſin}\,\Delta^2}{2\,\text{coſ}\,\Delta}+\tfrac{1}{2}ge^2\,\text{ſin}\,\Delta-\tfrac{1}{6}e^3\,\text{ſin}\,\Delta\right)$. La

* Voyez le *Scolie* ſuivant, *Art.* 896, & la *Note* qui l'accompagne.

force verticale qui agit sur le parallélipipede, est (561.) $= \ldots$ $\frac{1}{2}mbe.DF = P+\pi$, ou, en nommant z la ligne DF, $\frac{1}{2}mbez = P+\pi$; ce qui donne $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{2}mbz}$, & $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{z}{e} = \frac{\frac{1}{2}mbz^2}{P+\pi}$. Nous aurons donc

$$\pi(q\sin\Delta + p\cos\Delta) = mb\left(\frac{e^3\sin\Delta^3}{6\cos\Delta^2} - \frac{ne^2\sin\Delta^2}{2\cos\Delta} + \frac{1}{2}ge^2\sin\Delta + \frac{1}{6}e^3\sin\Delta\right),$$

ou, en divisant par $\sin\Delta$, & substituant les valeurs de e & de $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$,

$$\pi\left(q + \frac{p(P+\pi)}{\frac{1}{2}mbz^2}\right) = mb\left(\frac{(P+\pi)z}{3mb} - \frac{n(P+\pi)}{mb} + \frac{g(P+\pi)^2}{\frac{1}{4}m^2b^2z^2} - \frac{(P+\pi)^3}{\frac{3}{4}m^3b^3z^3}\right)$$: équation qui donne en réduisant

$$\left.\begin{array}{l} z^4 - 3nz^3 + \frac{6g(P+\pi)z}{mb} - \frac{4(R+\pi)^2}{m^2b^2} \\ - \frac{3\pi qz^3}{P+\pi} - \frac{6p\pi z}{mb} \end{array}\right\} = 0.$$

Ayant trouvé la valeur de z par cette équation, on aura celle de $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{2}mbz}$, & par conséquent les deux points D & E, qui donnent la position de la superficie du Fluide, & par conséquent l'inclinaison du parallélipipede.

Scolie I.

(896.) Les moments que la base éprouve dans le cas présent, ne sont pas les mêmes que ceux qu'elle éprouve dans le précédent. Pour les moments du cas précédent, on a (863.) $r\sin x = g - \frac{x}{\sin\Delta}$ & pour ceux dont il est ici question, à cause de $e < 2g$, on a $r\sin x = g - \frac{x}{\sin\Delta} - (2g - e) = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$ *. Mettant donc dans la formule $mb\left(ge\left(a + \frac{1}{2}e\sin\Delta\right) - \frac{1}{2}e^2\left(a + \frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$, qui exprime les moments du cas précédent, $e - g$ pour g seul, nous aurons l'expression des moments pour le cas présent $= \ldots\ldots$ $mb\left(e(e-g)\left(a + \frac{1}{2}e\sin\Delta\right) - \frac{1}{2}e^2\left(a + \frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$; ou, à cause qu'ils sont négatifs, $mb\left(e(g-e)\left(a + \frac{1}{2}e\sin\Delta\right) + \frac{1}{2}e^2\left(a + \frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$, comme nous l'avons supposé (895).

* Car $EY = \frac{x}{\sin\Delta}$, & par conséquent $YM = AM - EY - AE = g - \frac{x}{\sin\Delta} - AE$: or $AE = AF - EF = 2g - e$, donc $YM = g - \frac{x}{\sin\Delta} - (2g - e) = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$: donc enfin OW, ou $\frac{r\sin x}{\sin\pi} = \frac{e-g}{\sin\Delta} - \frac{x}{\sin\Delta^2}$; d'où l'on tire $r\sin x = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$, à cause que $\sin\pi = \sin\Delta$.

Corollaire.

COROLLAIRE.

(897.) Si l'on avoit $\pi = 0$, l'équation se réduiroit à $z^4 - 3nz^3 + \frac{6gPz}{mb} - \frac{4P^2}{m^2b^2} = 0$; ou en substituant pour P sa valeur $2mbga$, & mettant, comme ci-dessus, e pour toute la longueur $2g$ de la base, on aura $z^4 - 3nz^3 + 3e^2az - 4e^2a^2 = 0$ *.

SCOLIE II.

(898.) Supposant que la stabilité du parallélipipede doive se conserver lorsqu'on a $n < \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, faisons $n = \frac{e^2}{12a}$; & , pour simplifier l'équation, faisons $e = 12a$, elle se réduira à $z^4 - 36az^3 + 432a^3z - 576a^4 = 0$. La plus petite racine de cette équation est moindre que $2a$ ** ; & comme il faut que z devienne $= 2a$, pour que l'angle de la base commence à sortir du Fluide, il est clair que cette plus petite racine ne peut être d'aucune utilité pour notre objet ***. La seconde racine est à très-peu-près, $z = \frac{24}{10}a$, & encore cette quantité $\frac{24}{10}a$ est un peu moindre que la vraie racine ; de sorte qu'en la substituant dans l'équation à la place de z, l'expression qui en résulte est négative. Ceci prouve que si quelque force étrangere oblige le parallélipipede à s'incliner de façon qu'un de ses côtés soit submergé de $\frac{24}{10}a$, ou, ce qui est équivalent, de façon qu'elle l'oblige à s'incliner de $13^\circ\frac{1}{2}$ ****, le parallélipipede tombera tout-à-coup, en continuant de s'incliner jusqu'à ce qu'il ait atteint la position qui correspond à la quatrieme racine, parce que la troisieme étant négative, elle ne peut nullement servir pour ce cas. Cette quatrieme racine est à peu près $z = 35a$, & équivaut à une

---

* En suivant toujours l'esprit de la deuxieme & troisieme note de l'*Art.* 884, il ne seroit pas nécessaire d'anéantir le poids π pour parvenir à la même équation, il suffiroit de le supposer placé au centre de gravité ; car alors les quantités p & q sont chacune $= 0$, & $P + \pi = 2m'g$, ou $= mbea$.
On voit, sans peine, que a exprime ici la profondeur verticale dont le parallélipipede est submergé dans le Fluide, lorsqu'il est dans une situation horisontale (884.).

** Les plus legeres notions de l'Algebre commune suffisent pour trouver ces racines. On suivra la méthode d'approximation qui est exposée à l'*Art.* 226 de la troisieme partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*.

*** Car, lorsque l'angle de la base commence à sortir du Fluide, on a, dans la supposition présente de $e = 12a$, $z = 12a\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$; mais $\cos\Delta : \sin\Delta :: 6 : 1$, donc $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{1}{6}$, & par conséquent $z = 2a$.

**** Pour trouver cette inclinaison, il faut se rappeller que l'angle de la base étant hors du Fluide, la quantité $e = EF$, n'est plus $= 2g = 12a$. Pour en trouver la valeur, il faut avoir Fig. 75.

inclinaiſon de plus de 88° à peu près : donc, quand une puiſſance étrangere fera incliner le parallélipipede de $13°\frac{1}{2}$, il tombera tout-à-coup juſqu'à l'inclinaiſon de 88°. On voit donc par-là combien ce corps eſt éloigné de conſerver ſa ſtabilité. On trouveroit encore de plus grandes différences, en ſuppoſant a plus petite ; mais il ſuffit, pour notre objet, de comprendre que la ſureté, ou la conſervation de la ſtabilité ne peut être fondée que ſur la ſuppoſition que les puiſſances étrangeres ne puiſſent donner au corps une inclinaiſon plus grande que celle qui correſpond à la ſeconde racine : cette limite étant paſſée, la ſtabilité ſe perd entiérement, & le corps prend une inclinaiſon preſque totale.

PROPOSITION LXXVI.

(899.) *Trouver l'inclinaiſon que prendra un corps quelconque, flottant ſur un Fluide, ſi on lui ajoute un nouveau poid dans un point déterminé du plan vertical, perpendiculaire à l'axe de rotation, qui paſſe par le centre de gravité.*

Comme dans ce cas, on a encore $u = 0$, le moment qui agit ſur le corps eſt (830.) $= m\int cxdx\left(\frac{ydy}{dx} + k - x\right) = m\int cxydy - m\int cxdx\,(k - x)$. Mais le ſecond terme de cette expreſſion s'évanouit, à cauſe que les moments négatifs de la partie choquée ſont égaux aux moments poſitifs de la partie choquante ; ainſi cette expreſſion ſe réduit à $m\int cxydy$. Or le moment du poids eſt $= \pi\,(q \sin\Delta + p \cos\Delta)$, on aura donc également .... $\pi\,(q \sin\Delta + p \cos\Delta) = m\int cxydy$. Subſtituant dans le ſecond membre de cette queſtion, la valeur de y & celle de dy, en x

recours à l'équation $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{2}mbz}$, (895.), laquelle devient $e = \frac{24a^2}{z}$, en y ſubſtituant pour $P+\pi$, ſa valeur $2mbga$, & enſuite pour g ſa valeur $6a$. Cette équation donnera $e = 10a$, en mettant pour z ſa valeur $\frac{24}{10}a$. Ayant donc les valeurs de z & de e, on aura facilement celle de Δ, par l'équation $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{z}{e}$, ou, ce qui eſt la même choſe, en conſidérant le triangle DEF, qui donne $EF : DF :: 1 : Tang\ FED$, ou $e : z :: 1 : Tang\ \Delta$, ou enfin, $10 : \frac{24}{10} :: 1 : Tang\ \Delta = \frac{6}{25}$. L'angle d'inclinaiſon eſt donc celui dont la tangente eſt les $\frac{6}{25}$ du rayon ; c'eſt-à-dire, $= 24000$ (le rayon des tables ordinaires étant $= 100000$), & cette tangente répond à 13° 30' à peu près. En procédant ainſi pour la quatriéme racine $z = 35a$, on trouvera $e = \frac{24}{35}a$, $Tang\ \Delta = \frac{1225}{24}$ du rayon, c'eſt-à-dire $= 5104166$, ce qui répond à 88° 53'.

& dx, qu'on tirera de l'équation qui résulte de la figure & de la disposition du corps; intégrant ensuite, & substituant la plus grande valeur de x, déduite de l'équation $P + \pi = m\int cxdy$ qui a lieu entre le poids $P + \pi$ & la force verticale $m\int cxdy$, qui agit sur le corps, on aura une nouvelle équation, de laquelle on tirera la valeur de $\sin \Delta$.

COROLLAIRE I.

(900.) Si l'inclinaison étoit infiniment petite, on pourroit substituer à la place de $m\int cxydy$, la quantité $(\pm HP + \frac{m}{12}\int ce^3) \sin \Delta$, qui alors lui est égale (844.); & l'on auroit $\pi(q \sin \Delta + p) = (\pm HP + \frac{m}{12}\int ce^3) \sin \Delta$; ce qui donne $\sin \Delta = \frac{p\pi}{\pm HP + \frac{m}{12}\int ce^3 - q\pi}$ *.

COROLLAIRE II.

(901.) Dans les corps formés par la révolution d'une ligne quelconque autour de l'axe horisontal de rotation, le moment est (838.) $PK \sin \Delta$, P exprimant le poids total du corps, qui, dans le cas présent, est $P + \pi$. Substituant donc dans cette formule le poids $P + \pi$, à la place de P seul, on aura le moment $K(P + \pi) \sin \Delta$, & par conséquent $\pi(q \sin \Delta + p \cos \Delta) = K(P + \pi) \sin \Delta$, équation qui donne le sinus de l'inclinaison, ou $\sin \Delta = \frac{\pm p\pi}{((K(P+\pi) - q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ **.

COROLLAIRE III.

(902.) Ayant exprimé par q la distance du centre de gravité O, au plan qui, passant par le poids additionnel π, est perpendiculaire à DOH. Si nous supposons maintenant que q n'exprime plus que la distance de l'axe H au même plan, nous n'aurons qu'à substituer $K \pm q$, en place de q seul, & l'on aura le sinus de l'inclinaison, ou $\sin \Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP \mp q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$, ce sinus étant celui d'un angle plus grand que 90 degrés, si $KP - q\pi$ est négatif. FIG. 62.

COROLLAIRE IV.

(903.) L'expression $\sin \Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP \mp q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ ne donnant qu'une

---

* On suppose $\cos \Delta = 1$, comme il convient, puisque l'inclinaison est infiniment petite.

** Pour avoir $\sin \Delta$, il faut substituer, en place de $\cos \Delta$, sa valeur $(1 - \sin \Delta^2)^{\frac{1}{2}}$, faire évanouir le radical, & dégager ensuite $\sin \Delta$.

ſeule racine, ou valeur de $\sin \Delta$, attendu que la valeur négative ne ſert que pour le côté oppoſé, lorſque p eſt négatif; il s'enſuit que les moments ſeront toujours poſitifs depuis l'inclinaiſon correſpondante à cette premiere racine, ou valeur de $\sin \Delta$, qu'on incline comme on voudra un corps formé par la révolution d'une ligne quelconque autour d'une axe horiſontal.

COROLLAIRE V.

(904.) Comme KP ne ſe trouve que dans le dénominateur, plus cette quantité ſera grande, plus la valeur de $\sin \Delta$ ſera petite.

PROPOSITION LXXVII.

(905.) *Trouver l'inclinaiſon que prendra un corps quelconque, qui, flottant ſur un Fluide, eſt pouſſé par une Puiſſance conſtante horiſontale, & perpendiculaire à l'axe de rotation, qu'on ſuppoſe également horiſontal; cette puiſſance étant placée dans la verticale qui paſſe par le centre de gravité.*

FIG. 76. Les moments qui agiſſent ſur le corps ſont (830.) $= \ldots\ldots$ $m\int cydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2 + m\int cdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2$. Suppoſant maintenant que O eſt ſon centre de gravité, & que l'angle $AOB = \Delta$ eſt l'inclinaiſon qu'il auroit priſe à l'égard de la verticale BO, ſi la puiſſance π, dont la direction eſt l'horiſontale CA, agiſſoit au point A; & ſi l'on fait de plus $AO = q$, il eſt clair qu'on aura le moment avec lequel la puiſſance π agit ſuivant $CD = q\pi \cos \Delta$. Cela poſé, nous aurons les trois équations ſuivantes ....

$$q\pi \cos \Delta = m\int cydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2 + m\int cdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2.$$

$$P + \pi \sin \Delta . \cos \Delta = m\int cdy (x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2 . \ldots\ldots$$

$$\pi \cos \Delta^2 = m\int cdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2 *.$$

Subſtituant, dans ces équations, les valeurs de $\sin\theta$, de y &

---

* Car la force π qui agit ſuivant l'horiſontale CA, peut être décompoſée en deux autres, l'une perpendiculaire à AO, repréſentée par CD, & l'autre dirigée ſuivant OA, qui eſt exprimée par AD. La conſidération de cette derniere force eſt inutile, puiſque ſa direction paſſant par le centre de gravité, elle ne peut produire aucune rotation (138.). Quant à la force CD, elle eſt $= \pi \cos \Delta$, & par conſéquent ſon moment $= q\pi \cos \Delta$; or ce moment eſt égal à la ſomme des moments qu'éprouve le corps de la part du Fluide, puiſqu'il doit leur faire équilibre dans l'inclinaiſon; c'eſt ce qui donne la premiere équation. La force perpendiculaire CD peut également être décompoſée en deux autres, l'une verticale, repréſentée par $DE = \pi \cos \Delta . \sin \Delta$, & l'autre horiſontale, repréſentée par $CE = \pi \cos \Delta^2$. La premiere étant ajoutée au poids P, équivaut à la ſomme des forces verticales qui agiſſent ſur le corps (561.); & la force horiſontale $\pi \cos \Delta^2$ eſt égale la ſomme des forces horiſontales, c'eſt ce qui fournit la ſeconde & la troiſieme équation.

de dy, exprimées en x & dx, déduites de l'équation que donnera la figure & la disposition du corps, & intégrant réellement, on aura trois autres équations, par lesquelles on trouvera les valeurs de x, de u, & de Δ.

PROPOSITION LXXVIII.

(906.) *Trouver l'inclinaison que prendra un cylindre qui flotte horisontalement, ce cylindre étant poussé par une puissance constante* π, *horisontale, & perpendiculaire à l'axe; & cette puissance étant placée dans le plan vertical qui passe par le centre de gravité.*

Les moments qui agissent sur le cylindre, lorsqu'il n'est soumis à l'action d'aucune puissance, sont (870.) $= K(N \cos\Delta + Q \sin\Delta)$, N exprimant la résistance horisontale, & Q les forces verticales. Or lorsque ce cylindre a acquis sa plus grande vîtesse, on a $N = \pi \cos\Delta^2$, & $Q = P + \pi \sin\Delta.\cos\Delta$ (*Voyez la Note de l'Art. précédent*) : donc, en substituant ces valeurs, nous aurons . . . . $K(\pi \cos\Delta^3 + P\sin\Delta + \pi \sin\Delta^2.\cos\Delta) = q\pi \cos\Delta$, ou en divisant par $K\cos\Delta$, & mettant l'unité en place de $\cos\Delta^2 + \sin\Delta^2$, $\pi + \frac{P \sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{q\pi}{K}$: ou enfin $\frac{P\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{q\pi - K\pi}{K} = \frac{\pi(q-K)}{K}$: mais $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$ est l'expression de la tangente de l'angle de l'inclinaison que prendra le cylindre, ou $Tang\,\Delta$: donc on aura $Tang\,\Delta = \frac{\pi(q-K)}{KP}$.

COROLLAIRE I.

(907.) Si l'on vouloit une solution pour le cas particulier dans lequel la vîtesse du cylindre est zero, ou dans lequel un axe horisontal fixe, qui passe par le centre de gravité, assujettit le cylindre, de façon à empêcher son mouvement horisontal & vertical, & à lui laisser seulement le mouvement de rotation autour de cet axe; il n'y auroit qu'à retrancher les quantités qui dépendent de ces mouvements empêchés, laissant seulement le moment $KP \sin\Delta$ (871.), & l'on auroit $KP \sin\Delta = q\pi \cos\Delta$, ce qui donne $Tang\,\Delta = \frac{q\pi}{KP}$.

COROLLAIRE II.

(908) La tangente de l'inclinaison, le cylindre étant libre, est à la même tangente, le cylindre tournant sur un axe fixe, comme $q - K$ est à q, ou comme la distance de la puissance à l'axe du

cylindre, eſt à la diſtance de la même puiſſance, au centre de gravité.

COROLLAIRE III.

(909.) Ces mêmes moments KP *ſin* Δ, qui ont été trouvés pour le cylindre, ont également lieu pour tout corps formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour d'un axe horiſontal. On aura donc pour tous ces corps, dans le cas où l'on ſuppoſe l'axe fixe, la ſtabilité, ou la tangente de l'inclinaiſon $=$ *Tang* $\Delta = \frac{q^n}{KP}$, cette Tangente étant plus grande que celle qui a lieu lorſque ces corps ſont libres, ou avec leur mouvement horiſontal.

COROLLAIRE IV.

(910.) La même choſe arrive dans un corps quelconque, quoiqu'il ne ſoit pas formé par la révolution d'une ligne autour d'un axe horiſontal, avec cette ſeule différence que la quantité K eſt variable, ſelon les différentes inclinaiſons.

COROLLAIRE V.

(911) Nous avons trouvé (838.) K *ſin* $\Delta = h$, h exprimant la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale, qui paſſe par le centre de volume. Donc on aura $K = \frac{h}{ſin\,\Delta}$; & cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation *Tang* $\Delta = \frac{q^n}{KP}$, donne *Tang* $\Delta = \frac{q^n\,ſin\,\Delta}{hP} = \frac{ſin\,\Delta}{coſ\,\Delta}$. Donc *coſ* $\Delta = \frac{hP}{q^n}$; & par conſéquent *ſin* $\Delta^2 = \frac{q^{2n^2} - h^2P^2}{q^{2n^2}}$.

CHAPITRE XII.

Des Moments qui agiſſent ſur les corps, lorſqu'ils tournent librement dans des Fluides, ſur un axe quelconque qui paſſe par leur centre de gravité.

PROPOSITION LXXIX.

(912.) TROUVER *les moments qui agiſſent ſur un corps quelconque, tournant ſur un axe qui paſſe par ſon centre de gravité.*

Soit diviſé la ſurface du corps en petits quadrilateres, ſenſible-

ment plans, par des plans horiſontaux & verticaux, & cherchant la force poſitive ou négative qui agit ſur chacun de ces petits quadrilateres, ſuivant la direction de ſon mouvement, on la multipliera par la diſtance perpendiculaire du petit quadrilatere à l'axe de rotation. Prenant enſuite la ſomme de tous les produits, on aura les moments totaux qu'on cherche.

La force horiſontale, qui agit ſur un petit quadrilatere, choquant, ou choqué, eſt (624.) = ... $mc\left(Da \pm \frac{1}{6} u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$, laquelle étant réduite à une direction quelconque devient = ... $\frac{mb \sin\pi}{\sin\omega}\left(Da \pm \frac{1}{6} u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$.

Suppoſons maintenant que r exprime la diſtance perpendiculaire du petit quadrilatere à l'axe, le moment qui agit ſur cette petite ſurface ſera $= \frac{mbr \sin\pi}{\sin\omega}\left(Da \pm \frac{1}{6} u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$; & le moment total, c'eſt-à-dire, celui qui agit ſur tout le corps ſera $= m\int \frac{br \sin\pi}{\sin\omega}\left(Da \pm \frac{1}{6} u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE I.

(913.) Les moments de l'une & de l'autre dénivellation ſeront par conſéquent = ... $m\int \frac{br \sin\pi}{\sin\omega}\left(Da - \frac{1}{6} u \sin\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE II.

(914.) Si, une des moitiés du corps eſt égale & ſemblable à l'autre moitié, de ſorte que les quantités r, $\sin\theta$, $\sin\pi$, D & a, de l'une des moitiés, ſoient égales aux mêmes quantités correſpondantes de l'autre moitié, en ſommant les moments qui agiſſent ſur chaque paire de petits quadrilateres correſpondants dans l'une & dans l'autre moitié, on trouvera le moment qui agit ſur tout le corps $= \frac{1}{3}m\int \frac{bru \sin\pi \sin\theta}{\sin\omega}\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ = ... $\frac{1}{2}m\int \frac{bruD^{\frac{1}{2}}a \sin\pi . \sin\theta}{\sin\omega}\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.\right)$; ou ſi l'on néglige tous les termes de la ſérie excepté le premier, = ... $\frac{1}{2}m\int \frac{bruD^{\frac{1}{2}}a \sin\pi . \sin\theta}{\sin\omega}$.

COROLLAIRE III.

(915.) Si l'on appelle V la vîteſſe angulaire avec laquelle tourne le corps, on aura (131.) $V=\frac{udt}{r}$, & $u=\frac{rV}{dt}$, ſubſtituant cette valeur de u dans l'expreſſion des moments; ils ſeront encore exprimés par . . . .

$$m\int\frac{br\sin x}{\sin \pi}\left(Da\pm\frac{rV\sin\theta}{6dt}\left(\left(D+\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{r^2V^2a\sin\theta^2}{64dt^2}\right).$$

COROLLAIRE IV.

(916.) Les moments de l'une & de l'autre dénivellation ſeront par conſéquent = ...

$$m\int\frac{br\sin x}{\sin \pi}\left(Da-\frac{rV\sin\theta}{6dt}\left(\left(D+\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{r^2V^2\sin\theta^2}{64dt^2}\right).$$

COROLLAIRE V.

(917.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & ſemblable à l'autre moitié, de ſorte que les quantités r, $\sin\theta$, $\sin x$, $\sin\pi$, D & a d'une moitié, fuſſent égales aux mêmes quantités correſpondantes de l'autre moitié, en ſommant les moments qui agiſſent ſur deux petits quadrilateres correſpondants dans l'une & dans l'autre moitié; on trouvera que le moment total, ou celui qui agit ſur tout le corps ſera $=\frac{1}{3}m\int\frac{br^2V\sin x\,.\sin\theta}{dt\sin\pi}\left(\left(D+\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)=$
$\frac{1}{2}m\int\frac{br^2V\sin x\,.\sin\theta\,D^{\frac{1}{2}}a}{dt\sin\pi}\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&c.\right).$

COROLLAIRE VI.

(918.) Si l'on exprimoit les ſurfaces du corps par une équation algébrique, on pourroit ſubſtituer $D+x$ à la place de D, & dx à la place de a: par cette ſubſtitution les moments deviendroient $=m\int\frac{br\sin x}{\sin\pi}dx\left(D+x\pm\frac{rV\sin\theta}{4dt}(D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{r^2V^2\sin\theta^2}{64dt^2}\right)$; ou ſi le corps flotte, ils ſeroient $=m\int\frac{br\sin x\,dx}{\sin\pi}\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{rV\sin\theta}{8dt}\right)^2$ *.

COROLLAIRE VII.

(919.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & ſemblable à l'autre moitié, de ſorte que les quantités r, $\sin\theta$, $\sin x$, $\sin\pi$,

* Car alors $D=0$ (587.).

D & a

D & a d'une des moitiés, fuſſent égales aux mêmes quantités, correſpondantes de l'autre moitié, l'expreſſion des moments ſeroit $= \frac{1}{2} m V \int \frac{br^2 (D+x)^{\frac{1}{2}} dx \sin \kappa \cdot \sin \theta}{dt \sin \nu}$; & ſi le corps étoit flottant, cette expreſſion deviendroit $= \frac{1}{2} m V \int \frac{br^2 x^{\frac{1}{2}} dx \sin \kappa \cdot \sin \theta}{dt \sin \nu}$.

COROLLAIRE VIII.

(920.) Les moments qui agiſſent ſur le corps feront donc, proportionnels à $\frac{V}{dt}$, ou feront égaux à une quantité conſtante quelconque, multipliée par $\frac{V}{dt}$ *.

COROLLAIRE IX.

(921.) Si le corps étoit formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour de l'axe même qui paſſe par ſon centre de gravité, & ſur lequel tourneroit le corps, on auroit $\sin \kappa = 0$, & par conſéquent les moments feront auſſi égaux à zero.

PROPOSITION LXXX.

(922.) *Décompoſer les moments qui agiſſent ſur un corps, dont les moitiés ſont égales & ſemblables, & qui tourne ſur un axe horiſontal, en moments horiſontaux & verticaux.*

Si l'on diviſe par r le moment $\frac{mbruD^{\frac{1}{2}} a \sin \kappa \cdot \sin \theta}{2 \sin \nu} = \frac{mbrux^{\frac{1}{2}} dx \sin \kappa \cdot \sin \theta}{2 \sin \nu}$, qui agit ſur deux petits quadrilateres quelconques correſpondants, la force que ces deux petites ſurfaces exerceront, ſera $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}} dx \sin \kappa \cdot \sin \theta}{2 \sin \nu}$. Or la vîteſſe u peut être décompoſée dans la vîteſſe horiſontale $\frac{u(k-x)}{r}$, & dans la verticale $\frac{uy}{r}$; k exprimant la diſtance du centre de gravité à la ſuperficie du Fluide; x la diſtance verticale du petit quadrilatere à la même ſuperficie; & y la diſtance horiſontale du même petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Subſtituant donc ſucceſſivement ces valeurs à la place de u ſeul dans l'expreſſion de la force, cette derniere ſe trouvera compoſée de deux autres, comme il ſuit: $\frac{\int mbux^{\frac{1}{2}} dx (k-x) \sin \kappa \cdot \sin \theta + mbuyx^{\frac{1}{2}} dx \sin \kappa \sin \theta}{2 r \sin \nu}$. Mais

* Cela eſt évident; car, après l'intégration faite, la quantité qui multiplie $\frac{V}{dt}$ dans l'expreſſion des moments, eſt conſtante pour le même corps.

la premiere de ces forces provenant d'un mouvement horisontal, on a, pour ce cas (584.), $\sin\theta = \sin\lambda . \sin n$; & la seconde provenant d'un mouvement vertical, on aura (585.), $\sin\theta = \cos n$; la force dont il s'agit sera donc composée de ces deux . . . . $\frac{mbur^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n}(\sin x . \sin\lambda . \sin n(k-x) + y\sin x . \cos n)$. Chacune de ces parties peut encore être décomposée en deux autres, l'une horisontale, & l'autre verticale, en faisant, dans le premier cas (572, 573, 577 & 580.) $\sin x = \sin\lambda . \sin n$; & dans le second, $\sin x = \cos n$; ainsi les quatre parties dans lesquelles la force sera divisée, seront $=$ $\frac{mbur^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n}(\sin\lambda^2 . \sin n^2(k-x) + \sin\lambda . \sin n . \cos n(k-x) + y\sin\lambda . \sin n . \cos n + y\cos n^2)$ Pour avoir maintenant les moments horisontaux & verticaux de cette force, on doit multiplier les parties $\sin\lambda^2 . \sin n^2(k-x) + y\sin\lambda . \sin n . \cos n$, par $k-x$, distance verticale du petit quadrilatere au plan horisontal qui passe par le centre de gravité; & les parties $\sin\lambda . \sin n . \cos n(k-x) + y\cos n^2$, par y, distance horisontale du même petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Les moments qui agissent sur les deux petits quadrilateres correspondants seront donc $=$ . . . . $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n}(\sin\lambda^2 . \sin n^2(k-x)^2 + 2\sin\lambda . \sin n . \cos n . (k-x)y + y^2\cos n^2) =$ $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin n}(\sin\lambda . \sin n(k-x) + y\cos n)^2$, ou, en faisant $\frac{udt}{r} = V$, ce qui donne $u = \frac{Vr}{dt}$, ces moments seront $=$ . . . . $\frac{mbVx^{\frac{1}{2}}dx}{2dt\sin n}(\sin\lambda . \sin n(k-x) + y\cos n)^2$. Enfin la somme de tous les moments qui agissent sur le corps entier sera $=$ . . . . $\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{\sin n}(\sin\lambda . \sin n(k-x) + y\cos n)^2 =$ . . . . $\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx(\sin\lambda . \sin n(k-x)^2 + 2y(k-x)\cos n + \frac{y^2\cos n^2}{\sin\lambda . \sin n})$*.

PROPOSITION LXXXI.

(923.) *Réduire les moments qui agissent sur un corps dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tourne, sur un axe vertical, à deux moments horisontaux perpendiculaires entre eux.*

* Car $b = \frac{c}{\sin\lambda}$, Art. 575.

Soit ſuppoſé deux plans verticaux perpendiculaires entre eux, & coïncidant avec l'axe; ſuppoſant enſuite que la diſtance horiſontale d'un petit quadrilatere à l'un de ces plans ſoit nommée z, & que la diſtance à l'autre ſoit nommée y; on décompoſera la vîteſſe u en deux autres paralleles aux mêmes plans, leſquelles vîteſſes ſeront $\frac{uz}{r}$ & $\frac{uy}{r}$. Si l'on ſubſtitue maintenant ces expreſſions de la vîteſſe, en place de u ſeul, dans l'expreſſion $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx \sin x . \sin \theta}{2 \sin n}$ qui (922.) eſt celle de la force qui agit ſur deux petits quadrilateres correſpondants; cette force ſera diviſée en deux autres, & $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx \sin x . \sin \theta}{2r \sin n}(z + y)$. Comme ces forces proviennent toutes deux d'un mouvement horiſontal, & qu'on demande qu'elles exercent leur action dans la même direction, on a pour toutes les deux $\sin x$, ainſi que $\sin \theta = \sin \lambda . \sin n$ (572 & 584); donc ces forces ſeront $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx \sin \lambda^2 \sin n^2}{2r \sin n}(z + y) = \frac{\frac{1}{2} mV x^{\frac{1}{2}} dx \sin \lambda . \sin n}{dt}(z+y)$. Multipliant maintenant chacune de ces forces par la diſtance horiſontale z & y de l'axe à leurs directions, & mettant dz & dy à la place de c, on aura, pour l'expreſſion des moments, ...
$\frac{\frac{1}{2} mVx^{\frac{1}{2}} dx \sin \lambda . \sin n}{dt}(z^2dz + y^2dy)$.

SCOLIE I.

(924.) On a ſuppoſé, comme on le voit, dans le calcul, non-ſeulement que les moitiés du corps, priſes de part & d'autre d'un des plans verticaux, ſont égales & ſemblables; mais encore que le ſecond plan vertical diviſe auſſi le corps en deux moitiés égales & ſemblables. C'eſt ce qu'on doit avoir préſent à l'eſprit, pour ne pas confondre les corps dont il s'agit ici, avec ceux qui ne peuvent être diviſés en deux moitiés égales & ſemblables que par un ſeul plan vertical.

SCOLIE II.

(925.) Quoique la rotation puiſſe, ſans contredit, ſe faire ſur un axe quelconque, & ſous quelque inclinaiſon que ce ſoit, cependant toutes les rotations poſſibles peuvent ſe réduire à trois, l'une ſur un axe vertical, & les deux autres ſur deux axes horiſontaux perpendiculaires entr'eux; nous nous bornerons, pour plus de facilité, à conſidérer la rotation ſeulement ſur ces trois axes.

PLANC. IV. Nous ne la conſidérerons même que ſur deux axes, l'un vertical & l'autre horiſontal, attendu que tout ce qu'on dira de la rotation ſur ce dernier, s'appliquera également à la rotation ſur l'autre axe horiſontal.

PROPOSITION LXXXII.

(926.) *Trouver les moments qui agiſſent ſur un cylindre qui flotte horiſontalement ſur un Fluide, & qui tourne ſur un axe horiſontal parallele à ſes côtés, & paſſant par le centre de gravité.*

Soit $ABFD$ le cylindre, C ſon centre de volume, & CGE une
FIG. 77. verticale dans laquelle ſe trouve le centre de gravité G. Soit tiré l'horiſontale BF, ainſi que les droites CB, GB, & ſoit fait $CG = k$, $CB = R$, $CE = x$, & $BE = y$. Le moment provenant des forces qui agiſſent ſur une différencielle horiſontale en B, & ſur ſa correſpondante en F, eſt (919.) $= \frac{\frac{1}{2} mbr^2 V x^{\frac{1}{2}} dx \, \text{ſin}\, z . \text{ſin}\, \theta}{dt \, \text{ſin}\, n}$; b exprimant la longueur du cylindre; $r = GB$; $x = \theta =$ l'angle GBC; $\text{ſin}\, n = \text{ſin}\, BCE = \frac{y}{R}$. Par conſéquent on aura $K : \text{ſin}\, \theta :: r : \frac{y}{R}$; ce qui donne $r \, \text{ſin}\, \theta = \frac{ky}{R}$. Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'expreſſion des moments, elle deviendra $\frac{\frac{1}{2} mbVk^2 y x^{\frac{1}{2}} dx}{R dt} = \frac{mbVk^2}{2Rdt} x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$.

La ſomme des moments qui agiſſent ſur tout le cylindre depuis l'horiſontale BF juſqu'au diametre auſſi horiſontal AD, ſera donc $= \frac{mbVk^2}{2Rdt} \int x^{\frac{1}{2}} dx . \sqrt{R^2 - x^2}$; ou, en réduiſant $\sqrt{R^2 - x^2}$ en ſérie, & intégrant, $= \frac{mbVk^2}{dt} \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.2R^2} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{11.8R^4} - \frac{x^{\frac{15}{2}}}{15.16R^6} - \frac{5x^{\frac{19}{2}}}{19.128R^8} - \frac{7x^{\frac{23}{2}}}{23.256R^{10}} - \&c \right)$. Faiſant maintenant $x = R$, les moments qui agiſſent ſur tout le demi-cylindre $ABHFD$ ſeront $= \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{mbVk^2 R^{\frac{3}{2}}}{dt} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7.2} - \frac{1}{11.8} - \frac{1}{15.16} - \frac{5}{19.128} - \frac{7}{23.256} - \&c. \right), \text{ ou, } = \frac{6}{25} \cdot \frac{mbVk^2 R^{\frac{3}{2}}}{dt},$$

à très-peu près.

COROLLAIRE I.

(927.) Les moments de la dénivellation ſont négligeables, par ce qu'on a dit dans la Propoſition précédente.

COROLLAIRE II.

(928.) Tous les moments s'évanouiſſent lorſqu'on a $k = 0$; c'eſt-à-dire, lorſque le centre de gravité coïncide avec l'axe du cylindre.

CHAPITRE XIII.

De la Vîteſſe angulaire avec laquelle les corps flottants tournent ſur un axe quelconque.

PROPOSITION LXXXIII.

(929.) TROUVER *la vîteſſe angulaire avec laquelle un corps flottant tourne ſur un axe quelconque, étant animé par une, ou par pluſieurs puiſſances.*

La vîteſſe angulaire eſt (179.) $V = \frac{dt\int p\pi dt}{S}$; $p\pi$ exprimant la ſomme des moments des puiſſances qui agiſſent; t le temps de leur action; & S la ſomme des moments d'inertie. Subſtituant donc en place de $p\pi$ les moments qui agiſſent ſur le corps, & qui proviennent des réſiſtances & de l'action des puiſſances. On aura une équation, de laquelle on tirera la valeur de la vîteſſe angulaire V dans quelque inſtant de l'action que ce ſoit.

COROLLAIRE I.

(930.) Plus les moments d'inertie ſeront grands, plus il faudra de temps au corps pour acquérir une vîteſſe angulaire donnée.

SCOLIE.

(931.) Les moments $p\pi$, ou leur ſomme, peuvent provenir de différentes puiſſances, & ces puiſſances peuvent être conſtantes; c'eſt-à-dire, indépendantes de la vîteſſe angulaire V, ou elles peuvent dépendre abſolument de cette vîteſſe; comme en effet, elles en dépendent lorſqu'elles proviennent de la réſiſtance du Fluide, ainſi que nous l'avons vu dans le *Chapitre* précédent. M. *Bouguer* (*Traité du Navire, liv. II, ſection III, Chap. I*, § 3.), & *Léonard Euler*, ont fait abſtraction de cette derniere eſpece de puiſſance, & même M. *Bouguer* ajoute qu'il néglige ces réſiſtances, à cauſe que le corps diviſe très-peu de Fluide; & qu'il en eſt de la réſiſtance qu'il éprouve, comme de celle que l'air oppoſe au mouvement des pendules; réſiſtance qui eſt preſque inſenſible, à cauſe que la vîteſſe angulaire V eſt très-petite. Mais le cas dont il s'agit ici eſt très-différent; car les pendules oſcilleroient encore avec plus de régularité ſans la réſiſtance, au lieu que ſans la réſiſ-

tance, les corps ne pourroient pas se soutenir, dans leur rotation, sur les Fluides. Le seul cas où ceci ait quelque fondement, est celui où le corps est formé par la révolution d'un plan quelconque, autour d'un axe qui passe par le centre de gravité. Dans ce cas, en supposant que la rotation, ou oscillation, se fasse sur un axe horisontal, si l'on incline un peu le corps, le moment qui l'obligera à tourner, lorsqu'on l'aura abandonné à lui-même, sera (838.), celui qui résulte de l'action du Fluide verticalement, lequel est $= KP \sin \Delta$, expression qui devient zero lorsque $K = 0$; mais cette condition de $K = 0$ est nécessaire pour que les moments résistants s'évanouissent : donc ces moments ne s'évanouissent, même dans ce cas, que lorsque le corps n'est animé par aucune action qui le fasse tourner; c'est-à-dire, lorsqu'il perd entiérement la stabilité, & qu'il est impossible, dans la pratique, qu'il se soutienne. La résistance des Fluides est donc, par conséquent, nécessaire dans la rotation des corps. On fera voir dans la suite que, dans quelques cas, cette résistance n'est pas aussi peu considérable que l'a cru M. *Bouguer*.

COROLLAIRE II.

(932.) Si l'on avoit $p\pi = 32 KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$, * K, P & G, étant constants, on auroit $V = \frac{dt \int (32 KP dt \sin \Delta - GV)}{S}$: ou parce

---

*Voici le fondement de cette égalité. Lorsqu'on incline le corps d'une quantité infiniment petite, ou même d'une quantité finie, & qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, le moment $p\pi$ qui l'oblige à tourner, est celui qui résulte de l'action verticale du Fluide, en faisant abstraction de la résistance que le Fluide oppose à ce mouvement. Or, dans cette expression, π représente la puissance, ou la résultante des puissances qui animent le corps, ainsi elle est $= 32 P$, (52.); P exprimant le poids du corps : & la quantité p, est la distance horisontale de la direction de la puissance au plan vertical qui passe par l'axe de rotation, c'est-à-dire, au plan *directeur* (167 & 168.), laquelle distance est $= K \sin \Delta$ (838 & 839.). Donc le moment $p\pi = 32 KP \sin \Delta$, abstraction faite du moment des résistances qui proviennent de la rotation.

Mais lorsque le corps est abandonné à lui-même, & qu'il tend à se rétablir dans sa premiere situation, il éprouve, de la part du Fluide, une résistance qui s'oppose à son mouvement, avec une énergie d'autant plus grande, qu'il se meut, ou tend à se mouvoir, avec une plus grande vîtesse angulaire. Or (920.) le moment de cette résistance est proportionnel à $\frac{V}{dt}$, ou est égal à $\frac{V}{dt}$ multiplié par une quantité constante; ainsi en appellant G cette constante, le moment de la résistance sera $= \frac{GV}{dt}$.

Cela posé, il est évident que le moment total $p\pi$ qui agit sur le corps, tant en vertu de l'action des puissances que de celle des résistances sera $= 32 KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$.

que (131.) $V = \frac{udt}{K}$, *u* exprimant la vîtesse d'un point éloigné de l'axe de la quantité *K*, on auroit $\frac{udt}{K} = \frac{dt\int\left(32\,KP\,dt\,\sin\Delta - \frac{Gudt}{K}\right)}{S}$, & par conséquent $Su = 32\,K^2\,P\int dt \sin\Delta - G\int udt$.

COROLLAIRE III.

(933.) Si l'on suppose $G = 0$, ou, ce qui est la même chose, si l'on fait abstraction des résistances, comme l'ont fait les Auteurs cités ci-dessus, il viendra $V = \frac{dt\int 32\,KP\,dt\,\sin\Delta}{S} = \frac{32\,dt\,KP}{S}\int dt \sin\Delta$.

PROPOSITION LXXXIV.

(934.) *Trouver la longueur d'un pendule simple isochrone avec le corps flottant qui oscille sur un axe horisontal.*

Soit *L* la longueur du pendule simple, on aura (184.) $V = \frac{\xi dt \int dt \sin\Delta}{L} = \frac{\omega\, dt}{L}$, en supposant que ω représente la vîtesse du corps dans le pendule: donc $\int dt \sin\Delta = \frac{\omega}{\xi}$; mais comme on suppose que les corps décrivent des arcs semblables en temps égaux, on a, $\omega : u :: L : K$, & $\omega = \frac{Lu}{K}$; par conséquent on a aussi $\int dt \sin\Delta = \frac{Lu}{\xi K} = \frac{Lu}{32K}$. Cette valeur étant substituée dans l'équation $Su = 32\,K^2\,P\int dt \sin\Delta - G\int udt$, il en résulte $Su = KPLu - G\int udt$. Supposant maintenant que les oscillations soient très-courtes, ou infiniment petites, on pourra supposer l'arc que décrivent les corps égal à son sinus, lequel, dans le corps flottant, est $= K\sin\Delta$, & par conséquent on aura $udt = Kd\sin\Delta$, & $\int udt = K\sin\Delta$, ce qui donnera $Su = KPLu - GK\sin\Delta$; mais la vîtesse ω au milieu de l'oscillation, est (359.) $= 8\left(\frac{L^2 \sin\Delta^2}{2L}\right)^{\frac{1}{2}} = 8\sin\Delta\sqrt{\tfrac{1}{2}L} = \frac{Lu}{K}$, donc $u = \frac{8\,K\sin\Delta}{\sqrt{2\,L}}$. Cette valeur de *u* étant substituée, donne $\frac{8\,KS\sin\Delta}{\sqrt{2\,L}} = \frac{8\,K^2\,P\sin\Delta\sqrt{L}}{\sqrt{2}} - GK\sin\Delta$; ou $\frac{1}{8}G\sqrt{2\,L} = KPL - S$; & en quarrant $\frac{1}{32}G^2 L = K^2P^2L^2 - 2\,KPLS + S^2$, d'où l'on tirera

$$L = \frac{S}{KP} - \frac{G^2}{64\,K^2\,P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64\,K^2\,P^2}\right)^2 - \frac{S^2}{K^2P^2}}.$$

Scolie I.

(935.) L'analogie $\omega : u :: L : K$, n'eſt pas rigoureuſement exacte; mais à cauſe de la petiteſſe des arcs décrits, on peut la prendre pour telle.

Corollaire I.

(936.) Si l'on ſuppoſe $G = 0$, ou ſi l'on fait abſtraction des réſiſtances, on aura $L = \frac{S}{KP}$: expreſſion qui ne differe pas de celle que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule ſimple iſochrone à un pendule compoſé. Donc le corps flottant oſcile comme un pendule.

Corollaire II.

(937.) Si nous nommons l la longueur du pendule ſimple qui bat les ſecondes de temps moyen, & t le temps, en ſecondes, de la durée d'une oſcillation du corps flottant, ou du pendule L: puiſque les quarrés des temps de la durée des oſcillations, ſont comme les longueurs des pendules (372.), on aura $l : L :: 1 : t^2$, & $L = lt^2$. Subſtituant cette valeur de L dans l'équation $L = \frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}$, on en déduira $t = \sqrt{\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2 l} \pm \frac{1}{l} \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64 K^2 P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}}$.

Corollaire III.

(938.) Si l'on ſuppoſe $G = 0$, il en réſulte $t = \sqrt{\left(\frac{S}{KPl}\right)}$.

Scolie II.

(939.) Maintenant, pour ſatisfaire à l'engagement que nous avons pris dans l'*Art.* 931, nous pouvons comparer les moments des réſiſtances $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25\,dt}$, (926.) qui agiſſent ſur un cylindre pendant ſa rotation, avec les moments $kP\,\mathit{ſin}\,\Delta$, qui conſtituent ſa ſtabilité. Suppoſons d'abord $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25\,dt} = kP\,\mathit{ſin}\,\delta$, & ſubſtituons (131.) à la place de $\frac{V}{dt}$, ſa valeur $\frac{u}{k}$, en ſuppoſant que u exprime la vîteſſe avec laquelle ſe meut l'axe du cylindre, & k la diſtance

diſtance de cet axe au centre de gravité; & nous aurons $\frac{6mbVR^{\frac{3}{2}}}{25} = P\ \text{ſin}\ \delta$. Suppoſons encore que le cylindre eſt ſubmergé dans le Fluide juſqu'à ſa plus grande largeur, comme on l'a ſuppoſé, *Art.* 926; alors ſon poids P ſera $= \frac{1}{2}R^2cbm$, c exprimant la circonférence d'un cercle dont le diametre eſt l'unité, & nous aurons $\frac{6}{25}mbu\,R^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}R^2cbm\ \text{ſin}\ \delta$, ou $12u = 25\,R^{\frac{1}{2}}c\ \text{ſin}\ \delta$. Soit ſuppoſé, de même, qu'ayant incliné le cylindre de l'angle Δ, & le laiſſant en liberté, il prenne la vîteſſe u en ſe rétabliſſant dans la ſituation verticale, l'on aura $u = \frac{8k\ \text{ſin}\ \Delta}{\sqrt{2L}}$; ou en faiſant $k = \frac{1}{2}R$, $u = \frac{4R\ \text{ſin}\ \Delta}{\sqrt{2L}}$: ce qui donne $\frac{48R\ \text{ſin}\ \Delta}{\sqrt{2L}} = 25\,R^{\frac{1}{2}}c\ \text{ſin}\ \delta$, & $\text{ſin}\ \delta = \frac{48R^{\frac{1}{2}}\ \text{ſin}\ \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. On aura donc, d'après la ſuppoſition de $k = \frac{1}{2}R$, & de $P = \frac{1}{2}R^2cbm$, .. $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25\,dt} = kP\ \text{ſin}\ \delta = \frac{24R^{\frac{3}{2}}P\ \text{ſin}\ \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. Ainſi la force de la ſtabilité, ou le moment $kP\ \text{ſin}\ \Delta = \frac{1}{2}RP\ \text{ſin}\ \Delta$, ſera au moment de la réſiſtance que la même inclinaiſon Δ produit dans la rotation, comme $\frac{1}{2}RP\ \text{ſin}\Delta$ eſt à $\frac{24R^{\frac{3}{2}}P\ \text{ſin}\Delta}{25c\sqrt{2L}}$, ou comme $25c\sqrt{2L}$ eſt à $48\,R^{\frac{1}{2}}$. Si nous ſuppoſons maintenant (936.) $L = \frac{S}{kP}$, & de plus $S = \frac{1}{4}k^2P$, on aura $L = \frac{1}{4}k = \frac{1}{8}R$: & l'un des moments ſera à l'autre, comme $25c$ eſt à 96.

SCOLIE III.

(940.) On peut encore, dans le même cas du cylindre, conſidérer la valeur de L, en ayant égard à celle de G. Les moments des réſiſtances ſont (926 & 932.) $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25\,dt} = \frac{GV}{dt}$: donc $G = \ldots$ $\frac{6}{25}mbk^2R^{\frac{3}{2}}$, ou, en faiſant $k = \frac{1}{2}R$, ce qui donne $G = \frac{6}{100}mbR^{\frac{7}{2}}$, & $\frac{G^2}{64k^2P^2} = \frac{36m^2b^2R^5}{P^2(100)^2(4)^2}$*, ou bien, en ſubſtituant $P = \frac{1}{2}R^2cbm$, $\frac{G^2}{64k^2P^2} = \frac{36R}{(25c)^2(8)^2}$. Subſtituant pareillement dans la quantité $\frac{S}{KP}$ les valeurs de

* Il y a dans cet endroit une faute de calcul qui influe ſur le réſultat de cette Propoſition. On trouve dans l'original $\frac{G^2}{64K^2P^2} = \frac{36m^2b^2R^5}{P^2(100)^2(32)^2}$; c'eſt cette différence qui en occaſionne dans toute la ſuite du calcul.

K & de P, avec $S=\frac{1}{4}K^2P$, on aura $\frac{S}{KP}=\frac{K^2P}{4KP}=\frac{1}{4}K=\frac{1}{8}R$: ce qui donnera par conséquent $L=\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}\right)^2-\frac{1}{64}R^2}$ $=\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\frac{1}{8}R\sqrt{\left(1+\frac{36}{(25c)^2(8)}\right)^2-1}=\ldots\ldots$ $\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\frac{3R}{25c.8}\sqrt{1+\frac{9}{(25c)^2.(4)}}$; ou enfin, $L=\frac{1}{8}R\left(1+\frac{1}{16}\right)$, à peu de chose près: de sorte que la valeur de G introduite dans le calcul, rend la longueur du pendule simple isochrone avec le cylindre de $\frac{1}{128}R$ plus grande.

COROLLAIRE IV.

(941.) Si nous substituons la valeur de $L=\frac{1}{8}R$ dans l'équation (937.) $L=lt^2$, nous aurons $lt^2=\frac{1}{8}R$: ce qui donne le temps dans lequel le cylindre achevera une oscillation, c'est-à-dire, $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$.

SCOLIE IV.

(942.) La longueur du pendule simple qui bat les secondes de temps moyen sur le bord de la mer en Espagne, est, comme nous l'avons déjà dit, *Article* 373, de 440 lignes du pied de *Paris*, ou de $\frac{440.16}{15}$ du pied Anglais: on aura donc $l=\frac{440.16}{15.144}=3\frac{7}{27}$; laquelle valeur étant substituée dans l'équation $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$, on aura $t=\frac{1}{8}R^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{27}{11}}$, ou, à peu près, $t=\frac{63}{320}R^{\frac{1}{2}}$. Si nous faisons donc le cylindre de 32 pieds de diametre, on aura $R=16$, & le temps dans lequel il achevera une oscillation sera d'environ $\frac{63}{80}$ de seconde.

PROPOSITION LXXXV.

(943.) *Trouver la plus grande & la moindre vitesse, avec laquelle tournent les corps flottants.*

D'après la supposition de $p\pi=32\,KP\sin\Delta-\frac{GV}{dt}$, on trouve (932.) $Su=32\,K^2P\int dt\sin\Delta-G\int udt$. Différenciant cette équation, on a $Sdu=32\,K^2Pdt\sin\Delta-Gudt$, ou $\frac{du}{dt}=\frac{32K^2P\sin\Delta-Gu}{S}$. Or,

dans la plus grande vîtesse u, l'on a $du=0$, nous aurons donc $32K^2P\sin\Delta - Gu=0$; équation qui donne la plus grande vîtesse $u=\frac{32K^2P\sin\Delta}{G}$. Pareillement, la moindre vîtesse u a lieu lorsque du, ou $\frac{32K^2P\sin\Delta - Gu}{S}$, a sa plus grande valeur. Donc la moindre vîtesse $u=0$.

COROLLAIRE I.

(944.) On a trouvé, dans l'*Article* 210, que l'action, qui a lieu sur les fibres du levier, relativement au mouvement, est proportionnelle à Sdu. Considérant donc le corps flottant, qui tourne, comme un levier, l'action qui s'exercera sur ses fibres, sera comme Sdu, ou comme la quantité $32K^2P\,dt\sin\Delta - Gudt$ qui lui est égale: & la plus grande action qu'elles éprouveront dans toute l'oscillation, laquelle a lieu dans l'instant où elle commence & dans l'instant où elle finit, sera comme $32K^2Pdt\sin\Delta$.

COROLLAIRE II.

(945.) Donc la plus grande action qui s'exerce sur les fibres d'un corps dans l'acte de la rotation, ne dépend nullement de G, ou de la résistance du Fluide; mais elle provient seulement de la quantité $K^2Pdt\sin\Delta$, ou $32K^2P\sin\Delta$: c'est-à-dire, du produit de la stabilité $KP\sin\Delta$ par $32K$.

COROLLAIRE III.

(946.) Un levier uni au corps qui tourne, éprouvera une action proportionnelle à $S'du$, S' exprimant les moments d'inertie du levier seul; mais on a $du=\frac{32K^2Pdt\sin\Delta - Gudt}{S}$: donc l'action qu'éprouvera le levier sera proportionnelle à $\frac{S'dt(32K^2P\sin\Delta - Gu)}{S}$: & la plus grande de toute, sera proportionnelle à $\frac{S'K^2P\sin\Delta}{S}$.



APPENDICE I.

Sur la théorie des Cometes, ou Cerf-volants, pour vérifier la Loi de la résistance des Fluides.

LE moyen de vérifier une théorie qui seroit susceptible de quelques difficultés, est de l'appliquer à différentes expériences. Or de toutes les expériences, relatives à la résistance des Fluides, qui se présentent journellement à la vue, il n'en est pas de plus commune que le vol des Cometes, ou Cerf-volants, dont les enfants font usage. La force avec laquelle le vent agit sur ces machines, est ou comme le quarré de sa vîtesse, multiplié par le quarré du sinus de son angle d'incidence, comme le croient généralement tous les Auteurs modernes, ou elle est comme la simple vîtesse multipliée par le même sinus, selon que nous l'avons établi ci-dessus. C'est en donnant une vraie théorie des Cerf-volants, qu'on peut prouver lequel des deux systêmes convient avec la pratique, & par conséquent sçavoir lequel est le véritable.

Albert Euler, fils de *Léonard Euler*, a donné cette théorie, dans les Mémoires de l'Académie Royale de *Berlin*, *Tome XII*, *page* 322; mais il l'a fondée sur le premier systême, ou sur le principe que les résistances suivent la raison doublée de la vîtesse & du sinus d'incidence. Il distingue trois cas dans son Mémoire. Il suppose dans le premier, que le Cerf-volant avec sa ficelle est un corps roide, incapable d'altération; & dans le second & le troisieme cas, il suppose que la ficelle n'est attachée au Cerf-volant que par un seul point déterminé, autour duquel il peut tourner librement. Le premier cas n'est, comme on voit, nullement applicable à la pratique; & comme nous cherchons à nous procurer les lumieres de l'expérience, toute spéculation sur ce cas seroit absolument inutile. Dans le second cas, l'Auteur a égard aux deux mouvements de rotation que doit avoir le Cerf-volant, l'un sur l'extrêmité supérieure de la ficelle, & l'autre sur l'extrêmité inférieure. Cette derniere rotation, dit-il, est le résultat de trois forces: la premiere est la force du vent, réunie au centre de grandeur du Cerf-volant; la seconde est son poids réuni à son centre de gravité; & la troisieme est le poids de la ficelle pareillement réuni à son centre particulier

de gravité. Les deux premieres forces produisent réellement le mouvement de rotation dont il s'agit : mais la troisieme ne peut contribuer à ce mouvement, que dans le cas où la ficelle seroit absolument sans flexibilité, comme l'est un levier. Lorsqu'elle est d'une flexibilité parfaite, comme nous la supposerons dans la suite, sa pesanteur n'agit en rien pour produire une telle rotation, parce que la force unique qu'elle exerce, agit seulement suivant la direction de sa longueur, & n'agit en aucune maniere dans une direction oblique à cette longueur, qui cependant est l'unique circonstance qui peut contribuer à la rotation effective. Nous devons donc inférer de là que *Albert Euler* a considéré la ficelle comme un corps roide, en supposant cependant que le Cerf-volant puisse tourner librement sur ses deux extrêmités, ce qui rend ce cas autant inapplicable à la pratique que le premier. En outre, cet Auteur s'est assujetti, dans cette théorie, à attacher la ficelle seulement dans un point déterminé du Cerf-volant, ce qui, dans la pratique, ne produiroit jamais aucun bon effet. L'usage ordinaire est d'attacher au Cerf-volant deux, trois ou quatre ficelles qui se réunissent à une petite distance, pour n'en former ensuite qu'une seule. Par cette disposition le Cerf-volant se maintient dans sa position, sans pouvoir se mouvoir, ou tourner sur aucun de ses diametres; au lieu que si l'on néglige cette précaution, il se dérange facilement au moindre accident, & se précipite vers la terre. Cette circonstance n'a point échappé à *Euler*; mais, pour y apporter le remede nécessaire, ayant trouvé que le calcul étoit extrêmement compliqué, il a jugé à propos de le supprimer, & de se restreindre au cas unique d'une seule ficelle.

Le calcul est en effet bien embarrassant; mais c'est seulement dans la supposition que les forces du vent sont en raison composée doublée de ses vîtesses, & des sinus de ses angles d'incidence ; mais il n'en est pas ainsi dans la supposition que ces forces sont dans la raison composée des simples vîtesses, & des simples sinus d'incidence, selon que notre théorie l'indique ; le calcul devient même extrêmement facile. Nous ne pouvons donc nous dispenser d'avoir égard à la circonstance des différentes ficelles, en résolvant le problême dans toute sa généralité; & pour comparer les forces du vent, afin de voir si, en effet, elles ne correspondroient pas à la supposition de la raison doublée, nous passerons ensuite au cas particulier d'une seule ficelle, comme l'a fait *Euler*.

Cet Auteur, dans son troisieme cas, considere le Cerf-volant avec

PLANC. V. une queue ; mais il suppose que cette queue est un autre plan, ou Cerf-volant, qui tourne librement à l'extrêmité inférieure du premier ; supposition qui n'est pas d'une application moins difficile dans la pratique que les premieres. La queue est nécessaire dans le Cerf-volant, pour abaisser son centre de gravité, de maniere qu'il soit plus bas que le centre de grandeur, & prévenir par-là le mouvement gyratoire latéral qui pourroit avoir lieu ; mais, pour la pratique & pour la théorie, un corps roide quelconque, long & mince, comme un fil d'archal, ou même le prolongement du roseau, ou de la baguette, qui va de l'extrêmité supérieure du Cerf-volant jusqu'à l'inférieure, en formant son diametre principal, convient beaucoup mieux qu'un plan. D'après cela, il est évident que nous pourrons nous dispenser d'avoir égard à cette queue ; il suffira, pour en supposer l'existence, d'établir le centre de gravité plus bas que celui de grandeur. Un contrepoids quelconque, placé à l'extremité inférieure du Cerf-volant, pourroit produire le même effet que la queue, & par conséquent y suppléer. Il faut cependant observer que, dans ce cas, si le contrepoids étoit d'une même pesanteur que la queue, il n'abaisseroit pas autant le centre de gravité que le feroit la queue ; ce qui importe beaucoup pour éviter la rotation latérale. Ainsi la queue, telle que les enfants l'attachent à leurs Cerf-volants, est beaucoup plus convenable que le contrepoids d'une même pesanteur ; parce que, sans augmenter le poids, elle prévient beaucoup plus efficacement tout mouvement latéral de rotation. Mais comme il faut avoir égard à l'angle qu'elle formeroit avec le diametre du Cerf-volant, nous ne pouvons la considérer, telle qu'elle est, sans nous jetter dans des calculs fort longs & fort compliqués, attendu que son centre de gravité se trouveroit hors du corps du Cerf-volant. Ainsi nous nous réduisons à considérer la queue comme un corps roide, qui soit le prolongement du diametre du Cerf-volant ; & cette supposition n'est, comme on le voit, nullement éloignée de pouvoir s'appliquer à la pratique.

Ceci supposé, soit AB le Cerf-volant, ou plutôt son diametre, FIG. 78. en le considérant coupé par un plan vertical qui coïncide avec ce diametre, avec la ficelle GOV, & même avec la queue BX. Soient de plus AG, DG, les deux ficelles qui étant attachées au haut & au bas de ce diametre, & réunies en G à la ficelle unique GOV, assujettissent le Cerf-volant. Soit aussi C son centre de grandeur, & P celui de gravité. Soit tiré la ligne GE perpendiculaire au diametre BA, les verticales PK & EML, la ligne GK parallele à l'horison-

tale VFL, & la ligne IGF tangente à la ficelle dans le point G. Enfin soit $PC = b$; $CE = e$; $GE = g$; $P =$ le poids du Cerf-volant avec sa queue; $u =$ la vitesse du vent; $\varphi =$ l'angle GEL, $\theta =$ l'angle IGE; $Ru \, sin \, \varphi =$ la force du vent sur le Cerf-volant, suivant une direction perpendiculaire à son plan, & conformément au systême exposé précédemment sur la mesure de ces forces, ou résistances. On voit d'après cela que l'angle $IHE = \varphi + \theta$.

Trouver les sinus & cosinus des angles φ, θ, & $\varphi + \theta$.

(1.) Le Cerf-volant pouvant tourner librement sur le point G, les moments à l'égard de ce point doivent se faire équilibre. Les forces qui agissent sont le poids P du Cerf-volant, qui est dirigé suivant la verticale PK, & la force du vent $Ru \, sin \, \varphi$, qui est dirigée suivant la perpendiculaire au diametre BA. Les moments de ces forces sont $P.GK = P(KM + MG) = P(b+e) \, cos \, \varphi + Pg \, sin \, \varphi$, & $Ru \, sin \, \varphi . CE = Rue \, sin \, \varphi$. On aura donc, pour l'équilibre de ces moments, $Rue \, sin \, \varphi = P(b+e) \, cos \, \varphi + Pg \, sin \, \varphi$; ce qui donne $\frac{sin \, \varphi}{cos \, \varphi} = tang \, \varphi = \frac{P(b+e)}{Rue - Pg}$: & par conséquent $sin \, \varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $cos \, \varphi = \frac{Rue - Pg}{((Rue-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$ *.

(2.) Pour trouver le sinus de l'angle θ que forme la tangente IGF avec la ligne GE, considérons, que dans le triangle GEH les trois côtés GE, EH, HG, ou les sinus de leurs angles opposés, peuvent être pris pour exprimer les forces qui agissent; sçavoir: GE pour exprimer la force $Ru \, sin \, \varphi$, à cause qu'elle est dirigée suivant cette même ligne GE perpendiculaire au diametre BA; EH pour exprimer la force P, qui agit suivant la direction de cette même verticale: & enfin GH dont la direction est la même que celle de la ficelle GH, pour exprimer la résultante de ces deux forces. Cela posé, on aura $sin \, (\varphi + \theta) : sin \, \theta :: Ru \, sin \, \varphi : P$: donc, $Ru \, sin \, \varphi . sin \, \theta = P \, sin \, (\varphi + \theta) = P \, sin \, \varphi . cos \, \theta + P \, sin \, \theta . cos \, \varphi$: ce qui donne $\frac{sin \, \varphi}{cos \, \varphi} = tang \, \varphi = \frac{P \, sin \, \theta}{Ru \, sin \, \theta - P \, cos \, \theta}$, pour une seconde expression de la valeur de tangente φ. Egalant donc

---

* Ces formules sont faciles à trouver, il ne faut que se rappeller des expressions trigonométriques $sec \, \varphi = (1 + tang . \varphi^2)^{\frac{1}{2}}$; $cos . \varphi = \frac{1}{sec \, \varphi} = \frac{1}{(1 + tang \, \varphi^2)^{\frac{1}{2}}}$; & $sin \, \varphi = \frac{tang \, \varphi}{sec \, \varphi} = \frac{tang \, \varphi}{(1 + tang \, \varphi^2)^{\frac{1}{2}}}$. En substituant dans ces expressions de $cos \, \varphi$ & de $sin \, \varphi$ la valeur de $tang \, \varphi$ qu'on vient de trouver; on aura les expressions mêmes de l'Auteur.

PLANC. V. ces deux valeurs, on aura $\frac{P(b+e)}{Rue-Pg} = \frac{P\,\sin\theta}{Ru\,\sin\theta - P\cos\theta}$: d'où l'on tire, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tang\theta = \frac{P(b+e)}{Rub+Pg}$, & par conséquent $\sin\theta = \frac{P(b+e)}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\cos\theta = \frac{Rub+Pg}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(3.) Substituant maintenant dans les équations $\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi.\cos\theta + \sin\theta.\cos\varphi$, & $\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi.\cos\theta - \sin\varphi.\sin\theta$, les valeurs trouvées de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, & $\cos\theta$, on aura . . . .

$$\sin(\varphi+\theta) = \frac{RuP(b+e)^2}{(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2))^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots$$

$$\cos(\varphi+\theta) = \frac{(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2}{(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

(4.) Soit supposé $u=0$, on aura $\sin(\varphi+\theta)=0$, & $\cos(\varphi+\theta) = -1$;

FIG. 78 & 79. ce qui indique que la tangente FH tombera de l'autre côté & au-dessous de l'horisontale FL, & qu'elle coïncidera avec la verticale HL: c'est-à-dire, que le Cerf-volant sera suspendu à la ficelle. On aura de même $\sin\varphi = \sin\theta = \frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin IGE$; mais $\frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin PGE$ * : donc le point I concourt avec le point P ; c'est-à dire que le prolongement de la ficelle FG passe par le centre de gravité. Cette remarque est commune, il est vrai, mais elle justifie la supposition qu'on a faite.

(5.) Soit $Rue = Pg$, on aura $\cos\varphi=0$, & $\sin\varphi=1$; ce qui indique

FIG. 80. que, dans ce cas, le Cerf-volant AB sera vertical. On aura de même $\cos(\varphi+\theta) = \frac{-P}{(R^2u^2+P^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}}$ ** $= \sin EGI$; mais $\frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin EGC$: donc le point I concourt avec le point C; c'est-à-dire que le prolongement de la ficelle passe par le centre de grandeur C.

(6.) Soit $u=\infty$, on aura $\sin\varphi=0$, ce qui indique que le Cerf-volant se trouvera horisontal. On aura également $\sin(\varphi+\theta)=0$; & par conséquent la tangente HF se trouvera verticale.

Trouver la force que le vent exerce sur le Cerf-volant.

(7.) Cette force est $= Ru\sin\varphi$: en substituant, dans cette expression, la valeur de $\sin\varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, on aura . . . . . .

$$Ru\sin\varphi = \frac{RuP(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

---

* Car $GI : 1 :: PE : \sin PGE$: or $GI = (g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}$, & $PE = b+e$. Donc, &c.

** En substituant pour P sa valeur $\frac{Rue}{g}$, & réduisant.

(8.) Soit

(8.) Soit $u = 0$, l'on aura $Ru \sin \varphi = 0$. PLANC. V.

(9.) Soit $Rue = Pg$, l'on aura $Ru \sin \varphi = \frac{Pg}{e}$.

(10.) Soit $u = \infty$, l'on aura $Ru \sin \varphi = \frac{P(b+e)}{e}$.

(11.) Soit supposé en général $(Rue - Pg)^2 = (n^2 - 1)P^2(b+e)^2$, n exprimant un nombre quelconque, l'on aura $Ru \sin \varphi = \ldots \frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne} + \frac{Pg}{ne}$.

(12.) Cette valeur manifeste que le Cerf-volant n'éprouve pas la plus grande action quand $u = \infty$; car quoique dans ce cas le premier terme $\frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}$ ait sa plus grande valeur, il est évident que le second $\frac{Pg}{ne}$ a alors sa plus petite. Pour trouver cette plus grande action $Ru \sin \varphi$, on différenciera sa valeur, & l'on aura $\frac{RP(b+e)du}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(Rue-Pg)(b+e)R^2Peudu}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui donne $u = \frac{P((b+e)^2+g^2)}{Rge}$. Substituant cette valeur de u dans celle de $Ru \sin \varphi$, on aura la plus grande action du vent

$$Ru \sin \varphi = \frac{\left(\frac{P}{ge}(b+e)^2 + \frac{Pg}{e}\right)P(b+e)}{\left(\frac{P^2}{g^2}(b+e)^4 + P^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P}{e}\left((b+e)^2 + g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trouver la force avec laquelle la ficelle est tendue.

(13.) Nous avons déjà dit (2.) que, dans le triangle GEH, GE exprimant la force $Ru \sin \varphi$ du vent, & EH le poids P du Cerf-volant, GH exprimera la force résultante qui agit sur la ficelle, c'est-à-dire, la force par laquelle elle est tendue. Cette force est donc dans le point $G = \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(14.) Pour trouver la même force, ou tension, dans quelque autre point de la ficelle, on la regardera comme un polygone, d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Soit AB, BC deux de ces côtés, & soit tiré la verticale BF, avec la ligne CF parallele à AB; CF exprimera la force, ou tension, suivant BA, BC celle qui agit suivant la ligne même BC, & BF la force résultante des deux premieres, laquelle doit faire équilibre au poids de la ficelle. La tension suivant BA sera donc à la tension suivant BC, comme le sinus de FBC est au sinus de CFB, ou de son égal ABF; c'est-à-dire, que les deux tensions suivant les côtés BA & BC, sont réciproquement comme FIG. 81.

PLANC. V. les sinus de *ABF* & *FBC*. On démontrera la même chose de la tension suivant *CB* avec celle du côté suivant *CD*, & ainsi de suite pour toutes les différencielles : donc en général la tension de la ficelle en un point quelconque de sa longueur, est réciproquement comme le sinus de l'angle que la ficelle forme en ce point avec la verticale.

(15.) Soit *ABCDE* la ficelle, & supposons-la divisée en parties infiniment petites *AB*, *BC*, *CD*, *DE* &c. ; des points *B*, *C*, *D*, *E*, &c, soit élevé les verticales *BF*, *CG*, *DH*, &c., & soit tiré *CF* parallele à *BA*, *DG* parallele à *CB*, *EH* parallele à *DG*, &c. Enfin, en nommant α, β, γ, δ, &c. les angles *FBA*, *GCB*, *HDC*, &c., si, dans le triangle *FBC*, *CF* exprime la force, ou tension, qu'éprouve *BA* ; *CB* exprimera celle qu'éprouve *BC*, & ces deux forces seront entr'elles comme $\sin \beta$ est à $\sin \alpha$; c'est-à-dire, que si nous appellons *A* la force que souffre *AB*, *B* celle que souffre *BC*, *C* celle que souffre *CD*, &c., on aura $A : B :: \sin \beta : \sin \alpha$: on aura pareillement $B : C :: \sin \gamma : \sin \beta$, & $C : D :: \sin \delta : \sin \gamma$, d'où on déduit les équations $A \sin \alpha = B \sin \beta = C \sin \gamma = D \sin \delta =$ &c. ; & par là $A : D :: \sin \delta : \sin \alpha$: c'est à-dire, que la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle en *AB*, est à celle qu'elle éprouve en *DE*, réciproquement comme le sinus de l'angle α, est au sinus de l'angle δ.

(16.) On doit observer que dans ce qui vient d'être dit on n'a point eu égard à la force que peut produire le vent sur la ficelle, qu'on peut en effet négliger. Cependant si l'on vouloit y avoir égard, il seroit nécessaire de prendre, au lieu de la verticale *FB*, la direction résultante des deux forces, la gravité, & l'action du vent.

FIG. 81. (17.) Si l'on prend maintenant les abscisses sur une verticale *AB*, & les ordonnées sur une horisontale, en nommant *x* les abscisses, *y* les ordonnées, & *dh* les différencielles *FA*, ou *AD* de la ficelle ; *AE* & *AC* seront les *dx*, & *EF* & *CD* les *dy*. Dans ces suppositions le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale sera

FIG. 78. généralement $= \frac{dy}{dh}$: mais comme le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale, à son extrémité supérieure *G* est $= \sin(\varphi + \theta)$, & que la tension dans le même point est $= \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta}$, nous aurons $\frac{1}{\sin(\varphi+\theta)} : \frac{dh}{dy} :: \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta} : \frac{P \sin \varphi . \sin(\varphi+\theta) dh}{\sin \theta \, dy}$; expression de la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle dans un point quelconque de sa longueur ; ou en substituant, dans cette expression, à la place de $P \sin(\varphi+\theta)$ sa valeur $Ru \sin \varphi . \sin \theta$, (2.) cette même tension sera $= \frac{dh}{dy} Ru \sin \varphi^2$.

(18.) Pour trouver maintenant cette tension en quantités connues & dégagées des différencielles, on égalera les forces opposées qui agissent sur le point A, en les réduisant à la direction verticale. La force qui agit suivant AF étant $= \frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)dh}{\sin\theta\, dy}$, celle qui en résulte suivant AE sera $= \frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)dx}{\sin\theta\, dy}$. Par la même raison, la force suivant CA, résultante de la tension de la ficelle suivant DA, sera $= \frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)(dx-ddx)}{\sin\theta\, dy}$, en supposant dy constante. En outre, h étant la longueur de la ficelle, que nous supposons d'une densité & d'une grosseur uniforme dans toute son étendue, nous pouvons représenter par kh le poids total de la ficelle, & par conséquent le poids total d'une de ses différencielles sera exprimé par kdh. Or ce poids joint à la force suivant CA doit faire équilibre à la force suivant AE: donc $\frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)dx}{\sin\theta\, dy} = \frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)(dx-ddx)}{\sin\theta\, dy} + kdh$, d'où il résulte $\frac{dydh}{ddx} = \frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)}{k \sin\theta}$; quantité constante. Faisant, donc, $\frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} = A$, on aura $\frac{dydh}{ddx} = A$, ou $dydh = Addx$: en intégrant, on trouvera $(B+h)dy = Adx = A(dh^2 - dy^2)^{\frac{1}{2}}$; & en quarrant $(B+h)^2 dy^2 = A^2(dh^2 - dy^2)$, ce qui donne $\frac{dh}{dy} = \frac{((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$. En introduisant cette valeur dans l'expression trouvée de la tension de la ficelle $\frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)dh}{\sin\theta\, dy}$, elle deviendra $\frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A \sin\theta} = k((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}$.

(19.) Pour trouver maintenant la valeur de la constante B qui complette l'intégrale, considérons qu'à l'extrémité supérieure G de la ficelle on a $\frac{dh}{dy} = \frac{1}{\sin(\varphi+\theta)}$; mais de l'équation $\frac{P \sin\varphi . \sin(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} = A$, on tire $\frac{1}{\sin(\varphi+\theta)} = \frac{P \sin\varphi}{Ak \sin\theta}$: donc on aura pour l'extrémité supérieure de la ficelle $\frac{P \sin\varphi}{Ak \sin\theta} = \frac{((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$, h marquant la longueur totale de la ficelle. On aura donc aussi $\frac{P^2 \sin\varphi^2}{k^2 \sin\theta^2} = (B+h)^2 + A^2 = (B+h)^2 + \frac{P^2 \sin\varphi^2 . \sin(\varphi+\theta)^2}{k^2 \sin\theta^2}$, d'où il résulte $(B+h)^2 = \frac{P^2 \sin\varphi^2}{k^2 \sin\theta^2}(1 - \sin(\varphi+\theta)^2) = \frac{P^2 \sin\varphi^2 . \cos(\varphi+\theta)^2}{k^2 \sin\theta^2}$: donc $B = \frac{P \sin\varphi . \cos(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} - h$.

(20.) Si l'on substitue cette valeur de B dans l'expression de la tension de la ficelle qu'on a trouvée, *Art.* 18, on aura cette tension dans

PLANC. V.
FIG. 8.

un point quelconque éloigné de l'origine de la quantité, $H =$ $\frac{1}{\sin\theta}((P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta) - k\sin\theta(h-H))^2 + P^2\sin\varphi^2.\sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$.

(21.) A l'origine de la ficelle, ou dans le point V le plus bas, on a $H=0$: donc la tenſion dans le point V eſt $= \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1}{\sin\theta}((P\sin\varphi.\cos(\varphi+\theta) - kh\sin\theta)^2 + P^2\sin\varphi^2.\sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots$ $\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg) - P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2} - kh\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(22.) Soit ſuppoſé $u=0$, la force, ou tenſion, de la ficelle dans le point V deviendra $= \frac{-P(P^2g^2+P^2(b+e)^2)}{P^2g^2+P^2(b+e)^2} - kh = -(P+kh)$; poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(23.) Soit $Rue = Pg$, la tenſion deviendra $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $((-P-kh)^2 + \frac{P^2g^2}{e^2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{P^2(g^2+e^2)}{e^2} + kh(2P+kh))^{\frac{1}{2}}$.

(24.) Soit $u=\infty$, la tenſion ſera $= \frac{Pb}{e} - kh$.

(25.) On déduit clairement de l'analyſe de tous ces cas, que la tenſion de la ficelle varie, à meſure que la vîteſſe u du vent varie ; & que cette tenſion n'arrive pas à être la plus grande lorſque cette vîteſſe $u=\infty$. Car, quoique l'inſpection ſeule de la formule faſſe voir que le premier terme augmente à meſure que la vîteſſe u augmente, elle manifeſte auſſi que le ſecond diminue en même temps. On apperçoit cette vérité encore plus clairement, en réduiſant en ſérie la quantité $\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}$: car la tenſion devient alors $= \ldots$ $\left(\left(\frac{P(Rub+Pg)}{Rue-Pg} - \frac{P^3(b+e)^3Ru}{(Rue-Pg)^3} + \frac{P^5(b+e)^5Ru}{(Rue-Pg)^5} - \&c. - kh\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Cette expreſſion fait voir qu'auſſi-tôt que Pg eſt négligeable par rapport à Rue, la tenſion demeure ſenſiblement conſtante, & $= \frac{Pb}{e} - kh$, quelque augmentation que reçoive la vîteſſe u.

(26.) L'expreſſion $\frac{Pb}{e}$ manifeſte auſſi, que plus b ſera grand par rapport à e, plus la tenſion augmentera ; c'eſt-à-dire que plus la queue du Cerf-volant ſera longue & peſante, plus la tenſion ou la force qui agit ſur la ficelle augmentera.

Trouver la hauteur verticale que prendra le Cerf-volant.

(27.) De l'équation $(B+H)\,dy = Adx$, on déduit auſſi $\ldots\ldots$ $(B+H)^2(dH^2-dx^2) = A^2dx^2$, ce qui donne $dx = \frac{(B+H)dH}{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}$: &

en intégrant $x = ((B+H)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}$, ou, $x^2 = (B+H)^2 + A^2$; équation d'une hyperpole équilatere, dont le demi-axe est $= A$, les abscisses comptés du centre $= x$, & les ordonnées $= B+H$ *. Si donc, avec le demi-axe $A = \frac{P \sin \varphi . \sin(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} = CD$, on décrit l'hyperbole équilatere DEF, les ordonnées donneront les longueurs de la ficelle, & les abscisses, les hauteurs verticales du Cerf-volant. PLANC. V. FIG. 83.

(28.) Soit supposé F le point correspondant au Cerf-volant, on aura, pour ce point, $H = h$, & (19.), $(B+h)^2 + A^2 = \frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2} = x^2$: donc $x = FL = \frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta}$.

(29) EM est l'abscisse qui correspond au cas où l'on auroit $EH = B$, & $H = 0$: faisant donc dans l'équation $x^2 = (B+H)^2 + A^2$, $H = 0$, & substituant à la place de B sa valeur $\frac{P \sin \varphi . \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h$, (19.), on aura $x^2 = (EM)^2 = \left(\frac{P \sin \varphi . \cos(\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h\right)^2 + \frac{P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\theta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$, d'où l'on tire $EM = \frac{((P \sin \varphi . \cos(\varphi+\theta) - kh \sin \theta)^2 + P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}{k \sin \theta}$.

(30.) On aura donc la hauteur verticale EK du Cerf-volant, (*Fig.* 83), ou HL (*Fig.* 78.) $=$ . . . . FIG. 83 & 78.
$\frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta} ((P \sin \varphi . \cos(\varphi+\theta) - hk \sin \theta)^2 + P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$, laquelle quantité est la différence des tensions de la ficelle à ses deux extrémités, divisée par k, (13 & 20.).

(31.) Si cette différence étoit donc zéro, la différence de la hauteur verticale des deux extrêmités de la ficelle, seroit aussi zéro; c'est-à-dire que si les deux tensions des extrêmités étoient égales, ces extrêmités se trouveroient dans une même ligne horisontale. Ce principe est bien connu dans la Méchanique.

(32.) Nous avons trouvé (13.) la tension à l'extrêmité supérieure de la ficelle du Cerf-volant $= \frac{P((Rub+Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Ruc-Pg)^2 + P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & (21.) celle à l'extrêmité inférieure V, $=$ . . . .
$\left(\left(\frac{P(Ruc-Pg)(Rub+Pg) - P^3(b+c)^2}{(Ruc-Pg)^2 + P^2(b+c)^2} - kh\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+c)^4}{((Ruc-Pg)^2 - P^2(b+c)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, donc la hauteur verticale à laquelle parviendra le Cerf-volant au-dessus de

* Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. Bezout, Art. 324 & 336.

PLANC. V. l'horison sera $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left(\left(\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}-h\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(33.) Soit supposé $u=0$, la hauteur verticale du Cerf-volant sera $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$, longueur négative de la ficelle; ce qui est bien connu.

(34.) Soit $u=\infty$, la hauteur verticale sera $= \frac{Pb}{ke} - \frac{Pb}{ke} + h = +h$ longueur de la ficelle.

(35.) Pour trouver maintenant le cas dans lequel la hauteur verticale sera zéro, ou, ce qui revient au même, dans lequel le Cerf-volant se maintiendra dans la même horisontale que le point V, on égalera l'expression de cette hauteur à zéro. En prenant celle de l'Art. 30, on aura . . . .

$$\frac{P\,sin\,\varphi}{k\,sin\,\theta} - \frac{1}{k\,sin\,\theta}\left((P\,sin\,\varphi.cos(\varphi+\theta)-kh\,sin\theta)^2+P^2\,sin\,\varphi^2.sin(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0;$$

ou en multipliant par $k\,sin\,\theta$, & en quarrant $P^2\,sin\,\varphi^2 = P^2\,sin\,\varphi^2 - 2\,Pkh\,sin\,\varphi.sin\,\theta.cos(\varphi+\theta)+k^2h^2\,sin\,\theta^2$; expression qui se réduit à $\frac{2P\,sin\,\varphi.cos(\varphi+\theta)}{k\,sin\,\theta} - h = 0$. Mais (19.) $B = \frac{P\,sin\,\varphi.cos(\varphi+\theta)}{k\,sin\,\theta} - h$, ou . . $B+h = \frac{P\,sin\,\varphi.cos(\varphi+\theta)}{k\,sin\,\theta}$: donc pour que la hauteur verticale soit zéro, on doit avoir $2B+h=0$, ou $B=-\frac{1}{2}h$: c'est-à-dire, que les deux extrêmités de la ficelle doivent être également distantes, de part & d'autre de l'axe de l'hyperbole, conséquence qui est bien conforme aux principes connus.

(36.) En substituant les valeurs des sinus & cosinus, dans . . . $\frac{2P\,sin\,\varphi.cos(\varphi+\theta)}{k\,sin\,\varphi} - h$, il en résulte $\frac{2P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2} = kh$;

FIG. 78. équation qui doit avoir lieu pour que le Cerf-volant demeure dans la ligne horisontale du point V.

(37.) Si l'on suppose maintenant la vîtesse du vent constante, en laissant variable la longueur h de la ficelle, la hauteur verticale du Cerf-volant sera aussi variable. Mais comme le second terme de l'expression de cette hauteur est négatif, plus ce terme sera petit, plus la hauteur verticale sera grande: or en ne supposant variable que la longueur h, ce terme aura la moindre valeur qu'il est possible lorsque $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - h = 0$; ou ce qui est la même chose,

lorsqu'on a $B=0$ (19.): donc la plus grande hauteur du Cerf-volant au-dessus de l'horison, a lieu lorsque $h= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{P((Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, & cette même plus grande hauteur sera $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Ruc-Pg)+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$.

(38.) Comme la valeur de h dans ce dernier cas, n'est que la moitié de celle qu'on a trouvée dans le précédent, il s'ensuit que la longueur de la ficelle qui fait que le Cerf-volant s'éleve à la plus grande hauteur, n'est que la moitié de celle qui l'oblige à se maintenir dans la même horisontale que le point V.

(39.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend de la différence des tensions aux deux extrêmités de la ficelle, il s'ensuit qu'il s'élevera à sa plus grande hauteur, lorsque la tension à l'extrêmité inférieure V de la ficelle sera la moindre possible. Pour sçavoir donc quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'avoir attention que la ficelle fasse en ce point la moindre force possible.

(40.) Le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale dans un point quelconque, a été trouvé, *Art.* 17 & 18, $\ldots\ldots$ $=\frac{dh}{dy}=\frac{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$: mais pour l'extrêmité inférieure V, on a $H=0$; & l'on a pareillement $B=0$ pour le cas où le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur : donc le sinus de l'angle que formera la ficelle avec la verticale, à son extrêmité inférieure V, est $=\frac{A}{A}=1$: donc cet angle sera droit. Ainsi, pour sçavoir quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'observer quand la ficelle se trouve horisontale à son extrêmité inférieure V.

Trouver la valeur de l'horisontale VL.

(41.) Des deux équations $(B+H)\,dy=Adx$, & $x^2=(B+H)^2+A^2$, on tire $dy=\frac{Adx}{(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ *; mais $\int\frac{A^2dx}{2(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ est l'expression d'un sec-

* C'est l'équation de la *Chaînette*, telle que l'a trouvée *Jean Bernoulli*, Journal des Sçavants, année 1692. Plusieurs autres, après lui, ont aussi trouvé l'équation de cette courbe. *Voyez* le *Tome III de ses Œuvres*, *page* 491. *Voyez* aussi la Quatrieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Article* 561 & *suiv.*

PLANC. V. teur de l'hyperbole *: donc on aura la valeur de y en divisant le secteur de l'hyperbole par $\frac{1}{2}A$.

FIG. 13. (42.) Pour trouver la valeur d'un secteur hyperbolique FDC, EDC, eDC, &c., nommons z les abscisses de l'asymptote CQ, & faisons les ordonnées perpendiculaires $FQ = v$. L'équation à cette asymptote sera $vz = \frac{1}{2}A^2$ **, & la différencielle de l'aire $QFDP$ sera $vdz = \frac{A^2dz}{2z}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}A^2 \log z$; mais, pour que cette intégrale désigne seulement l'aire $QFDP$, il faut qu'elle devienne égale à zéro, lorsque $z = CP = A\sqrt{\frac{1}{2}}$: donc l'aire $QFDP = \frac{1}{2}A^2.\log\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Or cette aire est égale au secteur CFD, parce que $QFDC = QFDP + PDC = QFC + FDC$, & $PDC = QFC$, donc $QFDP = FDC$: donc le secteur $FDC = \frac{1}{2}A^2.\log\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: donc enfin $y = A.\log\frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

(43.) La valeur de z se trouve en considérant que $CF^2 = v^2 + z^2 = 2x^2 - A^2$, équation d'où l'on tire $z^2 = x^2 - \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(x^2 - \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}$, & par conséquent on aura $y = A.\log\frac{((B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$ ***.

Donc on aura, pour l'extrêmité de la ficelle où est attaché le Cerf-

* Pour le démontrer, soit PCA un secteur d'hyperbole équilatere, dont on veut avoir l'expression, soit C le centre de la courbe; $CA = A$ son demi-axe; $CM = x$ une abscisse; & $PM = y$ l'ordonnée correspondante. Menons la ligne Cp infiniment proche de CR, & le petit triangle différenciel CpP, sera l'élément du secteur PCA. Pour trouver l'expression de cet élément, décrivons du point C, comme centre, un petit arc Po, qu'on pourra regarder comme une petite ligne droite perpendiculaire sur Cp, faisons $CP = t$; $Po = dz$, nous aurons $po = dt$, $Cp = t + dt$, & par conséquent le triangle $CpP = \frac{1}{2}Cp \,.\, Po$ sera $= \frac{1}{2}(t+dt)dz = \frac{1}{2}tdz + \frac{1}{2}dtdz = \frac{1}{2}tdz$, à cause que $\frac{1}{2}dtdz$ est un infiniment petit du second ordre: donc le secteur PCA a pour expression $\int\frac{1}{2}tdz$.

PLANC. A. FIG. 5. Pour trouver la valeur de cette quantité en x, dx & constantes, soit mené l'ordonnée pm, & la perpendiculaire Pr sur cette ordonnée, on aura $pr = dy$, $Pr = dx$, & $Pp = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: donc Po ou $dz = \sqrt{(Pp^2 - po^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - dt^2)}$. Maintenant l'équation de la courbe donne $yy = xx - A^2$; en substituant cette valeur de yy dans celle de $t = \sqrt{(xx+yy)}$, on aura $t = \sqrt{(2xx - A^2)}$. De plus, en différenciant les valeurs de y & de t, on en déduira $dy^2 = \frac{xxdx^2}{xx - A^2}$; & $dt^2 = \frac{4xxdx^2}{2xx - A^2}$; & par conséquent $dz = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{xxdx^2}{xx - A^2} - \frac{4xxdx^2}{2xx - A^2}\right)} = \ldots \frac{A^2dx}{\sqrt{(xx - A^2)}\sqrt{(2xx - A^2)}}$. Donc enfin $\int\frac{1}{2}tdz = \int\frac{1}{2}\sqrt{(2xx - A^2)}\frac{A^2dx}{\sqrt{(xx - A^2)}\sqrt{(2xx - A^2)}} = \int\frac{A^2dx}{2\sqrt{(xx - A^2)}}$.

** Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Article* 347. En faisant attention qu'il s'agit ici de l'hyperbole équilatere.

*** Car $xx - \frac{1}{2}A^2 = xx - A^2 + \frac{1}{2}A^2 = yy + \frac{1}{2}A^2 = (B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2$. Voyez d'ailleurs la note *.

volant

volant, & à laquelle $H = h$, ...
$y = A.\log \frac{((B+h)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$, & à l'autre extrêmité, ou $H = 0$, $y = A.\log \frac{(B^2+\frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Souftrayant cette deuxieme quantité de la premiere, on aura l'horifontale $VL =$
$\frac{1}{2}A.\log \frac{(B+h)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$; ou, en regardant ce logarithme comme un logarithme des Tables ordinaires, & le réduifant en logarithme hyperbolique, afin de conferver la même valeur à l'expreffion, $VL =$ . . . .
$\frac{1}{2}A\,(2,3025851)\,\log \frac{(B+h)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$ *. On fubftituera enfuite dans cette expreffion la valeur de $B =$ . . . . . .
$\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h$, & de $A = \frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$; en prenant le figne pofitif, tant au numérateur qu'au dénominateur, fi B eft pofitif : on le prendra pofitif au numérateur, & négatif au dénominateur, fi B eft négatif & $h > B$: enfin on prendra le figne négatif, tant au numérateur qu'au dénominateur, fi B eft négatif, & $h < B$.

(44.) Si l'on fuppofe $u = 0$, alors $A = 0$, & par conféquent $VL = 0$.

(45.) Si $u = \infty$, on aura $A = 0$, & par conféquent $VL = 0$, comme auparavant.

(46.) Dans le cas où les deux extrêmités de la ficelle fe trouvent dans la même horifontale, on a (35.) $B = -\frac{1}{2}h$, on aura donc, dans ce cas, $VL = \frac{1}{2}A(2,3025851)\log \frac{\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}A^2-\sqrt{(\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; expreffion qui fe réduit à $VL = A\,(2,3025851)\log \frac{1+\cos(\varphi+\theta)}{1-\cos(\varphi+\theta)}$ **, à caufe de $B = \frac{P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} - h = -\frac{1}{2}h$, (19.), d'où l'on tire (11.) $A = \frac{P \sin\varphi.\sin(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} = \frac{h \sin(\varphi+\theta)}{2\cos(\varphi+\theta)}$.

---

* Voyez la Quatrieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 113.

** Car de la valeur de B, on tire $P = \frac{kh \sin\theta}{2 \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}$. Et cette valeur étant fubftituée dans celle de A, donne l'expreffion que l'Auteur indique.

Réduire les formules à un cas facile pour la pratique.

(47.) Nous pouvons ſuppoſer pour cela $e = b$, & $g = 2e$: car cette détermination de valeurs dépend ſeulement de la longueur des ficelles *AG*, *GD*, & de la poſition du point *D*, deux choſes qui ſont abſolument arbitraires. La diſtance *PC* étant donc tranſportée de *C* en *E*, on fera $AG = (4b^2 + (CA - b)^2)^{\frac{1}{2}}$, & prenant enſuite le point *D* à volonté, l'on aura $e = b$, & $g = 2e$.

(48.) Suivant la théorie des Voiles, qu'on verra développée dans le *Tome II*, *Art.* 261 de cet Ouvrage, la force du Cerf-volant eſt $= \frac{1}{20} mua^2 \sin\varphi$; ou en prenant les deux tiers de cette quantité, à cauſe de ce qu'on a dit (644.), elle ſera $= \frac{1}{30} mua^2 \sin\varphi$: donc $R = \frac{1}{30} ma^2$, a^2 déſignant l'aire du Cerf-volant, que nous ſuppoſerons de 9 pieds, & m le poids d'un pied cube d'eau de mer, que nous verrons dans le *Tome II, Art.* 109, être de 64 liv. $\frac{3}{8}$ *. On aura donc $R = \frac{64\frac{3}{8} \cdot 9}{30}$, ou $= 19$ à peu près.

(49.) Suppoſons, en outre, que le poids du Cerf-volant avec ſa queue ſoit d'une demi-livre, ou que $P = \frac{1}{2}$, & que 2000 pieds de ficelle peſent une livre, on aura $2000\,k = 1$, ou $k = \frac{1}{2000}$.

Toutes ces valeurs étant ſubſtituées dans les formules, les réduiſent à un cas très-facile pour la pratique.

(50.) Les valeurs des ſinus & coſinus des angles φ, θ, & $\varphi + \theta$, deviennent, d'après ces ſubſtitutions, telles qu'il ſuit : . . . . . .

$$\sin\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots \cos\varphi = \frac{19u-1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\sin\theta = \frac{1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots \cos\theta = \frac{19u+1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\sin(\varphi+\theta) = \frac{19u}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos(\varphi+\theta) = \frac{(19u-1)(19u+1)-1}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

(51.) Ces valeurs font voir clairement combien il faut peu de vîteſſe au vent, pour que la tangente *HF* s'éleve ae-deſſus de l'horiſon. Cette tangente doit demeurer horiſontale, lorſque $\cos(\varphi+\theta) = 0$: donc, pour que ce cas arrive, on doit avoir $(19u-1)(19u+1) = 1$. ou $u = \frac{1}{19}\sqrt{2}$; de ſorte qu'il faut que le vent ne parcoure pas

* Il s'agit ici du pied cube Anglais, qui peſe 1030 onces, *Averdupois*, ou 64 liv. $\frac{3}{8}$. *Voyez* l'endroit cité.

même 11 lignes par seconde, pour que la tangente HF demeure horisontale.

(52.) Les mêmes valeurs manifestent également, que, pour peu que la vîtesse u du vent soit sensible, déjà le Cerf-volant se met presque horisontal: il suffit, pour cela, que $\sin \varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ soit négligeable. Supposons donc que $\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{38}$, sinus dun angle moindre qu'un degré, on aura à très-peu près $\frac{1}{19u} = \frac{1}{38}$, ce qui donne donne $u = 2$; c'est à-dire que le vent ayant seulement 2 pieds de vîtesse par seconde, cela suffit pour faire prendre au Cerf-volant une situation horisontale, à moins d'un degré près.

(53.) Nous avons trouvé la tension de la ficelle à son extrêmité V (21.) $= \left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2} - kh\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ donc, dans le cas présent, cette tension sera $= \dots\dots\dots\dots$ $\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{(19u-1)^2+1} - \frac{h}{2000}\right) + \frac{19^2u^2}{((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(54.) Cette expression se réduit à $\frac{1}{2} - \frac{h}{2000}$, lorsque u a une valeur un peu considérable: d'où l'on voit que la tension de la ficelle se maintient presque sensiblement constante, quelque augmentation qui survienne dans la vîtesse du vent.

(55.) Nous avons trouvé (32.) la hauteur à laquelle s'éleve le Cerf-volant $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} - \dots\dots\dots\dots$ $\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - h\right) + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Donc dans le cas présent, cette hauteur sera $= \frac{\frac{1}{2}((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \dots$ $\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)} - h\right)^2 + \frac{19^2u^2}{(\frac{1}{2000})^2((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. On a de même (37.) la plus grande hauteur $= \frac{1000((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2000.19u}{(19u-1)^2+1}$; expression qui se réduit à $1000 - \frac{2000}{19u}$, lorsque u a une valeur un peu considérable; par conséquent plus la vîtesse du vent sera grande, plus la plus grande hauteur à laquelle s'élevera le Cerf-volant sera considérable.

(56.) La longueur de la ficelle propre à obtenir cette plus grande

hauteur verticale du Cerf-volant a été trouvée (37.) = ... $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$: donc elle sera, dans la supposition présente, $\frac{\frac{1}{2}((19u-1)(19u+1)-1)}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)}$; expression qui se réduit à $1000(1+\frac{2}{19u})$, u ayant une valeur un peu considérable. Si l'on avoit $u=2$, elle seroit $=1052,6$.

(57.) Une autre longueur de ficelle, quelle qu'elle soit, moindre, ou plus grande que celle-ci, donnera une moindre hauteur verticale au Cerf-volant. 1000 pieds de longueur de ficelle, en supposant $u=2$, ne donnent que 925, 7 pieds de hauteur au Cerf-volant, tandis que la plus grande hauteur pour cette vitesse est de 947, 4: 1500 pieds de longueur de ficelle ne donnent que 549, 6 de hauteur verticale. Enfin si l'on donne à la ficelle une longueur double des 1052, 6, qui donnent la plus grande élévation; c'est-à-dire, si l'on donne 2105, 2 pieds de ficelle, on tombe dans le cas où le Cerf-volant demeure dans l'horisontale du point V, (38.).

(58.) Nous avons trouvé (43.) la distance horisontale $VL = \frac{1}{2}A(2,3025851) \log \frac{(B+h)^2+\frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; & dans le cas de la plus grande hauteur verticale du Cerf-volant, où l'on a $B=0$, (37.) elle devient $=\frac{1}{2}A(2,3025851)\log \frac{h^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(h^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{2}A^2}$.

Mais nous avons trouvé ci-dessus (56.), $h=1000(1+\frac{2}{19u})$, & (43.) $A=\frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, & lorsque u a une valeur un peu considérable, cette valeur de A se réduit à $\frac{2000.19u}{19^2u^2-2.19u}$, ou à $1000\frac{2}{19u}(1+\frac{2}{19u})=\frac{2h}{19u}$. Donc, en substituant cette valeur de A dans l'expression de l'horisontale VL pour le cas de la plus grande hauteur, elle deviendra = ...

$$\frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2,3025851) \log \frac{1+\frac{2}{19^2u^2}+\left(\left(1+\frac{2}{19^2.u^2}\right)^2-\frac{4}{19^4.u^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{19^2u^2}} =$$

$\frac{1000}{19^2.u^2}(19u+2)(2,3025851) \log \frac{19^2u^2+2+19u\sqrt{19^2u^2+4}}{2}$; ou à peu près $=\frac{2000}{19^2.u^2}(19u+2)(2,3025851) \log 19u$. Faisant maintenant $u=2$, nous aurons $VL=\frac{1000}{19^2}(20)(2,3025851) \log 38=201,5$ pieds.

(59.) Ceci donne l'angle $LVG = 78°$, & la diſtance directe $VG = 969, 3$; de ſorte que la courbure de la ficelle emploie 83, 3 pieds.

Réduire les formules au cas conſidéré par Euler, *dans lequel* g = o, *ayant auſſi* e = b.

(60.) Dans ce cas, on aura (3.) $\sin(\varphi+\theta) = \ldots\ldots\ldots \frac{4PRu}{R^2u^2+4P^2}$, & $\cos(\varphi+\theta) = \frac{R^2u^2-4P^2}{R^2u^2+4P^2}$.

(61.) Soit $u = o$, on aura $\sin(\varphi+\theta) = o$, & $\cos(\varphi+\theta) = -1$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit, *Art.* 4, & avec les principes connus de Méchanique.

(62.) La force que le vent exerce ſur le Cerf-volant, ſe réduit dans ce cas, à $\frac{2PRu}{(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}$, (7.).

(63.) La force, ou tenſion à l'extrêmité V de la ficelle, ſe réduit pareillement, en ce cas (21.), à $\left(\left(\frac{PR^2u^2-4P^3}{R^2u^2+4P^2} - kh\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(64.) Si $u = o$, cette force, ou tenſion, ſera $= -P - kh$, poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(65.) La hauteur verticale du Cerf-volant ſe réduit, dans ce cas (32.), à $\frac{P(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}{k^2(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)} - h\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{k} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(66.) Si $u = o$, la hauteur verticale deviendra $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$; longueur de la ficelle.

(67.) La quantité h étant variable, l'expreſſion de la plus grande hauteur ſe réduit à $\frac{P(Ru-2P)^2}{k(R^2u^2+4P^2)}$: & celle de la longueur h de la ficelle qui donne cette plus grande hauteur devient $= \frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

(68). Cette longueur de la ficelle qui donne la plus grande hauteur ſera donc à cette plus grande hauteur, comme $Ru+2P$, eſt à $Ru-2P$.

(69.) La longueur de la ficelle néceſſaire pour que le Cerf-volant demeure dans l'horiſontale du point V, ſe réduit (36.) à $h = \frac{2P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

Tous ces réſultats conviennent parfaitement avec ce qu'on obſerve dans la pratique. Examinons maintenant s'il en eſt de même dans le

fyftême où l'on fuppofe que les forces du vent font en raifon compofée doublée de fes viteffes & de fes finus d'incidence.

Théorie des Cerf-volants, ou Cometes, en fuppofant la réfiftance des Fluides en raifon compofée doublée de leurs viteffes & des finus des angles d'incidence.

(70.) L'expreffion de la force du vent fur le Cerf-volant, fera préfentement $ru^2 \sin \varphi^2$. Cette quantité fubftituée dans l'équation de l'*Art.* 1, en place de $Ru \sin \varphi$, qui exprimoit la même force, & faifant $e=b$, & $g=0$, on aura $ru^2 \sin \varphi^2 = 2P \cos \varphi$.

(71.) On aura donc, $\sin \varphi^2 = \frac{2P}{ru^2} \cos \varphi$: & $1 - \sin \varphi^2 = \cos \varphi^2 = 1 - \frac{2P}{ru^2} \cos \varphi$: d'où l'on déduit $\cos \varphi = -\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$: .... & $\sin \varphi = \left(-\frac{2P^2}{r^2u^4} \pm \frac{2P}{ru^2}\left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(72.) L'équation de l'*Art.* 2 devient $ru^2 \sin \varphi^2 \sin \theta = P \sin(\varphi + \theta) = P(\sin \varphi . \cos \theta + \sin \theta . \cos \varphi)$; & en fubftituant, d'après ce qui précede, $2P \cos \varphi$, à la place de $ru^2 \sin \varphi^2$, l'on aura $2P \sin \theta . \cos \varphi = P(\sin \varphi . \cos \theta + \sin \theta . \cos \varphi)$, ou $\sin \theta \cos \varphi = \sin \varphi . \cos \theta$: donc $\varphi = \theta$.

(73.) Nous aurons donc $\sin(\varphi + \theta) = 2 \sin \varphi . \cos \varphi$, & $\cos(\varphi + \theta) = \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 = 2\cos \varphi^2 - 1$; ce qui donne $\sin(\varphi + \theta) = \left(\frac{8P}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{P}{ru^2} \pm \left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$: & $\cos(\varphi + \theta) = 1 + \frac{4P^2}{r^2u^4} \mp \frac{4P}{ru^2}\left(1 + \frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(74.) pour rendre ces expreffions plus traitables, & en même temps plus intelligibles, fuppofons $\frac{r^2u^4}{P^2} = n^2 - 1$ *, alors nous aurons $\sin(\varphi + \theta) = \frac{2}{(n+1)} \sqrt{2(n-1)}$, & $\cos(\varphi + \theta) = 1 - \frac{4}{n+1}$.

(75.) Soit fuppofé $u = 0$, l'on aura $n = 1$, $\sin(\varphi + \theta) = 0$, & $\cos(\varphi + \theta) = -1$.

(76.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2} = 8$, l'on aura $n = 3$, $\sin(\varphi + \theta) = 1$, & $\cos(\varphi + \theta) = 0$.

(77.) Soit $u = \infty$, l'on aura $n = \infty$, $\sin(\varphi + \theta) = 0$, & $\cos(\varphi + \theta) = 1$.

(78) La force que le vent exerce fur le Cerf-volant eft .... $ru^2 \sin \varphi^2 = 2P \cos \varphi = -\frac{2P^2}{ru^2} \pm 2P\left(1 + \frac{P^2}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2P\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

---

* On trouve dans l'original $r^2 u^4 = n^2 - 1$; mais il nous paroît évident que c'eft une méprife de l'Auteur : car en fubftituant cette quantité, on ne parviendroit pas aux valeurs qu'il indique pour $\sin(\varphi + \theta)$, & $\cos(\varphi + \theta)$; mais on les trouve en faifant $\frac{r^2 u^4}{P^2} = n^2 - 1$. Nous avons rétabli ce paffage & les fuivants qui en dépendent.

(79.) Soit $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne $ru^2 \sin\varphi^2=0$.

(80.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, l'on aura $n=3$, ce qui donne $ru^2 \sin\varphi^2=P\sqrt{2}$.

(81.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne $r^2u^2 \sin\varphi^2=2P$.

(82.) La théorie de la tension, ou force, qui agit sur la ficelle, est la même dans ce systême de résistance que dans l'autre; il est seulement nécessaire de substituer dans les formules les valeurs correspondantes des sinus & cosinus des angles φ, θ, & $\varphi+\theta$.

L'expression de l'Art. 20 est . . . .

$\frac{1}{\sin\theta}((P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)-kh\sin\theta)^2+P^2\sin\varphi^2.\sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$: en faisant $\varphi=\theta$, elle devient $(P^2+k^2h^2-2Pkh\cos(\varphi+\theta))^{\frac{1}{2}}=((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$; en mettant pour $\cos(\varphi+\theta)$ sa valeur. Quant à l'expression de l'Art. 13, elle devient $=P$.

(83.) Soit maintenant $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne la tension de la ficelle $=P+kh$, poids du cerf-volant & de la ficelle.

(84.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, l'on aura $n=3$; ce qui donne la tension $=(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(85.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne la tension $=P-kh=$ le poids du Cerf-volant, moins celui de la ficelle.

(86.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend des mêmes éléments que la tension, elle sera la même que dans l'autre systême; c'est-à-dire qu'elle sera égale à la différence des tensions aux extrêmités de la ficelle divisée par k: elle sera donc $=\frac{P}{k}-\frac{1}{k}((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$.

(87.) Soit $u=0$, ou $n=1$, & la hauteur verticale sera $=\frac{P}{k}-\frac{P}{k}-h=-h$.

(88.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, ou $n=3$, la hauteur verticale sera $=\frac{P}{k}-\frac{1}{k}(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(89.) Soit $u=\infty$, ou $n=\infty$, la hauteur verticale sera $=\frac{P}{k}-\frac{P}{k}+h=+h$.

(90.) Pour le cas où le Cerf-volant doit se maintenir dans l'horisontale V, nous aurons (35.) $\frac{P}{k}=\frac{1}{k}((P+kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1})^{\frac{1}{2}}$, ou $2P-kh=\frac{8P}{n+1}$; ce qui donne $n=\frac{6P+kh}{2P-kh}$, & $\frac{r^2u^4}{P^2}=\frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$.

(91.) Jusqu'ici ce systême de résistance ne nous a manifesté aucun

défaut qui autorise à le rejetter ; mais ils se manifestent aussi-tôt qu'on examine avec un peu d'attention les expressions de ces hauteurs verticales. Ayant $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, la hauteur verticale du Cerf-volant est $=\frac{P}{k}-\frac{1}{k}(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$, quantité constante négative, quelles que soient les valeurs de h, de k, & même de P : de sorte que d'après ce systême, le Cerf-volant ne peut pas même s'élever jusqu'à l'horisontale du point V, avec la seule vîtesse du vent $u=\left(\frac{8P^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Or, dans ce systême (644.), $ru^2=\frac{ma^2}{64}u^2$: donc $r=\frac{ma^2}{64}$, ou en faisant la densité de l'air $=m=\frac{64}{29.29}$, & $a^2=9$, on aura $r=\frac{9}{29^2}$, & $r^2=\frac{81}{29^4}$. Le Cerf-volant ne pourra donc pas même s'élever jusqu'à l'horisontale du point V, ayant $u=\frac{29}{3}(8)^{\frac{1}{4}}P^{\frac{1}{2}}$: c'est-à-dire, lorsque la vîtesse du vent est de 12 ½ pieds à peu près * par seconde ; ce qui est évidemment contraire à l'expérience, qui fait voir que cette vîtesse est capable, non-seulement d'élever le Cerf-volant jusqu'à l'horisontale du point V, mais de le mettre presque vertical à ce point, principalement lorsque kh est une petite quantité. En effet, dans l'autre systême de résistance, lorsque u a une valeur aussi grande, on peut négliger toutes les quantités dans lesquelles u ne se trouve pas ; ce qui réduit la hauteur verticale à $\frac{P}{k}-\frac{P}{k}+h=h$. longueur de la ficelle.

(92.) On a vu ci-dessus que l'équation $\frac{r^2u^4}{P^2}=\frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$ doit avoir lieu, pour que le Cerf-volant demeure dans l'horisontale du point V. Substituant dans cette expression $P=\frac{1}{2}$, $k=2000$, $h=1000$, on aura $r^2u^4=12$, ou $u=\frac{29}{3}(12)^{\frac{1}{4}}$, ce qui donne la vîtesse u de plus de 18 pieds par seconde ** ; vîtesse excessive qui est capable de mettre le Cerf-volant en pieces, bien loin de ne pouvoir l'élever

* Par une suite de la faute que nous avons fait remarquer dans la note de l'*Article 74*, l'Auteur trouve 16 p. ¼, au lieu de 12 p. ½ que nous trouvons. Cette vitesse 16 p. ¼ auroit effectivement lieu, en supposant $P=1$; mais, pour conserver l'analogie dans la comparaison des deux systêmes, nous faisons $P=\frac{1}{2}$, quoique l'Auteur n'en avertisse pas. Au surplus, on trouve cette derniere supposition dans l'article suivant.

** Dans l'original, on trouve $r^2u^4=48$, ce qui donne u de plus de 25 pieds ; mais nous avons déjà indiqué l'origine de cette différence. Au reste, cela n'est, comme on voit, d'aucune importance pour les conséquences que l'Auteur déduit de ses calculs.

jusqu'à

jusqu'à l'horisontale du point *V*. Dans l'autre systême, cette même vîtesse élevera le Cerf-volant jusqu'à le mettre sensiblement vertical au point *V*.

Ceci suffit, pour convaincre de la fausseté du systême qui suppose la résistance des Fluides en raison composée doublée des vîtesses & des sinus des angles d'incidence.

APPENDICE II.

L'IMPRESSION de cet ouvrage étoit presque finie, lorsque je reçus d'Angleterre le reste des transactions Philosophiques de la Société Royale, qui étoient nouvellement imprimées. Dans le Volume 51, *Part.* 1, *page* 100, on trouve quelques expériences faites par M. *J. Smeaton*, sous le titre, *An experimental inquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other machines depending on a circular motion.* L'Auteur donne la description d'une petite machine de son invention, dont il a fait usage pour déterminer, par des expériences répétées, la force qu'exerce l'eau, qui, en sortant d'un réservoir par une ouverture, choque les aubes d'une roue verticale, disposée comme celle d'un moulin. Sur l'axe de cette roue s'enveloppe une corde, à laquelle est suspendu un poids qui sert pour mesurer l'effet de la machine. L'Auteur en soumettant ces matieres à un nouvel examen, prouve clairement le peu de confiance qu'il avoit dans les déterminations données jusqu'alors sur les forces, ou résistances, de l'eau. Avant de commencer, il examine les différences qui doivent résulter de faire les expériences avec des modeles, ou de les faire avec des machines en grand, à cause du frottement, qui, comme nous l'avons vu, doit être différent, suivant les différentes dimensions & pesanteurs des pieces qui composent la machine. Pour éviter cette difficulté, il donne une méthode très-ingénieuse pour déterminer les frottements, & en corriger les effets dans les expériences, afin qu'on puisse avoir confiance dans leurs résultats autant qu'il est possible, ou au moins, suffisamment pour connoître la loi suivant laquelle l'eau produit son action.

Nous ne nous arrêterons pas à l'examen, ou à la détermination des forces absolues; nous nous contenterons de faire voir combien

les résultats de ces expériences s'accordent avec la Théorie que nous avons donnée, & combien elles s'éloignent de celle qu'on a enseignée jusqu'ici. Pour cela il suffit de dire que l'effet d'une machine doit se mesurer par le produit du poids qu'elle éleve, par la vîtesse avec laquelle il est élevé: parce que si la vîtesse est zéro, l'effet l'est également, & ce seroit la même chose si le poids étoit zéro. Par-là on voit clairement que si depuis un poids fort petit, on alloit en augmentant graduellement, l'effet de la machine qui éleve ce poids deviendroit de plus en plus grand jusqu'à un certain terme, au de-là duquel il doit diminuer, parce que le poids devenant excessif, la machine ne pourra le mouvoir, & l'effet deviendra zéro. Ce terme où l'effet cesse d'augmenter, est par conséquent le *maximum*, & c'est celui qu'on a toujours cherché pour obtenir le plus grand avantage dans l'usage des machines. La maniere de le trouver, est de calculer premiérement la valeur du poids élevé en fonctions de la puissance, ou de la force motrice; de multiplier cette valeur par la vîtesse du même poids, & de chercher ensuite le *maximum* de cette expression. Cela posé, soit supposé, dans le cas de notre Auteur,

V la vîtesse avec laquelle se meut l'eau choquante;
u la vîtesse des aubes de la roue, & celle du poids;
P le poids;
R le rayon de la roue;
r le rayon de l'axe sur lequel se roule la corde;
F la quantité du frottement résultant du poids de toute la machine.

Il suit de ces dénominations que $V-u$ sera la vîtesse avec laquelle l'eau choque les aubes; & suivant la Théorie qu'on a enseignée jusqu'ici, on peut exprimer la force de l'eau par $A(V-u)^2$, A étant une quantité constante, & son moment par $RA(V-u)^2$. Ce moment doit être égal à celui rP du poids, plus ceux des frottements. Le frottement qui provient du poids peut s'exprimer par nP, n étant un nombre constant quelconque: & celui qui résulte du poids total de la machine par fF, f étant un autre nombre constant quelconque. Nous aurons donc, $RA(V-u)^2=rP+nP+fF$; d'où nous tirerons $P=\frac{RA(V-u)^2-fF}{r+n}$; & $Pu=\frac{RAu(V-u)^2-fFu}{r+n}$. Pour trouver maintenant le *maximum* de cette quantité, nous devons la différencier, & égaler la différencielle à zéro. On aura par conséquent $RAdu(V^2-4Vu+3u^2)-fFdu=0$, ce qui donne $u=\frac{2}{3}V-\left(\frac{fF}{3RA}+\frac{1}{9}V^2\right)^{\frac{1}{2}}$: c'est l'expression de la vîtesse que doivent prendre

les aubes de la roue, & le poids, pour que la machine produise le plus grand effet possible. De sorte qu'on doit proportionner le poids pour obtenir cette vîtesse. Si l'on suppose $F=0$: c'est-à-dire, le frottement nul, on aura $u=\frac{1}{3}V$: c'est ce que nous ont enseigné jusqu'ici tous les Auteurs. La vîtesse V de l'eau devroit donc, suivant cette Théorie, être à la vîtesse u des aubes, abstraction faite du frottement, comme 3 est à 1 : & en ayant égard au frottement, cette raison devroit être encore plus grande; ensorte que, suivant ce systême, la vîtesse des aubes doit être encore moindre que le tiers de la vîtesse de l'eau: or c'est ce que les expériences de M. *Smeaton* contredisent manifestement. Pour s'en convaincre, il ne faut que jetter les yeux sur la *page* 115, *colonne* 12. On y verra clairement la fausseté de ce systême: car on ne trouve pas même une seule expérience parmi les 27 qu'il expose, qui ne donne la vîtesse des aubes plus grande que le tiers de la vîtesse de l'eau: il y en a même quelques unes dans lesquelles la vîtesse des aubes va jusqu'à être la moitié de celle de l'eau.

Pour résoudre maintenant le même cas suivant notre Théorie, nous n'avons qu'à exprimer la force avec laquelle l'eau choque les aubes par $A(V-u)$: ce qui réduira la premiere équation à $RA(V-u)=rP+nP+fF$, & donnera $P=\frac{RA(V-u)-fF}{r+n}$, & $Pu=\frac{RAu(V-u)-fFu}{r+n}$; expression dont la différencielle étant égalée à zéro, donne $RA(V-2u)-fF=0$, & par conséquent $u=\frac{1}{2}V-\frac{fF}{2RA}$: d'où l'on voit que la vîtesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vîtesse de l'eau qui les choque: c'est aussi ce qu'on a trouvé par l'expérience, & ce qui est exprimé à très-peu près dans la *colonne* 12 de la *page* 115 de notre Auteur. Mais ce n'est pas seulement cet accord, qui confirme d'avantage notre Théorie. La quantité A est la constante, qui, multipliée par la vîtesse exprime la résistance, ou la force, du Fluide. Or, cette force (642.) est $=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}u\sin\theta$, ou, à cause de $\sin\theta=1$, $=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}u$: on aura donc $A=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}$; expression dans laquelle ca désigne la section verticale de l'eau dans le canal, ou dans l'orifice par lequel elle sort. Ainsi on voit que plus cette ouverture sera grande, plus la quantité $\frac{fF}{2RA}$ sera petite, & plus la vîtesse u des aubes, & du poids P sera grande. Or, rien n'est plus conforme aux expériences de

l'Auteur. Dans la même *page* 115, on voit qu'il a fait ſes expériences avec ſix orifices différents, les uns plus grands que les autres. Les dix premieres faites avec le plus petit orifice, donnent, en prenant un milieu entr'elles, & ſuppoſant $V = 10$, donnent, dis-je, $u = 3,548$, & $\frac{fF}{2RA} = 1,452$. Les ſept ſecondes faites avec un plus grand orifice donnent $u = 3,89$, & $\frac{fF}{2RA} = 1,11$. Les quatre troiſiemes, avec un autre orifice plus grand, donnent $u = 4,3$, & $\frac{fF}{2RA} = 0,7$. Les trois quatriemes, avec un orifice encore plus grand, donnent $u = 4,53$, & $\frac{fF}{2RA} = 0,47$. Les deux cinquiemes, faites avec un orifice plus grand, donnent $u = 4,775$, & $\frac{fF}{2RA} = 0,225$: & enfin la ſixieme, faite avec le plus grand orifice, donne $u = 5,2$: quantité qui exède de quelque choſe, la plus grande valeur que puiſſe avoir u qui eſt $= 5$, mais cette différence eſt bien petite, en comparaiſon de celles que donnent les autres expériences. La même théorie ne ſera pas moins accréditée, & recevra encore un nouveau dégré de certitude, lorſque, dans le *Tome II*, on l'appliquera à tous les phénomenes que préſentent les mouvements du Navire.

Fin du Tome premier.

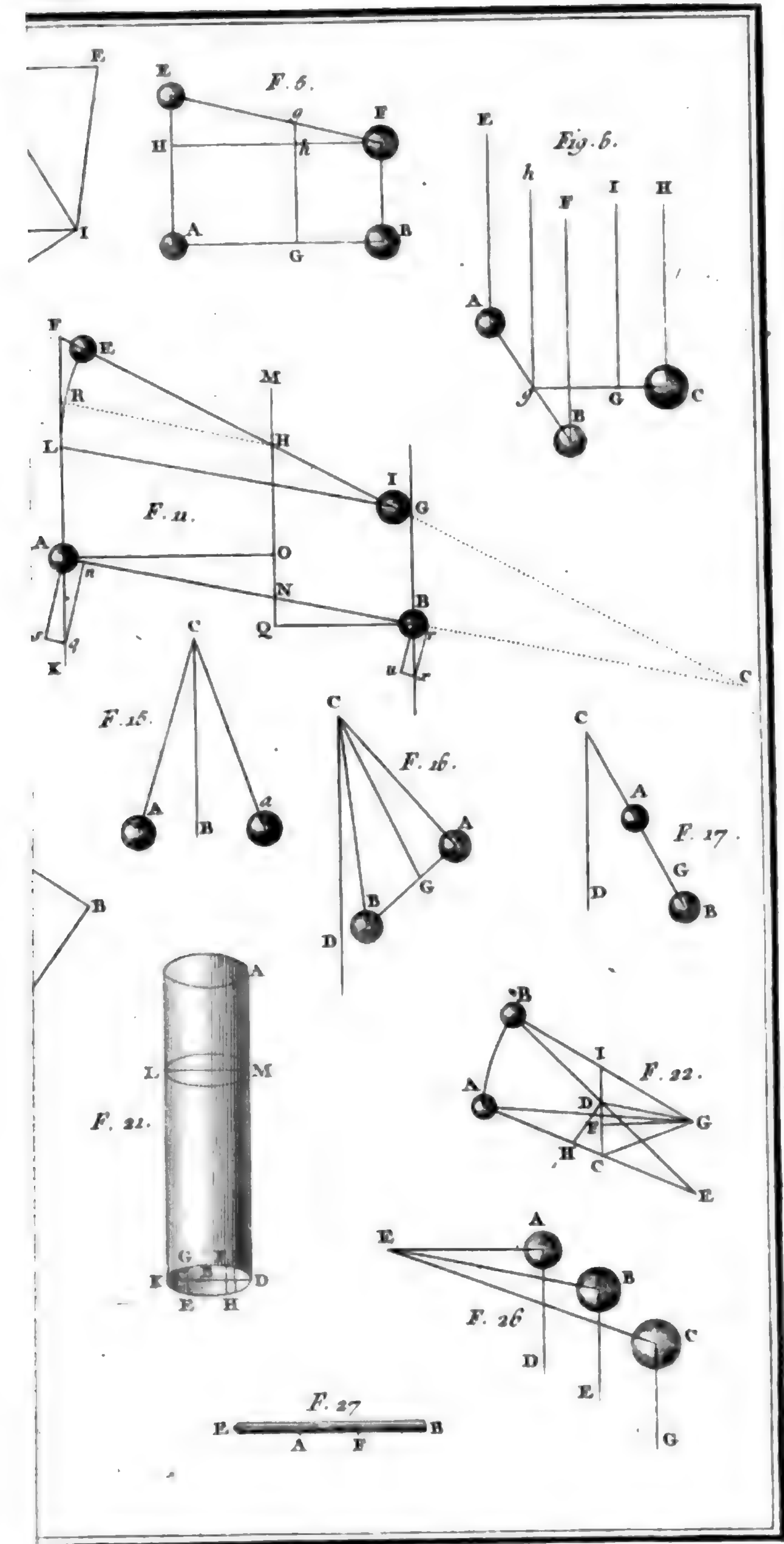
TABLE ALPHABÉTIQUE ET RAISONNÉE

Des Matieres contenues dans ce premier Volume.

N. B. Les Renvois indiquent les *Articles*, & non les *Pages*, à moins qu'on ne l'exprime.

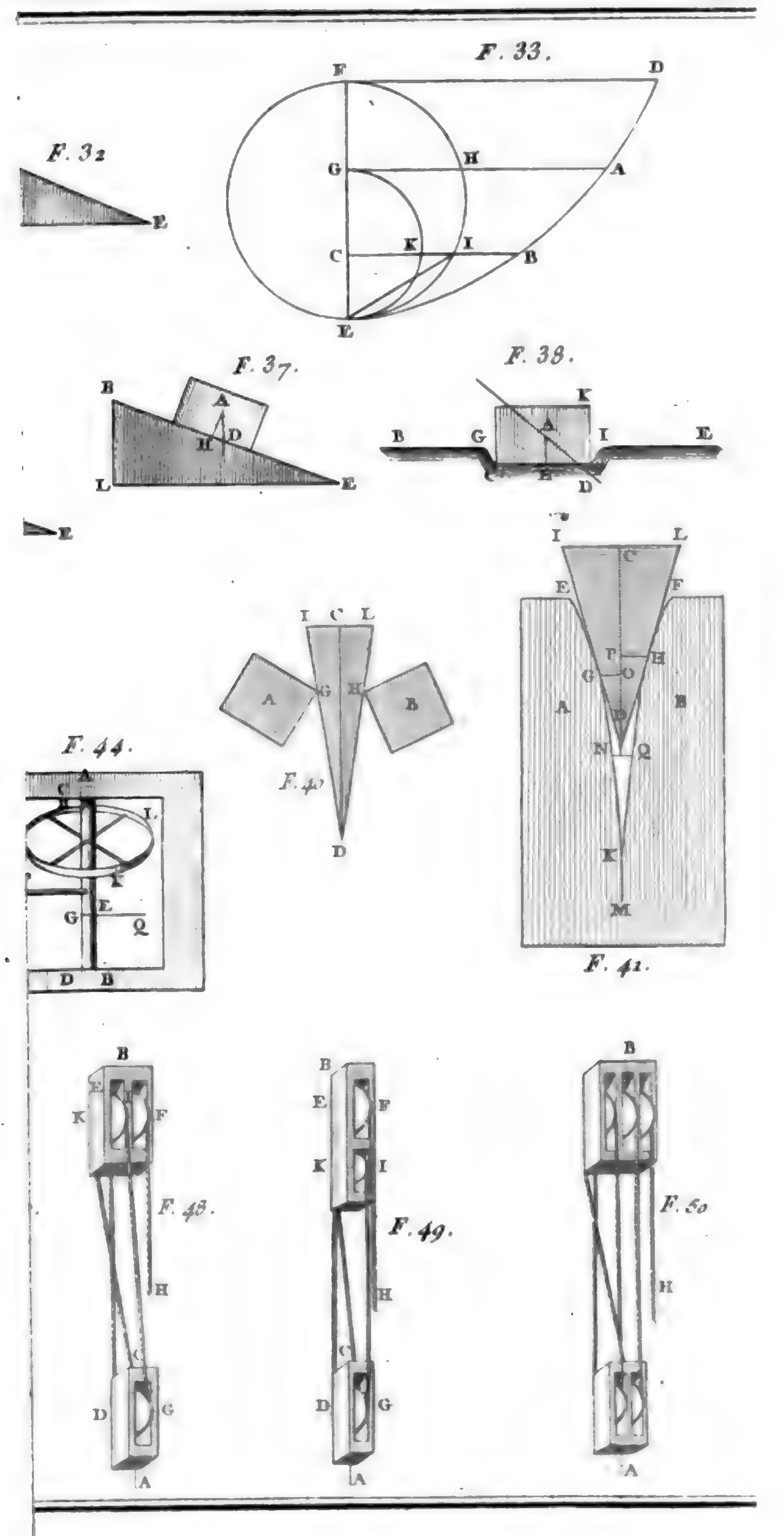
Eiij

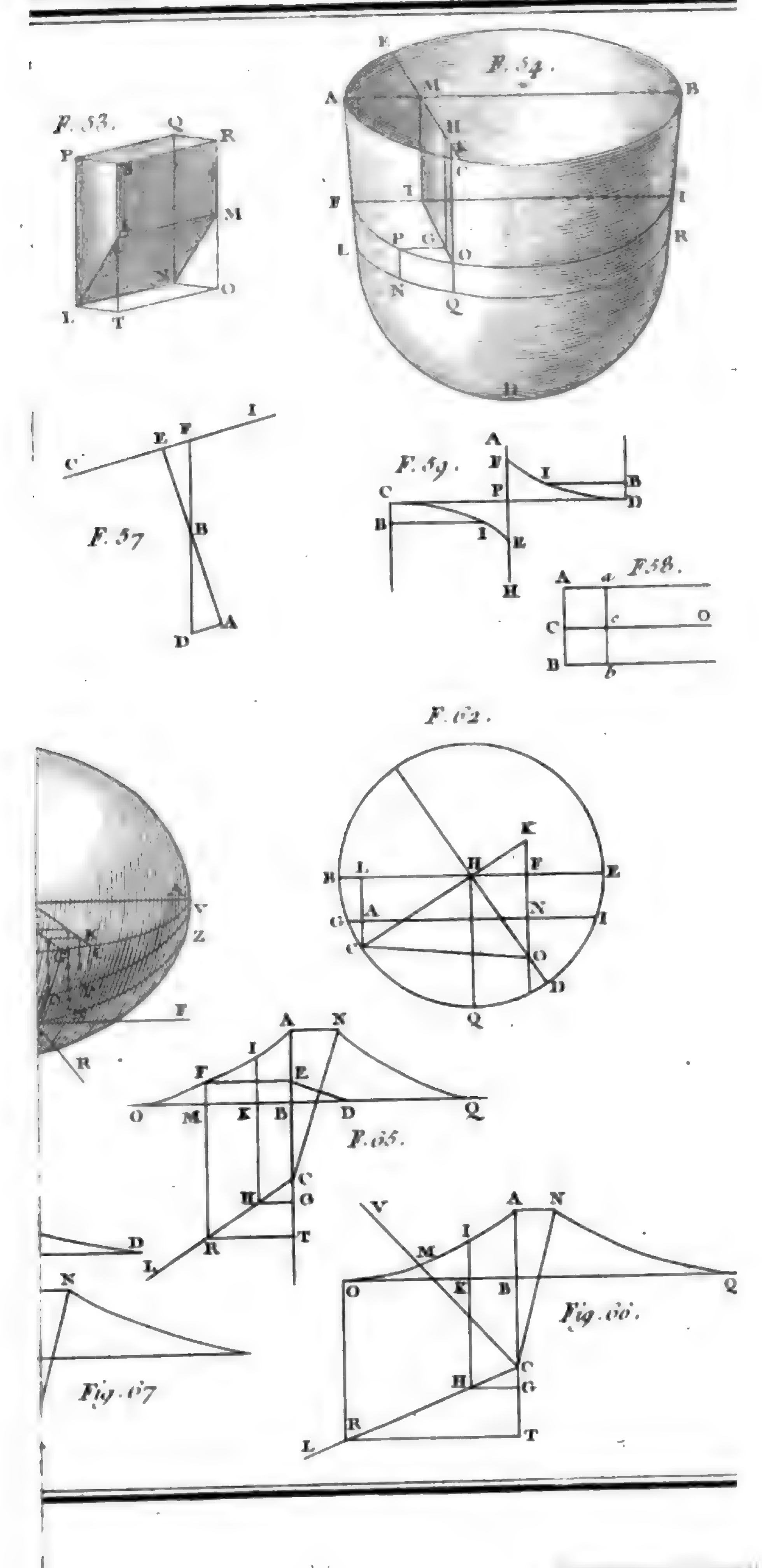
Fin de la Table des Matieres.

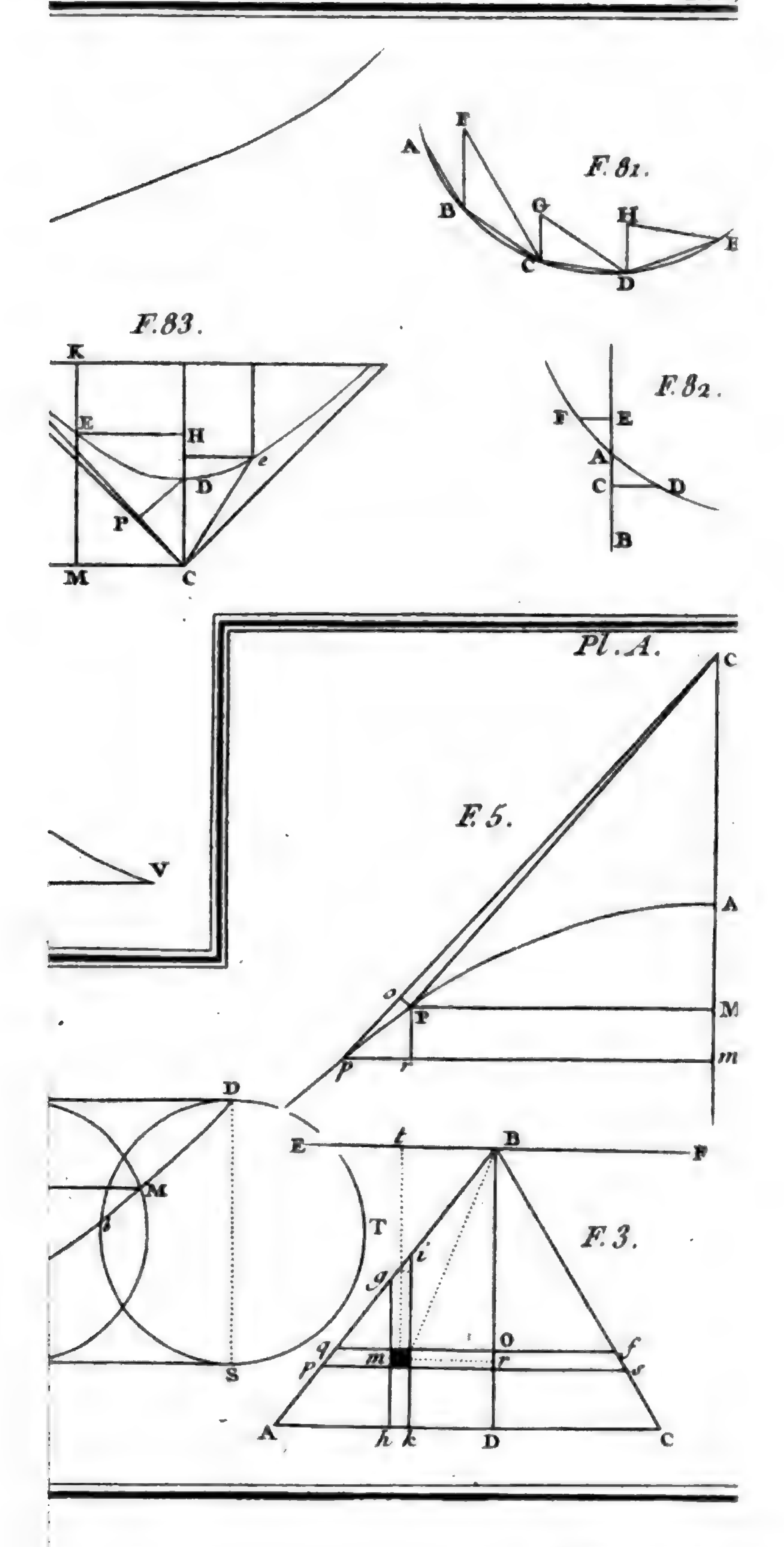


F. 6.
Fig. 6.
F. 11.
F. 15.
F. 16.
F. 17.
F. 21.
F. 22.
F. 26
F. 27

$\therefore 2 : 2^{\frac{3}{2}} :: 2 : 2\sqrt{2},$
$:: 1 : \sqrt{2}$


F. 32
F. 33.
F. 37.
F. 38.
F. 40
F. 41.
F. 44.
F. 48.
F. 49.
F. 50


F. 53.
F. 54.
F. 57
F. 59.
F.58.
F. 62.
F. 65.
Fig. 66.
Fig. 67


F. 81.
A
F
B
G
H
C
D
E
F. 83.
K
E
H
e
D
P
M
C
F. 82.
F
E
A
C
D
B
Pl. A.
C
F. 5.
A
V
o
P
M
p
r
m
D
M
S
T
E
t
B
F
F. 3.
i
g
q
m
O
f
p
r
s
A
h
k
D
C

DE LA CONSTRUCTION

ET

DE LA MANŒUVRE DES VAISSEAUX.

TOME SECOND.

DE LA CONSTRUCTION

ET

DE LA MANOEUVRE DES VAISSEAUX ET AUTRES BÂTIMENTS,

OU

EXAMEN MARITIME THÉORIQUE ET PRATIQUE;

Par Don GEORGE JUAN, Commandeur d'Aliaga dans l'Ordre de Malte, Chef d'Escadre des Armées Navales de Sa Majesté Catholique, Commandant des Gardes de sa Marine, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale de Berlin, et Correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

TRADUIT DE L'ESPAGNOL, AVEC DES ADDITIONS,

Par M. LEVÊQUE, Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris et de celle de Marine, Membre des Académies des Sciences de Bordeaux, Marseille et Rouen, Examinateur Hydrographe et ancien Professeur en Hydrographie et Mathématiques à Nantes.

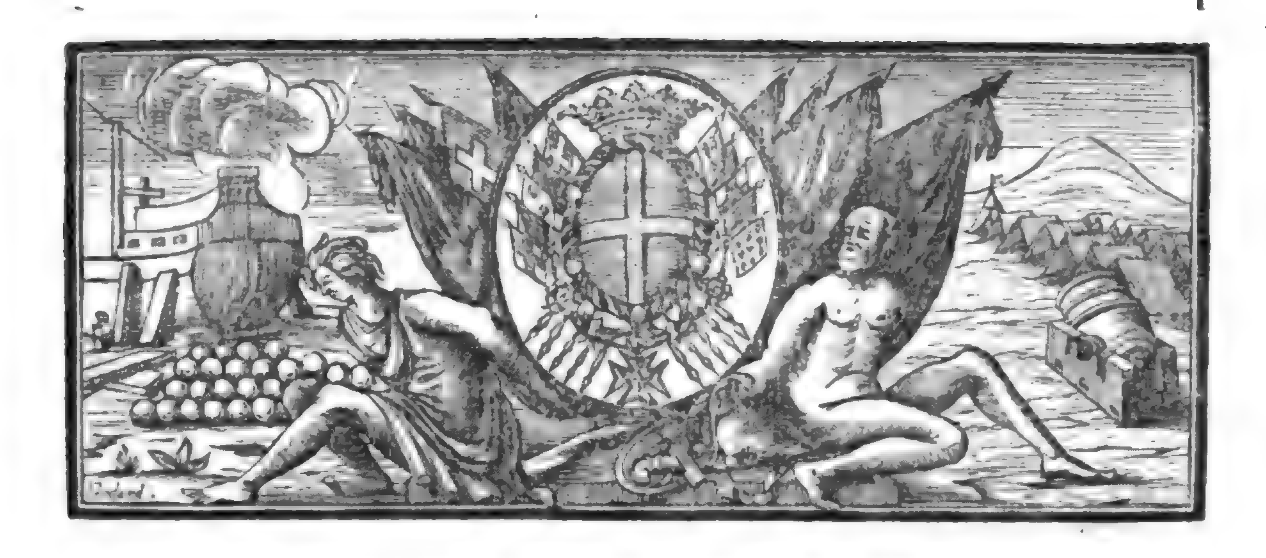
Qui descendunt mare in navibus, facientes operationem in aquis multis: ipsi viderunt opera Domini, et mirabilia ejus in profundo. *Ps.* 106.

TOME SECOND.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine et l'Architecture.

M. DCC. XCII.



EXAMEN MARITIME, THÉORIQUE ET PRATIQUE, OU TRAITÉ DE MÉCHANIQUE,

Appliqué à la Construction & à la Manœuvre des Vaisseaux & autres Bâtiments.

LIVRE PREMIER.

DE LA CONSTRUCTION DU NAVIRE.

CHAPITRE PREMIER.

Du Navire en général, & de ses propriétés.

(1.) LE Navire est un corps flottant destiné à deux usages, le commerce & la guerre. Le Navire de commerce, ou de charge, sert, comme on sçait, à transporter des marchandises, ou autres effets, d'un port à un autre; & la destination du Vaisseau de guerre est de combattre & de

prendre les vaisseaux de l'ennemi, ou d'attaquer les fortifications situées sur les côtes; alors il peut être considéré comme une forteresse flottante. Quel que soit l'objet auquel on destine un Navire, il ne peut manquer d'être d'un poids considérable, lequel est composé de la charge qu'il doit transporter, & du poids des différents matériaux dont il est construit. Il doit, par conséquent, occuper dans le fluide (*Tome I*, 561.) un espace tel que son poids soit égal à celui du volume de l'eau qu'il déplace. On voit que c'est cet espace, ou cette partie du Navire qui est submergée, qui doit éprouver la force de la résistance du fluide dans le cas du mouvement; & les puissances destinées à le mouvoir doivent avoir une certaine proportion avec les résistances, pour lui donner la vîtesse nécessaire. Il y a deux sortes de puissances employées jusqu'ici pour mouvoir les Navires, sçavoir, l'action des rames, & l'action du vent sur les voiles. Les rames, comme chacun le sçait, ne sont autre chose que des pieces de bois avec lesquelles on choque l'eau avec force & rapidité, par leur partie extérieure au Navire; ainsi elles éprouvent une résistance proportionnée, & le Navire se meut à cause de la réaction. Les voiles sont des surfaces en toile, qui étant exposées à l'action des vents, en sont frappées, & par conséquent elles communiquent du mouvement au Navire auquel elles sont assujetties. La premiere de ces deux puissances n'est pas tant en usage que la seconde, parce que le travail des hommes étant ce qui doit produire & maintenir l'action des rames, elle ne peut avoir lieu que pendant un temps assez court, & non pendant plusieurs jours, même plusieurs mois, que durent ordinairement les transports, ou les voyages par mer. Il en est tout autrement des voiles; une fois qu'elles sont exposées dans une situation convenable, elles n'exigent plus aucun travail, à moins que le vent ne vienne à changer, ou qu'il ne soit nécessaire de faire changer la direction du Navire. Quel que soit le moyen qu'on emploie pour mouvoir le Navire, on voit déjà, par ce qu'on vient d'exposer, qu'il doit avoir plusieurs propriétés, ou qualités essentielles pour qu'il puisse remplir l'objet auquel il est destiné. Il doit premiérement être très-fort & très-solide, pour qu'il puisse résister à l'action des forces qui agissent sur lui, & en même temps conserver, sans accident, les effets qu'il contient, & les hommes destinés à le manœuvrer. Il doit être impénétrable au fluide, afin que les effets qu'il renferme ne soient pas gâtés en se mouillant, & que l'eau, en s'introduisant avec trop d'abondance, ne submerge le Navire de plus en plus, & que par conséquent le tout ne vienne à la fin à se perdre. Sa figure & la disposition de toutes ses parties doit être telle qu'il prenne

la plus grande vîteſſe poſſible, afin de terminer ſes traverſées dans le moins de temps poſſible ; ou, ſi c'eſt un vaiſſeau de guerre, pour pouvoir engager, ou éviter, les actions qui ſe préſenteront, ſuivant qu'il peut être convenable. Il doit avoir un corps ou une capacité aſſez grande pour recevoir tous les objets qu'il doit tranſporter, & pour loger commodément ſes équipages, & les hommes qu'il pourroit avoir à tranſporter. Il doit avoir de la ſtabilité ; c'eſt-à-dire qu'il doit réſiſter à l'inclinaiſon que pourroit occaſionner la force du vent dans les voiles, ou d'autres forces accidentelles, quelles qu'elles ſoient. Car le Navire devant être ouvert en pluſieurs endroits, dans les parties qui ſont hors de l'eau, afin d'avoir des communications à l'intérieur, il pourroit arriver que le fluide entrât dans l'intérieur, gâtât les marchandiſes, & peut-être même occaſionnât la perte totale du Navire. Ses deux côtés doivent être d'une figure parfaitement égale & ſemblable ; car il eſt évident que la figure qui auroit les propriétes convenables pour un des côtés, doit néceſſairement avoir celles qui conviennent pour l'autre, & cela dans le même degré. Il doit être diſpoſé de maniere qu'il ſoit aiſé à manœuvrer, & qu'on puiſſe le diriger avec ſûreté & promptitude par la route convenable, non ſeulement pour lui faire ſuivre la plus courte, mais encore pour éviter les dangers, ou autres obſtacles qui peuvent ſe rencontrer ; car un choc violent pourroit cauſer la deſtruction totale du Navire. Enfin, ſi le Navire eſt deſtiné pour la guerre, il doit pouvoir porter ſon artillerie, & être conſtruit de maniere à fournir les moyens de la placer de façon qu'on puiſſe la ſervir commodément, & que l'eau ne puiſſe entrer par les ſabords lorſque le Navire prend quelque inclinaiſon.

(2.) Telles ſont les qualités primitives & eſſentielles du Navire : mais il en eſt encore d'autres qui lui ſont abſolument néceſſaires pour ſe garantir d'un accident qui produit ordinairement ſa deſtruction. Les vents choquent les eaux, les pouſſent, les agitent, & forment ce que tout le monde connoît ſous le nom de *Lames*, leſquelles produiſent les coups de mer. Ces lames étant agitées de plus en plus par l'action répétée des vents, s'élevent à des hauteurs effrayantes, & la ſurface des eaux ceſſant par-là d'être horiſontale, il ſe forme des montagnes de fluide qui choquent avec la plus violente rapidité, & même détruiſent tout ce qu'elles rencontrent dans leur cours. Les lames ſe ſuccédant ſans ceſſe les unes aux autres, donnent un mouvement au Vaiſſeau, non ſeulement en le pouſſant dans la direction qu'elles ſuivent, qui ſe trouve peut-être différente de celle qu'on voudroit qu'il ſuivît ; mais elles l'obligent encore d'être dans un mouvement continuel de rotation autour d'un axe horiſontal ; mouvement qui eſt

plus ou moins violent, ſuivant la grandeur des lames, la diſpoſition, & la figure du Navire. A chaque lame, le Navire doit faire deux oſcillations, l'une de chûte vers la partie oppoſée à celle que choque la lame, & l'autre de réaction à l'inſtant où elle ſe ſépare du Navire. Les lames ayant une auſſi grande rapidité, il faut néceſſairement que les oſcillations, ou mouvements de rotation du Navire ſoient auſſi très-rapides, & que les moments d'inertie qui en réſultent dans toutes les parties du Navire, deviennent énormes, particuliérement dans celles qui ſont les plus éloignées de ſon centre de gravité. On voit déjà que cet accident exige que le vaiſſeau ſoit très-fortement lié dans toutes les parties qui le compoſent; que les ſabords & toutes les parties ſupérieures qui communiquent à l'intérieur ſoient aſſez élevées, pour que, dans les oſcillations, l'eau ne puiſſe entrer dans la capacité, & lorſqu'elle y eſt une fois entrée, il faut que le Navire ſoit diſpoſé de façon à faciliter ſon évacuation. Enfin, cet accident exige encore que la figure du Navire ſoit telle que, ſi l'on ne peut pas éviter entiérement les oſcillations, elle contribue au moins à les rendre les plus petites & les plus lentes que faire ſe peut.

Comme toutes les mers ne ſont pas d'une même violence & d'une même agitation, tous les Navires n'ont pas beſoin d'être conſtruits avec la même ſolidité, & d'avoir la même figure, & les mêmes dimenſions: ils doivent être proportionnés aux parages où ils doivent naviguer, & aux différents uſages auxquels on les deſtine. C'eſt pour cela qu'on trouve une ſi grande variété dans les Navires, non-ſeulement pour ce qui concerne leur figure, la grandeur & les proportions de leur capacité; mais encore dans le nombre & la ſituation des mâts, auxquels on applique leurs voiles, auſſi bien que dans le nombre, la figure & la diſpoſition de ces mêmes voiles. Tous ces objets réunis forment une étude auſſi étendue qu'intéreſſante pour tout le genre humain; & qui, par ſon importance, eſt digne d'occuper les meilleurs eſprits, & de fixer toute leur attention.

(3.) Il y a des Bâtiments dont la longueur * eſt entre trois & quatre fois leur largeur: il en eſt même dont la longueur eſt portée juſqu'à quatre, cinq, ou ſix fois, & même juſqu'à huit fois leur largeur. Il y en a dont la profondeur, ou la hauteur verticale de

* L'Auteur entend ici, par la longueur, non la longueur de la quille, mais celle du Vaiſſeau, de tête en tête: c'eſt ce que les Eſpagnols appellent la *Eslora*; ils donnent le nom de *Manga* à la largeur, priſe dans l'endroit où elle eſt la plus grande. C'eſt cette plus grande largeur que les Marins & les Conſtructeurs Français appellent le *Bau* du Vaiſſeau.

la partie submergée dans le fluide, est la moitié de leur largeur, dans d'autres cette hauteur n'en est que le tiers, & dans d'autres encore moins. On peut, par ce qui a été dit dans le *premier Volume* de cet Ouvrage, déterminer les propriétés particulieres dont ces différentes proportions sont susceptibles. Une pratique continuée pendant plusieurs siecles, aidée d'une théorie fort peu satisfaisante, & qui est encore même fort limitée, a enseigné dans chaque Royaume, dans chaque Province même, ce qu'il convenoit à peu près de faire, & ce qu'il convenoit d'éviter, suivant l'étendue des lumieres, & du génie de ceux qui se chargeoient de cette partie importante. Il est cependant un point sur lequel on est généralement d'accord, c'est de ne pas faire usage des surfaces planes dans la construction des Bâtiments de mer, sur-tout pour ceux qui sont destinés à naviguer dans de grosses mers; c'est avec la plus grande raison qu'on a banni ces surfaces de la construction, car il n'en est point sur lesquelles les coups de mer agissent avec plus de violence, & dont par conséquent ils produisent la destruction avec plus de promptitude & de facilité. PLANC. I.

(4.) D'après ces considérations, & d'autres de la même nature, on en est venu à donner à la partie du corps du Navire, qui est submergée dans le fluide, la figure d'un ellipsoïde, ou de deux demi-ellipsoïdes différents, en faisant celui qui forme la partie choquante du Navire, un peu plus court que celui qui forme la partie choquée; & pour des raisons très-fondées, on a admis encore d'autres différences entre ces ellipsoïdes. Par les mêmes motifs, on auroit encore pu donner aux Bâtiments la figure circulaire, ou sphérique; mais un Bâtiment de cette forme seroit sujet à un grand inconvénient, qui est qu'il ne pourroit naviguer que dans la direction perpendiculaire à la voile: c'est-à-dire, que la section horisontale du Navire étant représentée par *ABDE*, *FG* représentant la voile, & *HC* la direction du vent qui la choque; le Navire ne pourroit marcher que suivant la ligne *CB*, perpendiculaire à *FG*. En effet, la force du vent étant décomposée en deux autres, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la voile; il est clair que la premiere de ces forces n'exercera aucune action sur la voile, puisque son sinus d'incidence est zéro, (*Tome I.* 75.), & que par conséquent le vent n'agit sur la voile que suivant la seconde; de sorte que l'angle *HCB* formé par la direction du vent, & la route du vaisseau doit nécessairement être obtus; d'où l'on voit qu'on perdroit tout l'avantage qu'on se procure aujourd'hui, en donnant aux vaisseaux plus de longueur que de largeur. Car quoique la puis- FIG. I.

PLANC. I. FIG. 2. sance, ou la force qui agit sur la voile *FG*, soit toujours dirigée suivant la perpendiculaire *CB*, la résistance latérale, ou celle qu'éprouve le côté *ADE*, étant toujours plus grande que celle qui s'exerce en avant, ou à la proue *A*, il s'ensuit que la vitesse que prend le vaisseau suivant la proue, ne peut manquer d'être plus grande que celle qu'il prend latéralement, ou suivant une perpendiculaire à *AE*: par conséquent le Vaisseau ne peut marcher suivant *CB*; mais en obéissant à l'impulsion qu'il reçoit dans cette direction, il est obligé de suivre une direction telle que *CI*, intermédiaire entre *CB* & *CA*, & qui est d'autant plus proche de *CA*, que la résistance latérale sera plus grande, relativement à celle qui s'exerce à la proue. On voit clairement par-là qu'il est possible que l'angle *HCI*, formé par la direction du vent & par la route que suit le Navire, soit aigu, & par conséquent qu'un Navire de cette espece aura l'avantage de pouvoir naviguer en partie contre le vent; avantage dont un Navire sphérique seroit absolument privé.

(5.) On observera encore que ces especes de Navires plus longs que larges n'ont aucun désavantage sur les autres pour résister au choc des lames, parce que, lorsquelles deviennent excessives, les Marins sçavent leur présenter l'une ou l'autre extrêmité; & c'est en cela qu'ils ont plus d'avantage que n'en auroient les Navires circulaires, parce que, sous des volumes égaux, les Vaisseaux longs présentent alors moins de surface au choc des lames que n'en présenteroient les sphériques. Ajoutez à cela, que le cours des lames est suivant la direction même *HC* du vent, & qu'elles frappent le Navire dans cette direction; elles lui font par conséquent prendre une direction moyenne entre *CI* & *CK*: d'où l'on voit que si l'on n'avoit pas pris le parti d'alonger les Vaisseaux, à peine pourroient-ils prendre une autre direction que celle du vent; qu'en un mot, ils seroient à la discrétion des vents, ce seroient eux qui en détermineroient la route, & non les hommes qui sont destinés à les manœuvrer & à les diriger.

(6.) Cette même considération a obligé les Marins à remplir les deux extrêmités, ou pointes circulaires *A* & *B* de l'ellipsoïde. Car FIG. 3. *AB* représentant la superficie de l'eau, & *ACB* une section verticale de l'ellipsoïde, si on tire les tangentes *DE*, *AD* & *BE*, on voit qu'en étendant le corps du Navire jusqu'à *ADCEB*, en rendant solides les espaces *ADC*, *CEB*, & faisant ainsi qu'il ne soit pas terminé par la ligne *ACB*, on voit, dis-je, que la résistance latérale sera augmentée, & par conséquent qu'on obtiendra un plus grand avantage pour diriger & maintenir le Vaisseau dans les directions qu'il doit suivre.

(7.) On voit, par ce qui vient d'être dit, que ce n'a pas été ſans des raiſons bien puiſſantes, qu'on s'eſt déterminé à donner de la longueur aux Vaiſſeaux; cependant ſi nous ne perdons pas de vue que plus ils ſont proches de la figure ſphérique, plus ils ſont ſolides, & capables de réſiſter au choc, & aux efforts des lames, nous en concſurons qu'il a été néceſſaire de prendre un milieu. On ne les a donc alongés qu'autant que leur ſûreté l'a permis, & par conſéquent, dans les mers tranquilles & moins expoſées à l'agitation, on a toujours employé des Navires plus longs que dans les autres. On n'a pas encore fixé la vraie proportion entre la longueur & la largeur, parce que, comme on le voit, cette proportion dépend de la nature des mers ſur leſquelles le Navire eſt deſtiné à naviguer; cependant, il paroît conſtaté, par l'expérience, qu'un Navire dont la largeur eſt à peu près la quatrieme partie de la longueur, peut, ſans riſque, être expoſé aux plus violentes agitations de la mer.

(8.) On varie encore ſur la profondeur, ou le creux qu'on donne aux Navires: ceux qui ont le plus de profondeur, qui tirent le plus d'eau, ſont plus expoſés à rencontrer des écueils, des bas-fonds, à échouer, & par conſéquent, à ſe briſer & à ſe perdre: ceux, au contraire, qui ne le ſont pas aſſez, ne peuvent exercer une auſſi grande réſiſtance latérale, & on n'en peut tirer autant d'avantage que des premiers pour ſuivre certaines directions, relativement à celle du vent. Cependant, ſi la proportion entre les réſiſtances latérales, & celles de la proue étoit la même dans l'un & l'autre Navire, il paroît qu'ils pourroient auſſi jouir des mêmes avantages: & la choſe eſt effectivement ainſi, en ne faiſant point attention aux efforts qu'ils ont à ſoutenir de la part des lames; mais comme celles-ci, ſi l'on excepte quelque cas, ſont, pour l'ordinaire, ſuperficielles, leur impulſion doit faire plus d'effet ſur celui qui éprouve moins de réſiſtance, ou qui a le moins de profondeur ou de tirant d'eau, que ſur l'autre. Il a donc encore été néceſſaire de prendre un milieu, à cet égard, principalement à cauſe qu'une plus grande profondeur produit, en même temps, une plus grande réſiſtance à la proue, ou ſuivant la direction de la route du Vaiſſeau, & que, par conſéquent, il eſt néceſſaire d'une plus grande puiſſance, ou d'une plus grande voilure, pour le faire marcher avec la même vîteſſe, ce qui ne laiſſe pas d'être un grand inconvénient, attendu que les plus grandes voiles ſe manœuvrent avec bien plus de difficultés. De toutes ces conſidérations, il a reſulté que ceux qui naviguent dans des mers peu profondes, ont donné à leurs Navires moins de profondeur; mais cependant, à peu de différence près, le creux, ou les

profondeurs qui font en ufage, font entre le tiers & la moitié de la largeur du Navire. On remarquera cependant que cette proportion doit dépendre de la charge que doit porter le Navire, ou réciproquement que la charge doit dépendre de cette proportion; de forte que ces deux chofes, la profondeur & la charge, dépendent néceffairement l'une de l'autre, une fois que la longueur & la largeur font déterminées, comme on le verra par la fuite.

(9.) Ce qui importoit le plus après cela, étoit de trouver le moyen d'obliger le Navire à fe maintenir conftamment, dans la même direction, ou à fe diriger conftamment en ligne droite. Si l'on pouvoit faire enforte que la direction de la force, ou de la puiffance des voiles, coïncidât toujours avec celle des réfiftances qu'éprouve la carene, le Navire ne pourroit prendre aucun mouvement de rotation, c'eft ce qui réfulte des principes établis dans le *Tome I*, *Livre I*, *Chap. IV* de cet Ouvrage. Mais les lames choquent le Navire fans aucune regle, & très-inégalement, tantôt en avant du centre de gravité, tantôt en arriere: & par conféquent, ce font autant de puiffances qui obligent le Navire à tourner, tantôt vers la droite, tantôt vers la gauche, fans obferver aucune proportion. En outre, lorfque le Navire s'incline, foit par l'action du vent, foit par l'agitation des lames, le centre des puiffances, qui eft celui des voiles, change de place à l'égard du centre de gravité, quelque foin qu'on ait pris de les faire coïncider, lorfque le Navire eft en repos: par conféquent, le Navire doit encore tourner par l'effet de cette nouvelle caufe, & être dans un mouvement continuel de rotation, tantôt vers la droite, & tantôt vers la gauche. On voit, par-là, combien il étoit néceffaire de trouver le moyen d'éviter ces mouvements incommodes & préjudiciables, & d'affujettir le Navire à fuivre une feule & même direction. L'expérience a fans doute indiqué ce moyen dès le commencement; il ne falloit, pour cela, que fe procurer une nouvelle puiffance toujours prête à être employée, & qui pût faire équilibre à celles qui obligent le vaiffeau à fortir de fa direction. Par exemple, fi, par l'un ou l'autre côté du Vaiffeau, on plonge une furface quelconque dans le fluide, la réfiftance fera alors plus grande du côté où elle fera plongée, & par conféquent l'augmentation de réfiftance que cette furface produit, peut tenir lieu de la nouvelle puiffance qui eft néceffaire pour faire équilibre aux autres; c'eft-à-dire, pour détruire leur effet. Mais les Marins fe font avancés beaucoup davantage, & ont finguliérement perfectionné cette idée; car de faire paffer ainfi une furface tantôt d'un côté du Navire, tantôt de l'autre, & l'y affujettir, ce feroit un travail

continuel & insupportable, & ils l'ont évité en plaçant la surface à demeure sur des gonds à l'extrêmité de la poupe du navire: pouvant, par ce moyen, la faire tourner sur ses gonds, d'un côté & de l'autre, on la fait passer, avec facilité, du côté où elle est nécessaire, & cela avec toute la promptitude dont on peut avoir besoin; c'est cette surface, ainsi placée, qu'on appelle le *Gouvernail.* Ce nom lui convient parfaitement, parce que c'est elle en effet qui maintient le Navire dans la direction qu'il doit tenir, qui donne le moyen de le conduire par le chemin le plus direct, & qu'en un mot, c'est elle qui le gouverne. Ce n'est cependant pas que l'effet du gouvernail soit tel, qu'il dirige le Navire avec une telle précision qu'il ne sorte absolument pas de la ligne droite; car le gouvernail ne peut être employé que quand on a déjà apperçu l'effet d'une autre puissance extérieure qui a fait sortir le Navire de sa direction, & auparavant qu'on y ait apporté remede, de toute nécessité cette puissance a déjà produit en partie son effet: par conséquent la route du Vaisseau ne peut manquer d'être un peu tortueuse, & l'art de bien gouverner consiste en ce qu'elle le soit le moins qu'il est possible.

(10.) On parvient encore à la même fin, par la disposition des différentes voiles que les Marins font porter aux Vaisseaux; car ces voiles étant appliquées à différents mâts placés à différentes distances du centre de gravité, on peut employer celles qui sont nécessaires, & les disposer d'une maniere convenable pour conserver l'équilibre entre elles, c'est-à-dire, entre les efforts du vent, entre les résistances, chocs, ou efforts des lames, & les puissances que les inclinaisons que le Vaisseau peut prendre, peuvent faire naître.

(11.) Cette pluralité de voiles & de mâts est devenue aussi absolument nécessaire dans les grands Navires, afin d'augmenter la puissance motrice, sans augmenter la grandeur de la voile & du mât, ce qui auroit de très-grands inconvénients. Car les mâts & les voiles devenant d'une grandeur excessive, la manœuvre des voiles deviendroit impratiquable, & les mâts seroient très-exposés à se rompre, ou détruiroient les Vaisseaux par les énormes moments d'inertie avec lesquels ils agissent, lesquels moments sont produits par les mouvements de rotation qui résultent du choc & de l'agitation des lames.

(12.) On a été obligé de partager l'intérieur du Navire en plusieurs étages, par des planchers qu'on appelle des *Ponts*, & cela principalement dans les grands Navires: car l'impossibilité où l'on est de se procurer des bois d'une longueur suffisante, & qui aient la courbure convenable, fait que le corps du Navire n'est qu'un assemblage de différentes pieces unies entr'elles; & si l'on n'avoit pas mis les ponts

PLANC. I. en pratique, cet assemblage n'auroit point eu toute la solidité nécessaire, & auroit été également incapable de résister au poids, ou à la poussée des eaux vers l'intérieur, & à l'action des lames. Ces ponts sont comme des arcs-boutants, ils soutiennent mutuellement les deux côtés du Navire, & les unissent l'un à l'autre. En outre, les ponts étant horisontaux, ils servent à distribuer convenablement l'artillerie, donnent un abri à différents objets, & fournissent des logements pour les équipages. Au reste, cette liaison des côtés, par le moyen des ponts, est tellement indispensable, que, dans les petites Embarcations même, où de tels planchers seroient impraticables, ou inutiles, attendu le peu d'intervalle qu'il y auroit entr'eux, on ne laisse pas d'y placer les solives sur lesquelles ont eût établi le pont, & que l'on appelle des *Baux* : car, sans cette précaution, le Bâtiment ne seroit pas en état de supporter le moindre effort. Les poids dont les ponts sont chargés, agissent puissamment sur les baux par la force d'inertie qui en résulte dans les mouvements du Navire, & les baux transmettent cette action aux côtés du Navire; de sorte que l'effet de cette puissance est de rompre la liaison des baux avec les côtés, & de les écarter de la situation qu'on leur a donnée dans la construction, en leur occasionnant un mouvement continuel & très-préjudiciable. C'est pour cela que les baux doivent être assujettis aux côtés du Navire, de la maniere la plus solide, afin d'éviter le moindre mouvement, ou le moindre jeu qu'il pourroit y avoir entre les pieces.

(13.) Les figures & les dispositions qu'on a données aux Voiles, sont très-variées, & quoiqu'au premier coup-d'œil cela puisse paroître indifférent quant à l'effet; cependant les unes & les autres ont leurs avantages particuliers, qui les rendent préférables suivant les circonstances. Il y en a de la forme d'un parallélogramme, de trapezoïdes, & de triangulaires, que les Marins distinguent sous les noms de *Voiles quarrées*, & de *Voiles latines**. Il y en a d'autres qui different un

FIG. 3. peu de celles-là; mais elles sont toujours de la même espece. A l'extrêmité supérieure A d'un mât vertical AB, on attache une piece de bois horisontale CD, qu'on appelle une *Vergue*, à laquelle est suspendue la voile quadrilatere $DCEF$: cette voile est assujettie au Na-

* Pour nous conformer à l'usage des Marins Français, nous ne distinguons ici que deux especes de voiles; sçavoir: les *Voiles quarrés* & les *Voiles latines*. Les Espagnols donnent un nom particulier aux deux especes de voiles quadrilateres; ils appellent *Vela Redonda* celle qui a à peu près la figure d'un parallélogramme, *Fig.* 4; & *Vela Cangreja* celle qui a la figure d'un trapese, *Fig.* 6. (FIG. 4 & 6.) Ces dernieres voiles, qu'on appelle quelquefois *Voiles Auriques*, ont, le plus souvent, comme on le voit dans le texte, deux vergues, l'inférieure EF s'appelle le *Guy*, ou la *Baume*, & la supérieure le *Pic*. Les Brigantins, les Chasse-marées, les Cutters, les Goëlettes, les Sloops, & très-souvent les Embarcations qui portent le nom de *Bateaux*, ont leur voile principale de cette espece.

vire

vire par ses deux extrêmités inférieures E & F, c'est précisément celle qu'on nomme *Voile quarrée.* Pareillement, au mât AB on attache obliquement la vergue CD, à laquelle est suspendue la voile triangulaire DCF, dont on assujettit l'extrêmité F au Navire, & c'est celle qu'on appelle *Voile latine.* De même, au mât AB on attache deux vergues AD, EF, & on suspend, entr'elles & le mât, une voile $DAEF$, qui a la forme d'un trapese; c'est cette voile qu'on peut appeller *Voile trapezoïde*, mais que nous nommerons encore *Voile quarrée*, pour nous conformer à l'usage. Chacune de ces voiles a ses avantages & ses défauts: les premieres conviennent mieux que les autres pour les résistances; mais elles ne peuvent pas se disposer sous un angle aussi avantageux à l'égard du vent que les autres: ce à quoi contribue beaucoup non-seulement la figure même de la voile, mais encore la situation des haubans & autres cordages, qui assujettissent les mâts, & les rendent stables dans la position qu'on leur a donnée. L'art de déferler & de ferler les voiles, de les orienter de la maniere la plus convenable à l'objet qu'on se propose, &c.; de même que celui de gouverner & de faire tourner à propos le Navire, est ce qu'on appelle la *Manœuvre.* Comme ces différentes opérations se présentent continuellement, elles sont la principale occupation du Marin. Pour arriver à une connoissance parfaite des avantages des différentes voiles, de même que de ceux qui peuvent résulter de la figure, & de la disposition du corps du Navire, il faut absolument la théorie que nous avons donnée dans le premier Volume de cet Ouvrage; c'est aussi de cette théorie que nous ferons l'application dans les Chapitres suivants.

PLANC. I. FIG. 5.

FIG. 6.

CHAPITRE II.

De la variété infinie qu'il peut y avoir dans la Carene des Vaisseaux, & de la Construction du corps du Navire, suivant la pratique la plus ancienne.

(14.) APRÈS avoir déterminé la longueur & la largeur du Navire, il paroît que toute sa figure devroit être déterminée, & en effet elle le seroit, s'il étoit un ellipsoïde, comme nous l'avons dit; mais l'expérience nous a appris qu'il étoit nécessaire de s'éloigner un peu de cette figure, en élargissant davantage le Navire du côté de l'avant, c'est-à dire, vers la proue, & en l'étrécissant, au contraire, en le

rendant plus fin vers l'arriere, ou vers la poupe. La théorie ne manifeste pas moins cette nécessité, comme on le verra dans la suite: mais que la figure, approchante de l'ellipsoïde, soit à peu près celle qu'on voudra, cela ne fait rien pour la maniere de construire le Navire, qui est toujours à peu près la même. Pour y parvenir, les
Fig. 7. Constructeurs ont coutume d'établir d'abord une longue piece de bois *AB*, de la forme d'un parallélipipede rectangle, qu'on appelle la *Quille*, & qui fait le même effet, pour le corps du Navire, que l'épine du dos pour celui des animaux; car c'est sur la quille qu'on éleve des especes de côtes *C*, *D*, *F*, *H* & *I*, qu'on nomme *Couples de Levée*, & à ses extrémités *B* & *A*, deux pieces *BK*, *AL*, la premiere courbe, appellée l'*Etrave*, & l'autre droite, appellée l'*Etambot*. On remplit ensuite les espaces compris entre les couples de levée par d'autres couples qu'on appelle *Couples de Remplissage*, jusqu'à ce qu'ils se touchent à peu près. Par ce moyen le corps du Navire se trouve tout formé, il n'y a plus qu'à le revêtir en planches appellées *Bordages*; c'est ce dernier travail qu'on appelle *Border*.

Pour tracer le contour des couples, les Constructeurs considerent différentes lignes; la principale est celle *LCDFHI* qui passe par tous les points de la plus grande largeur des couples; ils l'appellent la *Ligne du Fort*: elle divise le corps du Navire en deux parties, l'une supérieure qu'on appelle les *Œuvres mortes*, & l'autre inférieure qu'on nomme les *Œuvres vives*, ou les fonds du Navire. Les œuvres vives, ou les fonds, se divisent pareillement en deux autres parties séparées l'une de l'autre par la ligne *LGEMNO*. Conformément à nos regles, nous nommerons la partie supérieure *LCGDEFMHNIO*, le *Corps principal du Navire*; & l'inférieure, qu'on pourroit appeller les *Façons du Navire*, & qui s'étend depuis le corps principal jusqu'à la quille, est ce que les Espagnols appellent *Revers**; nom générique que les Constructeurs donnent à toute portion de charpente, & même à toute piece de bois qui est concave. La ligne *LGEMNO* qui termine le corps principal, n'a pas de nom dans la Langue Espagnole, parce que nos Constructeurs, ainsi que les Français, ne font point usage de cette division du corps du Navire en deux parties, pour distinguer la supérieure qui est le corps principal. Les Anglais, qui avec d'autres Nations, en font en partie usage, l'appellent *raising Line* (*Linea del arrufo*, ligne de relevement, ou des *façons*), nous l'appellerons *Ligne* de *tonture***; les mots *raising*,

* Cette expression n'est gueres en usage en France, que pour les *Genoux* & les *Allonges*, & non pour désigner une portion du corps du Vaisseau; nous l'emploîrons cependant quelquefois dans le sens de l'Auteur, parce que nous n'en avons pas qui y réponde parfaitement.

** L'Auteur a traduit l'expression Anglaise *raising Line* par *Linea del arrufo*, & nous la ren-

arrufo, & *tonture*, exprimant l'état d'une ligne, ou d'un plan, qui va en s'élevant depuis le milieu du Navire, tant vers la poupe que vers la proue. Mais ce mot étant employé généralement pour toutes les lignes, ou pour tous les plans qui ont cette propriété, il est nécessaire de distinguer la ligne qui termine le corps principal, ainsi nous l'appellerons *Ligne de tonture du corps principal*. La ligne *QRSTV*, qui passe par les extrémités des couples s'appelle *Ligne du Plat-bord*, parce qu'on donne le nom de plat-bord au revêtement horisontal qui couronne l'œuvre morte du Vaisseau; mais comme il est généralement d'usage d'alonger les couples de l'arriere de *Q* en *R*, & ceux de l'avant de *T* en *V*, de quelque chose au-dessus du terme marqué par cette ligne, pour se procurer plus de logements & de plus grandes commodités, & qu'ainsi il y a plusieurs especes de plat-bords, on pourroit la nommer plus convenablement *Ligne du Cordon*, ou simplement le *Cordon* *; parce que la *Préceinte du Vibord*, qui passe précisément par tous les points de cette ligne, & termine l'œuvre morte comprise entre les deux gaillards, est travaillée sur sa face, & forme un cordon, ou plinthe, tout au tour du Vaisseau. Toutes ces lignes, ainsi que beaucoup d'autres, que les Constructeurs considerent, doivent être courbes ou droites; mais elles doivent être bien suivies, & d'une continuité parfaite, c'est-à-dire que toute section du Navire, soit horisontale, soit verticale, ou oblique, doit être une ligne bien suivie, sans aucuns fauts ou jarrets, afin que les bordages, qu'on cloue ensuite sur les couples, puissent s'y appliquer exactement, & former une surface continue & sans inégalité. Cette condition est nécessaire, non-seulement pour que le bordage soit bien suivi, & pour la solidité & sûreté du Navire, mais encore pour qu'il marche aussi bien qu'il est possible : car toute cavité & élevation dans la suite de la carene, ne pourroit qu'occasionner une nouvelle résistance que le Vaisseau auroit à surmonter, ce qu'il ne pourroit faire sans retarder son sillage : il en pourroit encore résulter des mouvements subits & violents, ce qu'on ne sçauroit trop éviter, à cause des grandes forces d'inertie qui en résultent.

(16.) Comme la variété des lignes qu'on peut tracer est infinie,

---

dons par l'expression *Ligne de tonture*, parce que les Espagnols appellent *arrufo* ce que nous appellons *tonture* : on le voit d'ailleurs par la définition que l'Auteur donne des mots *arrufo*, & *raising*, laquelle convient parfaitement au mot *tonture*. Au reste, cette ligne n'étant encore point en usage chez les Constructeurs Français, il falloit lui donner un nom, & nous nous arrêtons à celui qui nous paroît avoir le plus d'analogie avec les usages & la forme de cette courbe. Cette ligne répond à peu près à celle que nos Constructeurs appellent *Lisse des fonds*, ou *des façons*.

* En Espagnol, *Linea del galon*, ligne du *galon*, ou de la *bordure*.

de même les différentes lignes *LGEMNO*, *LCDFHI* qui terminent le corps principal, peuvent être variées à l'infini, ainsi que les lignes *LCDFHI*, *QRSTV* qui terminent l'œuvre morte; par conséquent le corps des Navires, & les Navires même en entier, peuvent avoir une infinité de figures différentes, qui leur donneront des qualités & des propriétés variées à l'infini; car c'est de la figure du corps du Navire que dépend, non-seulement, le plus, ou le moins de résistance qu'il peut éprouver dans son mouvement; mais encore sa stabilité, ses oscillations, sa docilité à obéir au gouvernail, sa flottaison, & une infinité d'autres circonstances.

(17.) Quoique nous ayons fait voir qu'il pouvoit résulter une infinité de Navires de qualités & propriétés différentes, de la seule variation des lignes dont nous venons de parler, nous n'avons cependant pas encore donné à cette diversité toute l'extension possible: car ces lignes peuvent être placées à des hauteurs plus ou moins grandes, c'est-à-dire, être plus ou moins éloignées de la quille; & malgré cela, elles ne déterminent encore que les largeurs & les profondeurs du corps; toutes les sections qu'on peut faire entr'elles demeurent indéterminées, & peuvent avoir une variété infinie; de-là, une nouvelle source de variétés dans le corps du Navire, & par conséquent dans ses propriétés. C'est cette diversité infinie qui est cause que la théorie & la pratique de la Construction n'ont point fait les progrès nécessaires, & qu'on eût pu désirer. Toutes les tentatives de la pratique n'ont pas été suffisantes pour faire démêler, dans cette variété infinie, ce qui pourroit être le plus avantageux; & une théorie fondée sur des principes erronnés, ne pouvoit gueres servir à l'examen, & à la discussion des procédés & des principes qui pouvoient effectivement être défectueux. Cependant, les Constructeurs, qui auparavant n'avoient pour guide, dans leurs ouvrages, qu'une pratique aveugle, en élevant leurs Vaisseaux sur un très-petit nombre de données, même sur beaucoup moins que celles que nous avons établies jusqu'ici, se sont enfin astreints, depuis quelque temps, à tracer des Plans. Par-là ils sont parvenus à se perfectionner beaucoup; car non-seulement, à l'inspection seule du Plan, ils ont pu appercevoir, & par conséquent corriger quelques défauts; mais encore les Plans leur fournissant le moyen de conserver la totalité des dimensions, & la figure totale du corps des Navires qu'ils construisent, à mesure que la pratique & l'expérience leur ont fait observer quelques défauts, ils ont tâché de les corriger, conformément à ce que leur dictoit la prudence & la raison. Si on ne parvenoit pas tout d'un coup à trouver la cause

du mal, par une seconde, ou une troisieme tentative, on tâchoit d'obtenir quelque avantage. C'est à l'aide de toutes ces tentatives que se sont conduits, & se conduisent encore, les Constructeurs; & quoiqu'ils soient encore bien éloignés de la perfection à laquelle quelques Théoriciens ont cru être parvenus, on ne peut voir sans admiration combien ils en ont approché; tant une répétition continuelle d'expériences peut fournir de lumieres, & produire d'avantages. PLANC. III.

(18.) Les anciens Constructeurs, comme nous l'avons dit, n'ont pas connu l'art de tracer les Plans, & même aujourd'hui il en est encore beaucoup qui n'en connoissent nullement l'usage, particuliérement ceux qui construisent des Barques, & autres petits Bâtiments *. Voici comment ils s'y prennent pour construire le corps d'une de ces Embarcations. Après avoir établi la quille *AB* dans un lieu convenable, & après avoir élevé dans un même plan vertical, l'étambot *AL*, & l'étrave *BK*, & leur avoir donné, à volonté, les inclinaisons *LAS*, *KBT*, qu'on nomme *Quête* & *Élancement*, ils forment arbitrairement, ou selon les instructions qu'ils ont reçues par tradition, une *Tablette*, ou patron *CDE*, qu'on appelle un *Gabari*, lequel représente presque toute la forme du plus grand couple, c'est-à-dire, de celui qui a la plus grande capacité, qu'on appelle, pour cela, le *Maître couple*. C'est en effet sur ce *Gabari* qu'on construit ce couple, en observant de lui donner les épaisseurs convenables. Ensuite on l'éleve en o, sur la quille, éloigné de l'extrêmité *A*, des deux tiers de la longueur de la quille, à fort peu près, en faisant ensorte qu'il lui soit exactement perpendiculaire. FIG. 8. FIG. 9. FIG. 8.

(19.) Le contour du *Gabari CDE*, est formé par plusieurs arcs de cercle, comme par exemple, par les trois arcs *CF*, *FG*, *GH*, dont les centres sont en *N*, *P*, *O*, & par une ligne droite *HE*, pa- FIG. 9.

* Il y a encore, même en France, beaucoup de Constructeurs qui entreprennent des Bâtiments d'une très-grande conséquence, sans en tracer le Plan, ils feroient même fort embarrassés pour faire ce travail. A la vérité, ces Constructeurs ne sont gueres autre chose que des Charpentiers. Cependant nous avons souvent vu ces ouvriers employés de préférence à des Constructeurs d'un talent bien distingué. On ne sçauroit trop gémir de ces abus; c'est en décourageant ainsi ceux qui cultivent leur art avec soin, qu'on porte les coups les plus funestes aux sciences, qu'on retarde les progrès de tous les arts, & qu'on perpétue le regne de l'ignorance. Ceux qui font construire des Navires devroient exiger du Constructeur autre chose qu'un devis estimatif. Un Plan en grand & bien circonstancié, feroit sans doute très-utile. On en exige bien des Architectes pour la construction & distribution des Maisons les plus simples, & même pour les décorations les moins importantes. Par-là, les Constructeurs s'accoutumeroient à regarder ce talent comme une partie essentielle de leur état. En effet, c'en est une; car on ne peut douter que ce ne soit depuis qu'on a pris le parti de dresser le Plan des Vaisseaux, que l'Architecture Navale a fait tous les progrès dont nous retirons le fruit. On feroit d'ailleurs souvent en état de remédier en partie aux défauts qu'on auroit observés dans les Bâtiments.

PLANC. III. rallele à CQ, perpendiculaire à OH, & tangente à l'arc inférieur dans le point H. Cette figure peut être encore formée seulement par deux arcs de cercle, même par un seul arc, ou même encore par une courbe quelconque: les seules conditions qu'on exige sont, que l'arc CF tombe perpendiculairement sur la droite CQ, qui représente la plus grande largeur du couple, ou du gabari, & que l'arc GH tombe aussi perpendiculairement sur la droite OH, qui est perpendiculaire à CQ, ou parallele à QI, qui représente un plan vertical qui doit partager le Navire suivant sa longueur en deux parties égales. La derniere condition n'est pas même si essentielle qu'on ne puisse s'en dispenser; car on pourroit fort bien terminer la courbe comme on voudroit, dans le point I de la quille où le couple doit être placé. De ce même point I on tire la tangente IH à la courbe du gabari, & la figure $CFDHI$ du couple, est entiérement formée; on le travaille ensuite suivant ce patron,
FIG. 8. & on l'éleve en o, comme on l'a déjà expliqué.

FIG. 10. (20.) On forme de la même maniere l'autre petit couple $ABCD$, qu'on appelle l'*Estain*, dont la plus grande largeur AE, est à peu près les deux tiers du *Bau* du Navire, ou de la plus grande largeur du maitre couple. Sa partie inférieure D est fixée & clouée à l'étambot au point D, & on lui donne une inclinaison DC qui
FIG. 8. correspond à celle qu'on a donnée à l'étambot, afin que le point C se fixe à une piece de bois qui croise l'étambot, qu'on appelle *Lisse d'Hourdy*.

(21.) Ces deux couples une fois déterminés, les anciens Constructeurs trouvoient en avoir suffisamment pour construire tous les autres, & même les Constructeurs de ce siecle qui ne se sont point occupés de la théorie de leur art, sont dans le même cas. Ils placent quatre regles, ou pieces de bois un peu épaisses, mais flexibles EF, qu'on appelle des *Lisses*, qui courent depuis les estains, ou depuis la poupe du Vaisseau, jusqu'à l'étrave, en embrassant le maître couple, & ils leur donnent la courbure que leur pratique leur a enseignée, en observant quelques proportions qu'ils ont apprises de leurs maîtres. Ils observent particuliérement de donner à la plus haute de ces lisses qui doit passer par les plus grandes largeurs que doivent avoir les couples, une certaine amplitude, ou ouverture, dans les points G & H, où doivent être placés les deux couples nommés *Couples de Balancement*, qui sont éloignés de chacune des deux extrêmités du Navire de la quatrieme partie de sa longueur *; & ils propor-

* Il y avoit sur ce point quelque variation parmi les Constructeurs, & sur-tout pour la situation

tionnent cette ouverture en *G* & *H*, à la capacité qu'ils veulent donner au corps du Navire. En effet, il faut convenir que la position & la courbure de ces quatre lisses étant déterminées, toute la figure du corps du Navire l'est aussi presque entiérement. PLANC. III.

(22.) Ils marquent ensuite sur la quille les points 3, 6, 9, 12, &c., & *III*, *VI*, *IX*, *XII*, &c. où doivent s'élever les autres couples, qui ordinairement sont placés à égale distance les uns des autres; & guidés par les lisses, ils prennent, avec des tablettes minces, la figure que doivent avoir les couples qui passent par ces différents points, en s'assujettissant à prendre toujours cette figure, dans un même plan perpendiculaire à la quille; & avec ces tablettes, ou patrons, ils construisent les couples, & les élevent ensuite perpendiculairement dans les points correspondants. Le corps du Navire se trouvant ainsi formé, il n'y a plus qu'à le couvrir de bordages, c'est-à-dire, à le border *.

(23.) D'autres Constructeurs se sont plus avancés, & ont mis plus de précision dans leur pratique. Le gabari *CFDE*, dont nous venons de parler, leur sert à déterminer la figure de tous les couples compris entre les deux couples de balancement. Pour cela, ils déterminent d'abord, par une ligne comme *IMN*, la tonture qu'ils veulent donner au corps principal entre ces deux termes, & ils marquent sur de petites regles, ou tablettes *A* & *B*, l'élévation de cette ligne au-dessus de la quille, dans les points où doivent être placés chacun des couples. Ils déterminent pareillement, par la ligne *NOP*, la courbure que doit avoir le côté du Navire, ou la ligne du fort, entre les mêmes termes; & sur d'autres petites tablettes *A'*, *B'*, ils marquent les différences entre la largeur que doivent avoir chacun des couples, & celle que doit avoir le maître couple, qui est la plus grande, ou les différences entre les largeurs que termine la lisse la plus élevée *EF* **. Ceci fait, & supposant qu'il soit question de décrire le couple 18, ils portent sur *QC*, la distance *QA* égale à la distance entre les points 0 & 18, prise sur la tablette *A'*; & menant la ligne *AB* parallele à *QE*, cette droite *AB* représentera le plan qui divise le couple en deux parties égales, & *CFGDHL* sera la partie du corps principal que doit former ce même couple.

FIG. 9. FIG. 8. & 11. FIG. 10. FIG. 12. FIG. 8. FIG. 9.

---

du couple de balancement de l'avant; cette variation étoit cependant très-petite. Quoi qu'il en soit, on voit que cette différence ne peut influer sur la description que l'Auteur fait de cette ancienne pratique des Constructeurs.

* Il paroît que le Lieutenant-Général D. Antonio de Guastañeta employoit cette espece de Construction; car dans son petit Ouvrage intitulé, *Proporciones de las medidas mas esenciales..*, pour la Construction des Vaisseaux & Frégates de guerre, &c., on ne trouve que la description du maître couple & des estains, & nullement celle des autres couples.

** Les anciens Constructeurs Français appelloient ces secondes tablettes des *Trébuchets*.

PLANC. III. Pour terminer ce couple qui doit aller jusqu'en *B*, *LB* étant égal à la tonture du corps principal qui répond au couple 18, laquelle est marquée sur la tablette *A*, on fait une autre tablette *MR*, dont la partie *Mo* est droite, & la partie *oR* courbe; & sur cette derniere partie on marque, à commencer du point o, les divisions 3, 6, 9, 12, &c. suivant les ordonnées d'une courbe quelconque, à volonté. Cette tablette ainsi divisée s'applique de maniere que son point 18 qui correspond au couple 18, tombe en *B*, & qu'elle soit tangente au gabari en *D*; & traçant ensuite la ligne *DSB*, cette ligne, avec la partie *CFD*, forme le contour entier du couple 18; c'est-à-dire que ce couple entier a la figure *CFGDSB*. On décrit, par le même procédé, les autres couples 3, 6, 9, 12, &c. & *III*, *VI*, *IX*, *XII*, &c., en observant que les distances *QA*, *LB*, & le point de division de la tablette *MR* soient ceux qui correspondent au couple qu'on veut décrire.

FIG. 8. FIG. 9. (24) Ayant ainsi formé tous les couples compris entre les deux couples de balancement, on place les quatre lisses *EF*, comme auparavant, & à leur moyen, on détermine tous les couples compris entre le couple de balancement de l'arriere & l'estain, & entre le couple de lof * & l'étrave. Au lieu d'une nouvelle tablette *MR*, quelques Constructeurs ont coutume de faire usage du gabari même *CFDE*, qu'ils renversent en posant sa partie supérieure en bas; mais, par ce procédé, les revers deviennent extrêmement concaves, à cause de la grande courbure *GDH*, qu'a ordinairement le gabari, & que quelques-uns conservent, par des raisons très-fondées.

(25.) Il y a des Constructeurs qui font quelques petits changements dans les procédés de la seconde pratique de Construction que nous venons d'expliquer; ces changements consistent en ce qu'ils ne font point *QA*, ou *LE*, égale à la différence des plus grandes largeurs

FIG. 12. des couples, qu'on a marquées sur les tablettes *A'* & *B'*; ils exi-

FIG. 9. gent que *HL* soit beaucoup plus diminuée, afin que par-là les couples se resserrent davantage par le bas. Pour cela, ils marquent la diminution que doit avoir *HE*, qui est ce qu'on appelle le *Plat de*

FIG. 13. *la Varangue*, par une ligne courbe *QR*, & prenant ses distances à la droite *VX* parallele à la quille; ils les portent sur des tablettes minces, semblables à celles dont nous avons parlé. Ils emploient donc ces nouvelles tablettes, au lieu des autres qui déterminoient,

* C'est le nom qu'on donne au couple de balancement de l'avant, parce qu'il répond, à peu près, au point du vent de la grande voile, lorsqu'elle est orientée au plus près. Quelques Auteurs ont donné le nom de *Couple de lof de l'arriere* au couple de balancement de l'arriere; mais cette dénomination ne paroît pas fort en usage, & avec raison; car elle est impropre.

comme

comme on l'a vu, les différences des plus grandes largeurs des couples; mais comme, après avoir appliqué la tablette *MR*, le couple se trouve avec une largeur beaucoup moindre que celle qui lui convient, ils font tourner le gabari sur le point *D*, dans lequel il est tangent avec la tablette *MR*, jusqu'à ce que le point *C* sortant en dehors, le couple se trouve avec l'ouverture qu'il doit avoir *; & dans cette position, on trace, comme ci-dessus, la ligne *CFDSB*, qui donne la figure du couple. On voit qu'en suivant cette méthode, les couples ne se terminent pas perpendiculairement à *CQ*, dans les points *C* des plus grandes largeurs, ou de la ligne du fort, & que la ligne de tonture du fond n'existe plus. Les Constructeurs Français emploient cette méthode, comme on peut le voir dans l'*Architecture Navale* de M. *Duhamel*, (*1re. Edit. pag.* 194 *& suiv.*) où cet Auteur donne une pratique presque semblable. La premiere est celle des Constructeurs Anglais, c'est ce qu'ils nomment *Whole moulding*. PLANC. III. FIG. 9.

(26.) Les Constructeurs ont travaillé d'après ces pratiques pendant beaucoup de siecles, & ce n'est que depuis peu de temps qu'ils se sont astreints dans cette partie, à former des Plans du corps du Navire, afin de corriger avec facilité, & sans une dépense considérable, les erreurs qu'ils peuvent appercevoir. Car il est bien certain que, dans les procédés de cette pratique, ne considérant aucune des sections horisontales du corps du Navire, qui sont cependant celles qu'on doit considérer avec l'attention la plus scrupuleuse, pour parvenir à connoître les résistances qui doivent avoir lieu dans le fluide, ni aucune des sections verticales des extrêmités du Navire, de la figure desquelles dépend, comme on le verra par la suite, la dureté, ou la douceur des mouvements du Navire, ils ne pouvoient absolument point remédier aux erreurs dans lesquelles de semblables omissions devoient les faire tomber. Après la Construction finie, ou du moins après les couples achevés & mis en place, les défauts s'appercevoient, & ils ne pouvoient se corriger sans occasionner une perte de bois considérable, en substituant d'autres pieces en place de celles d'où provenoient les défauts. La correction ne pouvoit donc le plus souvent avoir lieu que dans les Constructions suivantes. Ainsi on ne pouvoit faire quelques pas vers la perfection, qu'en perdant beaucoup de temps, & en faisant un grand nombre de mauvais Navires.

---

* C'est ce mouvement qu'ils appelloient *Trébuchement*.

Planc. III.

CHAPITRE III.

De la méthode pour tracer les Plans des Constructions dont dont on a parlé dans le Chapitre précédent.

(27.) Pour tracer les Plans des constructions dont on a parlé dans le Chapitre précédent, il est nécessaire de sçavoir que ce que les Constructeurs appellent *Plans*, ce sont les Projections ichnographiques & orthographiques du corps du Navire, ou des lignes qui le terminent. Le tracé des Plans consiste donc à former ces Projections d'après les regles que la Géométrie nous enseigne. Il est évident que ces Projections, faites avec l'exactitude nécessaire, sont suffisantes pour faire connoître les avantages & les inconvénients que peuvent produire les différentes lignes qui terminent le corps principal ; car on est le maître de tracer autant de Projections qu'on voudra des lignes qu'on aura besoin de considérer.

(28.) Pour remplir cet objet, on doit tracer au moins trois Projections ; la premiere sur un plan vertical parallele à la quille ; la seconde sur un plan vertical qui coupe la quille à angle droit ; & la troisieme enfin, sur un plan horisontal parallele à la même quille *.

Nous supposerons la quille horisontale, parce que cette situation rend la description de la méthode, pour tracer ces trois Projections, plus facile à saisir & à exécuter, & qu'elle offre en même temps toutes les considérations qui sont essentielles. Comme le Navire, partagé suivant sa longueur, est composé de deux moitiés, qui sont & doivent être égales & semblables, par les raisons que nous avons déjà exposées (1.), il suffit d'en représenter une moitié dans les Projections, parce qu'avec une des moitiés, on a nécessairement le tout.

(29.) La quille étant placée avec deux de ses faces verticales, & les deux autres horisontales, il s'ensuit que, dans la Projection verticale parallele à la quille, on ne peut voir que la face verticale *AB* de la quille représentée par deux lignes paralleles, dont la distance exprime sa hauteur. L'étambot & l'étrave se projettent aussi dans le même plan vertical, & on n'en peut faire connoître que les deux faces les plus larges, de la maniere que l'exprime la Figure. Dans la Projection verticale perpendiculaire à la quille, le plan de Projection coupant la quille à angle droit, il s'ensuit que

Fig. 8.

* Les deux premieres Projections sont orthographiques, & la troisieme est une Projection ichnographique ; leurs descriptions sont fondées sur les mêmes principes.

sa représentation est le quadrilatere rectangle *HI* formé de la hauteur PLANC. III.
& de l'épaisseur de la même quille. L'étambot & l'étrave ne se FIG. 10.
voient que de profil, c'est-à-dire, par leur épaisseur, & sont représentés dans toute leur élévation par deux lignes paralleles, ou presque paralleles, dont la distance détermine l'épaisseur de ces deux pieces. Mais n'ayant à représenter que la moitié du Navire, si l'on suppose que *FG* est le plan qui le divise en deux parties égales, suivant sa longueur; la droite *HK* menée parallélement à *FG*, à une distance égale à la moitié de l'épaisseur de l'étambot, déterminera la moitié de cette piece dans le sens de l'épaisseur, & la parallele *IL* déterminera pareillement la moitié de l'étrave. On prend ce parti pour représenter, sur la partie gauche du Plan, seulement la moitié de la partie du Navire comprise depuis la poupe jusqu'au maître couple; & sur la partie droite, la moitié de l'autre partie comprise depuis le maître couple jusqu'à l'étrave, parce qu'à ce moyen on évite la confusion que produiroit la multiplicité des lignes qu'il faudroit tracer, si l'on en agissoit autrement. Dans la Projection horisontale parallele à la quille, le plan de projection étant parallele à celle-ci, elle est représentée dans toute sa longueur, & est terminée par la ligne *AB* parallele à *VX*, qui représente le plan qui di- FIG. 13.
vise le Navire dans toute sa longueur en deux parties égales. Il en est de même de l'étambot *LA*, & de l'étrave *BK*, qui sont également vus de profil, & dont on voit les Projections *LA*, *BK* sur le prolongement de la quille.

(30.) Pour nous rendre plus faciles à saisir dans ce que nous avons à dire, nous appellerons *Projection longitudinale* * la Projection verticale parallele à la quille; & *Projection transversale*, la Projection verticale qui coupe la quille à angle droit; & nous nommerons *Projection horisontale*, celle qui est horisontale & parallele à la quille **.

(31.) Dans les Projections longitudinales & horisontales, tous les couples sont vus de profil, à cause que leurs plans sont perpendiculaires à la quille; par conséquent chacun d'eux doit être représenté par deux paralleles qui déterminent son épaisseur; mais cependant, pour éviter la confusion, nous nous conformerons à l'usage ordinaire, qui est de ne marquer qu'une seule face, ou un seul côté du couple:

* C'est ce qu'on appelle ordinairement le *Plan d'Élévation*, ou simplement *l'Élévation du Navire*; & lorsqu'on veut y représenter les parties intérieures, on l'appelle aussi la *Coupe longitudinale*.

** Cette Projection transversale s'appelle assez communément la *Coupe du Vaisseau*, ou le *Plan vertical des gabaris*; & la Projection horisontale est ce qu'on nomme le *Plan horisontal*. C'est sur ce dernier plan qu'on représente les lignes d'eau & les lisses. Nous conserverons cependant les dénominations de l'Auteur.

PLANC. III. ainsi nous les désignerons par une seule ligne. Par les points marqués sur la quille pour l'établissement des couples, on lui éleve des perpendiculaires, qui représentent, tant dans une Projection que dans l'autre, les profils des couples qu'on veut tracer; mais comme on doit avoir grand soin d'éviter la confusion, on n'éleve ces perpendiculaires que des points 3, 6, 9, 12, *&c.* & *III*, *VI*, *IX*, *XII*, *&c.* ce qui suffit pour l'exactitude de la Construction, les couples intermédiaires, ou de *Remplissage*, pouvant se déterminer facilement d'après ceux déjà déterminés, qu'on appelle *Couples Principaux*, ou, comme on l'a déjà dit, *Couples de Levée.* Il y a des Constructeurs qui se contentent d'élever des perpendiculaires de quatre en quatre couples; mais l'usage le plus commun & le meilleur est d'en élever de trois en trois : cette méthode est en effet beaucoup plus exacte.

(32.) Dans la Projection transversale, les couples sont représentés

FIG. 10. dans toute leur étendue, & suivant leur véritable figure; ou du moins tous ceux qui sont placés à angle droit sur la quille, lesquels sont le plus grand nombre, & même la totalité, si l'on en excepte seulement quelques-uns vers la poupe & vers la proue, & l'Estain *CD*,

FIG. 8. qui, comme on le voit, & comme on l'a déjà dit, (20.) a quelque inclinaison, & qui, par cette raison, ne peut être représenté par une ligne droite, même dans la Projection horisontale, mais par une ligne courbe.

FIG. 13. (33.) La représentation des couples dans la Projection transversale est, sans contredit, la partie la plus intéressante, & celle à laquelle se réduit presque toute la Construction, puisque c'est la figure des couples qui détermine celle de la Carene, & que de celle-ci dépendent toutes les qualités, bonnes ou mauvaises, du Navire. Pour les représenter, on peut commencer par décrire le maître couple:

FIG. 10. pour cela, on éleve les deux verticales *MN*, *OP*, éloignées l'une de l'autre de la plus grande largeur, ou du maître bau du Navire: & ayant marqué, sur ces verticales, les hauteurs *MN*, *OP*, de maniere que les points *N* & *P* soient ceux où le couple doit effectivement avoir sa plus grande largeur, hauteurs qui sont ordinairement depuis les trois huitiemes, ou un peu moins, jusqu'à la moitié entiere du bau, on tire les horisontales *NQ*, *PR*; c'est sur ces horisontales que doivent être les centres des arcs de cercle les plus élevés de ceux qui forment le contour du couple. Ayant fixé ensuite le plat que doit avoir la varangue du couple, c'est-à dire, la distance du point *S*, où doit commencer le plat, au plan *GF*, on menera les verticale *ST*, dans lesquelles doivent se trouver les centres des arcs qui doivent

former le contour inférieur du même couple ; mais, avant que de décrire ces arcs, il faut avoir déterminé l'élévation que le point *S* doit avoir au-dessus de l'horisontale *MO* qui passe par la face supérieure de la quille, laquelle élévation se nomme l'*Aculement de la varangue*. Cela fait, on décrit les deux arcs supérieur & inférieur, & on cherche ensuite le centre de l'arc intermédiaire qui doit les toucher, ou être tangent à l'un & à l'autre ; & menant enfin les tangentes *HS*, *IS*, on aura tout le contour du couple, depuis sa plus sa plus grande largeur jusqu'à la quille.

(34.) La position du centre des arcs, ou la longueur des rayons *QN*, *TS* des arcs supérieur & inférieur, de même que le centre & le rayon de l'arc intermédiaire, sont, comme on l'a vu, presque à la volonté du Constructeur ; il les détermine d'après les qualités, ou la capacité qu'il veut donner à son Navire. Dans les Vaisseaux de guerre, la distance du point *M*, ou *O*, au couple, est, pour l'ordinaire, d'un tiers * de la moitié *MF* du bau. Les Français font cependant cette distance beaucoup plus grande dans les Navires qui ne sont pas destinés à la charge ; mais on verra dans la suite, & on a même déjà démontré, (*Tome I.* 771.) combien ils se trompent, lorsqu'ils pensent que le Vaisseau doit acquérir par là une marche plus avantageuse, ou, comme les Marins s'expriment ordinairement, qu'il en deviendra meilleur *Voilier*. Pour le même objet, ils ont aussi coutume de faire l'élévation du point *S*, ou l'aculement très-grand, & la distance du même point *S* au plan *GF*, ou le plat de la varangue très-petit ; mais ces deux pratiques tiennent à la même erreur de principe.

(35.) Les Constructeurs Anglais ont encore une attention particuliere à ce que le rayon *TS* ne soit pas très-grand, & cela pour conserver une espece de renflement à l'arc inférieur, afin que la tangente menée de la face inférieure de la quille au contour du couple, ne le touche pas au-dessus de la piece principale avec laquelle il est formé, & qu'on appelle *la Varangue* : de cette maniere, si le Navire vient à échouer, comme, dans ce cas, il tombe nécessairement sur un de ses côtés, il s'appuie sur cette varangue, qui est, sans contredit, la plus forte piece, & non sur les genoux & les alonges qui sont les pieces qui lui sont unies.

* Il y a là-dessus beaucoup de variété parmi les Constructeurs. *Voyez*, pour les différentes méthodes de tracer le maître couple, le *Traité du Navire* de M. *Bouguer*, ou l'*Architecture Navale* de M. *du Hamel*, ou bien encore l'Ouvrage de M. *Vial du Clairbois*, intitulé, *Essai Géométrique & Pratique sur l'Architecture Navale*. Toutes ces méthodes ont leurs avantages & leurs défauts, suivant l'objet auquel on destine le Navire Chacun peut facilement en imaginer qui seront aussi bonnes que celles qui sont prescrites dans ces différents Ouvrages.

PLANC. III. (36.) Le maître couple étant tracé, on transporte la hauteur des
FIG. 10. & 8. points *S* & *N* (*Fig.* 10) aux points *M* & *P* (*Fig.* 8); & par ces points on décrit les courbes paralleles *IMN*, *GPH*, qui terminent le relevement, les façons, ou la tonture du corps principal, & les hauteurs des plus grandes largeurs que doivent avoir les couples, depuis le couple de balancement *G* de l'arriere, jusqu'au couple de lof *H*. On trace de
FIG. 13. même dans la Projection horisontale, les courbes *NOP*, *QDR*, aussi paralleles, qui terminent la plus grande largeur des mêmes couples & le plat de leur varangue : & l'on commence d'abord par déterminer les points *N* & *P*, d'après les dimensions des deux couples de balancement, auxquelles on s'est arrêté. Les hauteurs au-dessus de la quille des
FIG. 8. points, où la courbe *NMI* (*Fig.* 8) coupe les couples, se portent ensuite sur la Projection transversale, comme, par exemple, la hauteur correspondante au couple 18, se porte de l'horisontale *MO*
FIG. 10. jusqu'au point *V* (*Fig.* 10); & par tous les points *V* déterminés de cette maniere, on menera des horisontales, qu'on fera respec-
FIG. 13. tivement égales aux distances de la courbe *QDR* (*Fig.* 13), au plan *VX*, qui divise le Navire en deux parties égales, c'est-à-dire, que dans le cas que nous avons pris pour exemple, on fera $VW = QC$
FIG. 10. & 13. (*Fig.* 10 & 13).

FIG. 10. (37.) Par tous les points *V* on élevera des verticales, ou, ce qui revient au même, on tirera des paralleles à *FG*, qu'on fera toutes égales à *ST*, & les extrêmités de ces lignes seront les centres desquels on décrira les arcs qui forment les contours inférieurs des couples. On portera pareillement sur la Projection transversale les
FIG. 8. hauteurs au-dessus de la quille, des points où la courbe *GPH* (*Fig.* 8) coupe les couples; par exemple, on portera celle qui correspond
FIG. 10. au couple 18, depuis l'horisontale *MO* (*Fig.* 10), jusqu'au point *X*, & par tous les points tels que *X* ainsi déterminés, on tirera des horisontales qu'on fera toutes égales à *NQ*; & les extrêmités de ces lignes seront les centres d'où l'on décrira les arcs qui forment les contours supérieurs des couples. On joint ensuite ces deux arcs qui forment les parties supérieures & inférieures de chaque couple, par un troisieme arc intermédiaire qui doit les toucher tous les deux, ou leur être tangent, & être égal à celui qu'on a employé dans la description du maître couple; & par ce procédé, tous les couples du corps principal du Navire, compris entre les deux couples de balancement, seront décrits.

(38.) Les Revers se décrivent comme on l'a dit dans le *Chapitre* précédent. Ayant formé une tablette de bois mince, d'à-peu-près une demi-ligne, ou d'un tiers de ligne d'épaisseur, & lui ayant donné

la figure *MSR*, on marque dessus les divisions 0, 3, 6, &c., & on procede ensuite de la maniere qui a été expliqué dans l'endroit cité. PLANC. III. FIG. 9.

(39.) Pour décrire tous les autres couples depuis le couple de balancement de l'arriere, jusqu'à l'estain, & depuis le couple de lof jusqu'à l'étrave, on prolonge à l'œil, & presqu'à discrétion, les courbes *PGE*, *PHF* (*Fig.* 8), & *ONE*, *OPF* (*Fig.* 13), en terminant celles qui se rendent à la poupe, à la hauteur, & à la largeur de l'estain, ou à peu près, & celles qui se rendent à la proue sur l'étrave, presque à la même hauteur que celle où elles s'étoient terminées à la poupe; cependant quelques Constructeurs font cette élévation moindre. On porte ensuite toutes les largeurs des couples déterminées par la courbe *NE*, sur la Projection transversale (*Fig.* 10), depuis le plan *GF* jusqu'à la courbe *XA*. On porte pareillement toutes les hauteurs de la courbe *GE* (*Fig.* 8), depuis l'horisontale *MF* jusqu'à la même courbe *XA* (*Fig.* 10); & les intersections de ces largeurs avec ces hauteurs, donnent les points de la courbe *XA* par lesquels doivent passer les contours des couples. FIG. 8. & 13. FIG. 10. FIG. 8. FIG. 10.

(40.) Ayant donc marqué ces points, & ayant décrit à volonté l'estain *ABCD*, on tire les droites αD, βC, γB, pour représenter les trois lisses *EF* les plus basses (*Fig.* 8), en tâchant que ces trois lisses avec la courbe, ou la droite *NXA* (*Fig.* 10.), soient à peu près également distantes les unes des autres, & qu'elles coupent les couples le plus perpendiculairement qu'il sera possible. Les distances horisontales des points dans lesquels les lisses coupent les couples déjà décrits, au plan *GF*, se portent sur la Projection horisontale (*Fig.* 13), & déterminent les points où doivent passer les courbes *HGI*, *SMW*, *YTU*; on trace donc ces courbes, & on les prolonge à discrétion jusqu'à l'estain & jusqu'à l'étrave, en observant de déterminer d'avance les points extrêmes *F* de la proue, en portant sur la Projection longitudinale (*Fig.* 8) les hauteurs des extrêmités des lisses prises dans la Projection transversale, & en abaissant les perpendiculaires *EF*, de ces points extrêmes qu'on prolonge jusques sur la Projection horisontale. FIG. 8. FIG. 10. FIG. 13. FIG. 8.

(41.) Ayant ainsi tracé toutes les lisses dans la Projection horisontale, on continuera en portant sur la Projection transversale les distances de la ligne *VX* (*Fig.* 13), aux points où ces lisses coupent les couples compris entre celui de balancement de l'arriere, & l'estain, & entre celui de lof & l'étrave, en portant, dis-je, ces distances, depuis le plan *GF* jusqu'aux lisses correspondantes: après quoi il ne reste plus qu'à tracer les courbes qui passent par tous les points de chaque couple, & ils seront entiérement décrits. FIG. 13. & 10.

(42.) Ce dernier point, qui pourroit paroître le plus facile, à en juger par la briéveté de l'explication que nous venons d'en donner, eſt cependant le plus difficile, & c'eſt ſur lui que porte une des plus grandes difficultés de la pratique de la Conſtruction. Car les points qu'on détermine ainſi pour chaque couple, ne ſont pas toujours dans la diſpoſition convenable, pour qu'en faiſant paſſer une ligne courbe par tous ces points, cette courbe puiſſe former un couple régulier, exempt de tout jarret, de toute boſſe, ou cavité trop ſubite; condition qui eſt cependant abſolument néceſſaire, par les raiſons qu'on a déjà expoſées, & par beaucoup d'autres, comme on le verra dans la ſuite. L'avantage de la Conſtruction d'après les Plans faits & médités d'avance, ſur la pratique aveugle que nous avons expliquée dans le *Chapitre* précédent, eſt que ces défauts peuvent ſe corriger facilement ſur le papier, au lieu que par la routine des anciens Praticiens, ils ſont preſque ſans remede, & l'on n'a preſque aucune reſſource pour les corriger *. Aujourd'hui, pour faire cette correction, on revient à la Projection horiſontale; on corrige la courbure des liſſes, en leur donnant plus ou moins de capacité, ſuivant que paroiſſent l'exiger les défauts qu'on a remarqués, ſur la Projection tranſverſale, dans le contour des couples, & on les retrace de nouveau; on répete ces corrections deux, trois, ou même un plus grand nombre de fois, juſqu'à ce qu'on voie les couples prendre un contour qui convienne avec l'idée qu'on s'eſt faite de la figure qu'ils doivent avoir, & qu'enfin on ait atteint le but qu'on ſe propoſe, alors tout le tracé du Plan du corps principal eſt achevé.

(43.) Nous n'avons cependant point encore conſidéré un objet très-eſſentiel pour donner au Navire les qualités les plus parfaites, & qu'il importe le plus qu'il ait: car les principales lignes qu'il importe de conſidérer, pour ce qui concerne la marche du Navire, ſont, ſans contredit, les ſections horiſontales **; & quoique l'examen de ces ſections ne ſoit pas néceſſaire pour la Conſtruction, il devient indiſpenſable pour l'objet dont il s'agit. En effet, il peut arriver, & il arrive même très-ſouvent, que les contours des couples paroiſſent avoir une courbure convenable, & malgré cela, les

* Car lors même qu'on entreprendroit de corriger les défauts qu'on appercevroit après avoir mis les couples en place, ce qui, d'ailleurs, ne pourroit ſe faire ſans une dépenſe exceſſive (26), on n'auroit encore preſque aucune certitude de mieux réuſſir dans une ſeconde tentative.

** Lorſque ces ſections horiſontales ſont faites parallélement à la ſurface de l'eau, & non parallélement à la quille, on les appelle communément *Plans de flottaiſon*, & les lignes courbes qui en réſultent ſur la Projection horiſontale, s'appellent des *Lignes d'eau*, ou des *Lignes de flottaiſon*. Nous nous ſervirons quelquefois de ces dénominations pour les ſections faites parallélement à la quille, parce que la différence des unes aux autres eſt très-petite (44).

lignes

lignes d'eau qui résultent des sections horisontales, ne laissent pas d'avoir des jarrêts, des bosses & des cavités, ce qui ne convient nullement, & ce qu'on ne sçauroit éviter avec trop de soin. Pour en être convaincu, il suffira de se rappeller que nous avons démontré (*Tome I.* 744.) qu'aucune ligne n'éprouve moins de résistance dans le fluide que la ligne droite, & qu'après la ligne droite, ce sont celles qui en approchent le plus. Pour procéder à cet examen, on trace, dans la Projection transversale, deux, trois, quatre, ou même un plus grand nombre de lignes horisontales telles que $\delta\epsilon$, $\zeta\eta$ (*Fig.* 10), & les largeurs comprises entre le plan *GF* & les points où ces lignes coupent les couples, se portent sur la Projection horisontale (*Fig.* 13.) sur chaque couple correspondant depuis la ligne *VX*. On fait ensuite passer par tous les points qui se trouvent ainsi déterminés, les courbes $\alpha\beta\gamma$, & $\delta\epsilon\zeta$, observant d'en marquer d'abord les extrêmités, en traçant, pour cela, les mêmes horisontales sur la Projection longitudinale (*Fig* 8.), & abaissant de leurs extrêmités des perpendiculaires $E\delta$, $\alpha\alpha$, $\gamma\gamma$, & $\zeta\zeta$, sur la Projection horisontale (*Fig.* 13.). Les Projections horisontales de ces sections, c'est-à-dire, les lignes d'eau étant ainsi tracées, on examine avec attention leur courbure, & si on trouve qu'elle n'est pas suivie avec toute la régularité qu'on désire, & qui est nécessaire, on corrige de nouveau les lisses & les couples, jusqu'à ce qu'on trouve que le tout soit parfaitement conforme aux vues du Constructeur, aux regles & à la théorie qu'on expliquera ci-après. Si l'on trouvoit, par exemple, que la cavité qu'on remarque à la ligne d'eau inférieure $\beta\gamma$, depuis le couple *XVIII*, jusqu'à son extrêmité γ, ne convînt pas, on corrigeroit les deux lisses *IF*, *WF*, ainsi que les trois couples de la proue, comme on le voit, par les lignes ponctuées, qui coupent les lignes pleines (*Fig.* 10.), & de cette correction, il résulteroit celle de la ligne d'eau, dont il s'agit, comme on le voit par la ligne ponctuée de la *Fig.* 13.

Planc. III. Fig. 10. Fig. 13. Fig. 8. Fig. 13. Fig. 10. Fig. 13.

(44.) Le plus grand nombre des Constructeurs exige que ces sections horisontales ne soient pas paralleles à la quille, mais à la superficie même de l'eau; parce que, pour l'ordinaire, le Navire ne flotte pas ayant sa quille parallele à la superficie de l'eau. Cela doit être ainsi à la rigueur; mais la différence est si petite, qu'il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, que des sections faites parallélement à la quille soient bien déterminées, tandis que celles qui seroient paralleles à la superficie de l'eau ne le seroient pas: aussi y a-t-il des Constructeurs qui ne se servent que des premieres.

(45.) Les Projections dont nous venons de parler, résultent,

PLANC. III. comme on le voit, de la méthode que les Anglais appellent *Whole moulding*; la description de celle dont les Français font usage, est absolument la même, une fois qu'on a tracé les couples compris entre celui de balancement de l'arriere & l'estain, & entre celui de lof & l'étrave; mais, dans cette derniere méthode, on ne se
FIG. 10. sert point des lignes horisontales, comme *VW*, qui résultent de la distinction du corps principal & des revers : on ne se sert point non plus des horisontales, comme *NQ*, qui donnent les centres des arcs qui forment le contour supérieur des couples compris entre ceux de balancement.

CHAPITRE IV.

De la maniere de décrire les Plans des Navires, suivant la méthode employée maintenant par les Constructeurs les plus instruits dans la théorie & dans la pratique.

(46.) LA Construction des Vaisseaux étoit dans l'état que nous venons de décrire, lorsque les Anglais firent, par leur méthode, un pas de plus vers la perfection; la Projection transversale même des couples l'indiquoit. Les arcs qui forment les contours supérieurs des couples compris entre celui de balancement de l'arriere & l'estain, ou entre le couple de lof & l'étrave, vont en diminuant graduellement, à proportion que celui de l'estain est plus petit, lequel ordre graduel n'a pas lieu dans les couples du milieu, puisque leurs arcs supérieurs sont tous égaux. Quoique ceci n'ait pas d'autre inconvénient que de donner au Navire la forme d'un corps cylindrique dans son milieu, & d'interrompre tout-à-coup cette figure, au couple de balancement de l'arriere, pour lui faire prendre celle d'une espece de corps conique, jusqu'à l'estain; cependant, comme on décrivoit alors les arcs supérieurs des couples compris entre celui de balancement de l'arriere, & l'estain, seulement par tâtonnement; il convenoit de chercher à les décrire avec ordre & régularité, puisqu'il se présentoit à la vue que ces arcs devoient diminuer suivant les sections d'un corps conique. Ainsi ils ne se contenterent pas de déterminer le centre des arcs de cercle pour pouvoir les décrire; mais ils donnerent au corps du Navire la forme d'un corps conique, non seulement depuis le couple de balancement de l'arriere jusqu'à l'estain, mais même à commencer du maître couple : c'est ce que les Anglais appellent *former le corps du Navire par des arcs de cercle*.

Cette Méthode a encore sur l'autre l'avantage, qu'il n'est pas nécessaire de s'assujettir à faire diminuer le plat des varangues, comme les plus grandes largeurs des couples; c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire que *QDR* soit parallele à *NOP* (*Fig.* 13.), ni que le relevement, ou la tonture *IMN* du corps principal soit nullement parallele à la ligne du fort *GPH* (*Fig.* 8.). La description de chacune de ces lignes reste à la volonté du Constructeur; ce qui lui donne plus de moyens de donner au corps du Vaisseau une figure plus avantageuse. PLANC. III. FIG. 13. & 6.

(47.) Voici comme il faut procéder pour jouir de cet avantage. Après avoir élevé, sur la quille, l'étambot & l'étrave, ainsi que toutes les perpendiculaires à la quille qui représentent les profils des couples, on décrit à volonté, ou suivant les mesures qu'on a arrêté d'employer, les deux courbes *EGPHF*, & *IMN* (*Fig.* 14 & 16), tant dans la Projection longitudinale, que dans l'horisontale. On décrit ensuite le maître couple dans la Projection transversale (*Fig.* 15.), comme on l'a enseigné (*Chap.* 3.), & l'on porte sur cette Projection toutes les hauteurs des points de la ligne *EGPHF* (*Fig.* 14.), de même que toutes ses largeurs (*Fig.* 16.), les intersections de toutes ces hauteurs & largeurs donneront tous les points des lignes courbes, ou droites *EGP* & *PHF* (*Fig.* 15.). On porte pareillement sur la même Projection toutes les hauteurs de la courbe *IMN* (*Fig.* 14.), & toutes ses largeurs (*Fig.* 16.), lesquelles donneront, par leurs intersections, tous les points des lignes courbes, ou droites *IM*, *MN*. PLANC. IV. FIG. 14. 15. & 16.

(48.) Par tous les points des lignes *EGP* & *PHF* (*Projection transversale*), on tire des droites horisontales; c'est sur ces lignes que doivent se trouver les centres des arcs de cercles qui terminent le profil du contour supérieur des couples, puisqu'elles marquent la hauteur de leurs plus grandes largeurs. Pour trouver ces centres, on peut considérer la partie du corps du Navire terminée par ces arcs de cercle, comme un corps formé par la révolution d'une ligne quelconque autour d'un axe, comme de la ligne *ABC* autour de l'axe *EX*; & qu'après qu'il a été ainsi formé, on ait donné au tout une nouvelle courbure, au moyen d'un mouvement parallele de toutes ses parties, ou de tous ses points; de sorte que la courbe *ABC* se transforme dans la courbe *DFC*. Il est bien clair, dans ce cas, que l'axe *EX* se transformera dans la courbe *GHX*, & par conséquent que tous les centres sur lesquels les points de *ABC* ont tourné, se trouvent maintenant sur *GHX*, & que les distances des points de cette courbe à *DFC* seront les rayons avec lesquels on doit décrire les arcs de cercle qui formeront la Projection des sections du corps. FIG. 17.

PLANCHE IV. Les centres doivent par conséquent se trouver sur une ligne quelconque, droite ou courbe, telle que *GHX*, & la grandeur des rayons dépendra de sa courbure plus ou moins grande; ce que détermine la ligne *DFC*, & par conséquent la capacité plus ou moins grande des arcs de cercles qu'on décrira, de même que celle de tout le corps, en dépendra aussi.

FIG. 15. (49.) Cela posé, *Q* étant le centre duquel on a décrit l'arc supérieur du maître couple, & *A* celui de l'arc semblable de l'estain, ou du couple 33, soit décrit une courbe quelconque *AKQ*, alors les points où cette courbe coupera les horisontales qu'on a tirées, seront les centres des arcs correspondants à chaque couple, & les distances horisontales de ces points à ceux que détermine la ligne *EGP*, seront les rayons avec lesquels ils doivent être décrits. Par une disposition tout-à-fait semblable, on décrira une autre courbe *RST*, qui passe par *R*, centre de l'arc supérieur qui termine le maître couple; cette ligne coupera toutes les horisontales qu'on a menées, & les points d'intersections seront pareillement les centres des arcs supérieurs des couples, dont les rayons seront les distances respectives de ces points à la ligne *FHP*.

(50.) Tous les arcs supérieurs étant décrits, on passe à la description des arcs inférieurs. Pour cela, on éleve des verticales de tous les points des lignes *MI*, *MN*, & on les fait toutes égales au rayon *MB* de l'arc inférieur du maître couple, & avec ces verticales comme rayons on décrit les arcs inférieurs. Il faut cependant observer que ceci n'a lieu que depuis le maître couple jusqu'à ceux de balancement: depuis ces derniers, en allant vers la poupe & vers la proue, les Constructeurs Anglais n'ont pas sçu faire usage du relevement, ou de la tonture du corps principal, ni de la longueur, ou amplitude, des plats des varangues: & quoique dans leurs plans ils continuent les lignes *MI*, *MN*, jusqu'à la poupe & jusqu'à la proue, comme s'il s'agissoit d'en faire usage, ils avouent eux-mêmes que cette prolongation leur est inutile. Avec le même arc intermédiaire qui a servi à unir les arcs supérieur & inférieur du maître couple, on unit pareillement les arcs supérieurs & inférieurs des autres couples, compris entre ceux de balancement; & par-là leurs contours se trouvent achevés, à l'exception de leurs revers.

(51.) Il est question maintenant d'achever le tracer de tous les autres couples de poupe & de proue, dont on n'a encore décrit que les arcs supérieurs. Pour y parvenir, on trace les lisses $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, de la maniere qu'on l'a enseigné, en parlant de la méthode

pratique : on porte de la Projection transversale à l'horisontale, tous les points dans lesquels ces lisses coupent les couples déjà décrits, & par tous les points que cette opération détermine, on trace la Projection de ces lisses, qu'on prolonge ensuite arbitrairement jusqu'à la poupe & jusqu'à la proue. On porte ensuite sur la Projection transversale, les différents points que ces Projections déterminent, c'est-à-dire, ceux où elles coupent les couples compris entre celui de balancement de l'arriere & la poupe, & entre celui de lof & la proue, & par tous les points correspondants on fait passer des courbes qui sont la Projection des couples. Les mêmes lisses servent encore pour décrire tous les revers ; mais en cela on court grand risque de se tromper beaucoup, à moins qu'on n'ait la précaution de tracer une lisse entre la lisse $\varepsilon\zeta$ & la quille, car cette lisse $\varepsilon\zeta$ étant fort éloignée de la quille, on peut, dans l'espace intermédiaire, s'éloigner beaucoup du véritable trait du couple. On voit, par ce que nous venons de dire, que cette méthode est en substance, la même que celle que nous avons déjà décrite dans le *Chapitre* précédent, à l'exception, que dans celle dont il est ici question, on s'est avancé jusqu'à décrire méthodiquement les arcs supérieurs des couples, depuis la poupe jusqu'à la proue ; ce qu'on ne faisoit dans le précédent, que pour ceux compris entre les couples de balancement. Cette derniere méthode a encore l'avantage de laisser les courbes *IMN* arbitraires, au lieu que dans l'autre elles devoient nécessairement être paralleles à *GPH*. Enfin, nous ajouterons encore ici que les Anglais, au lieu de terminer la poupe par le couple que nous appellons *Couple d'Arcasse*, ou *l'Estain*, & par conséquent par une surface plane, la terminent, ainsi que la proue, par une surface courbe, & cela pour les raisons que nous avons données *Art.* 3 *.

PLANC. IV. FIG. 14.

(52.) Pour produire cet effet, ils prolongent les lisses jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'étambot même *OC*, & la piece *LD* qui le traverse, que nous avons nommée *Lisse d'Hourdy*, comme on le voit aux points ζ, δ, β, & l'on procede comme auparavant. Au lieu de l'estain ils placent un autre couple *LV*, qui coupe obliquement la quille, son plan demeurant toujours vertical ; & l'on trace

FIG. 15. FIG. 14. 15 & 16.

* Nous ignorons si ce sont effectivement les Anglais qui ont commencé à introduire cet usage Mais il est certain que cette pratique est usitée en France depuis très-long-temps, & que beaucoup d'autres Nations terminent ainsi l'arriere de leur Vaisseau. Ce n'est pas seulement pour donner de la grace que cet usage a été adopté, comme quelqu'uns l'ont pensé, mais aussi pour la solidité de cette partie (3.).

la Projection de ce couple, en transportant les points où il coupe les lisses, comme on l'a pratiqué pour les autres : comme ce couple remplit l'office de l'estain, il conserve le même nom, car il n'en differe qu'en ce qu'on le place obliquement, ou qu'il est *dévoyé*, comme disent les Constructeurs. Un Navire qui a une poupe de cette espece, est dit avoir le *Cul rond.*

(53.) Au reste, on rencontre, dans cette méthode de décrire le corps principal du Navire, presque les mêmes difficultés que dans la précédente ; car, pour l'ordinaire, ce n'est qu'après bien des tentatives & des corrections, qu'on obtient les couples exempts de jarrets, de bosses, & de cavités subites : il est donc nécessaire de répéter plusieurs fois ces opérations, en corrigeant la Projection horisontale des lisses, jusqu'à ce que les couples soient exempts de tous ces défauts dans la Projection transversale. Au contraire, si après les descriptions des couples les lisses paroissent avoir quelque défaut dans la Projection horisontale, comme, par exemple, si on leur trouvoit une convexité démesurée, depuis le couple 27, en allant vers la poupe, on les corrigeroit, comme on le voit par les lignes ponctuées (*Projection horisontale*), & il en résulteroit les corrections qui sont indiquées par les lignes ponctuées dans les Projections longitudinale & transversale.

(54) On abrégera beaucoup la longueur & le travail de ces tâtonnements, si avant de continuer à volonté la Projection horisontale des lisses, on décrit un couple quelconque, comme, par exemple, le couple 30, ou le couple *XXIV*; car en portant sur la Projection horisontale les points d'intersections du contour de ce couple avec les lisses, on aura, à très-peu-près, les points par où doit passer la prolongation des courbes, ou des Projections horisontales des lisses. Après que tous les couples sont tracés à la satisfaction du Constructeur, il passe à la Projection des sections horisontales $\kappa\theta$, $\kappa\lambda$, sur la Projection horisontale, ce qui donne les lignes d'eau $\zeta\gamma\theta$, $\kappa\mu\lambda$; & ayant examiné ces dernieres avec la même attention, s'il trouve qu'elles conviennent également avec ses intentions, il a atteint son but, & son ouvrage se trouve parfait : mais jusqu'à ce qu'il soit parvenu à cette fin, il doit revenir sans cesse, tant sur les lisses que sur les couples, & répéter toutes les corrections jusqu'à ce que le tout ait acquis la perfection nécessaire.

(55.) Tel est le point où jusqu'à ce jour les Anglais ont poussé l'art de la Construction. Les Constructeurs Français ont pris un chemin tout contraire : voyant que par l'ancienne méthode il n'y avoit que la partie du corps du Vaisseau comprise depuis le couple

de lof jusqu'à celui de balancement de l'arriere, qui fût décrite avec régularité, & que le reste s'exécutoit par des tâtonnements avec les lisses ; ils se sont déterminés à abandonner ces regles, qui les assujettissoient en partie, & à l'exception du maître couple, ils ont pris le parti de décrire tous les autres par tâtonnement. PLANCH. V.

(56.) L'étambot & l'étrave étant élevés sur la quille, de même que toutes les perpendiculaires qui représentent le profil des couples, on décrit, sur la projection transversale, le maître couple $P\alpha\gamma\epsilon M\iota\lambda\theta P$, l'estain $E\xi\pi\zeta$, & l'on tire les lisses PGE, $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, $\epsilon\zeta$ de la poupe, celles de la proue PBF, $\alpha\sigma$, $\zeta\varphi$, $\epsilon\omega$, qui se terminent à l'étrave. On divise ensuite ces lisses selon les ordonnées d'une courbe quelconque : si, par exemple, les divisions suivent la proportion des nombres quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., comme dans la lisse $\epsilon\zeta$, la courbe sera une Parabole *. Si, ayant élevé sur la ligne AP des perpendiculaires également distantes les unes des autres, on fait $AE = PE$, & qu'ensuite on décrive l'arc de cercle PGE, auquel AP soit tangente en P, si l'on porte sur la lisse les ordonnées terminées par l'arc, dans ce cas, la courbe sera une portion d'Ellipse **. Enfin, si l'on fait la distance des points B, C, D, H, &c. à la perpendiculaire IK, moitiés les unes des autres, dans ce cas, la courbe sera une Logarithmique ***. En un mot, quelle que soit la proportion qu'on adopte pour la division des lisses, on en fait toujours usage de la maniere suivante. On transporte tous les points ainsi déterminés sur la Projection horisontale, & par tous les points que ces opérations fournissent on fait passer des courbes qu'on termine dans leurs points correspondants E, ξ, π, ζ. Si ces courbes sont bien suivies, si elles ont toute la régularité que le Constructeur desire, de même que celles qu'on a fait passer par tous les points des mêmes lisses dans la Projection transversale, lesquelles formeront le vrai contour des couples, l'ouvrage sera entiérement terminé. Si, au contraire, les courbes n'avoient pas la régularité nécessaire, comme il arrive ordinairement dans les derniers couples de poupe & de proue, on les corrigera suivant son goût, une, deux, ou un plus grand nombre de fois, jusqu'à ce qu'elles soient exemptes de jartets, de bosses, ou de concavités subites. Si l'on observe, par exemple, que les couples XXIV

FIG. 19. — FIG. 19 & 22. — FIG. 21. & 19. — FIG. 19. — FIG. 20. — FIG. 19.

---

* Voyez, pour la démonstration, le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Troisieme Partie, *Article* 360 ou 366.

** *Ibid. Article* 296 ou 304.

*** Car les ordonnées de la courbe seront en proportion géometrique, tandis les abscisses sont toujours ici en proportion arithmétique. Voyez l'Ouvrage cité, Quatrieme Partie, *Article* 30.

PLANC. III. FIG. 19. & XXIV de proue soient extraordinairement concaves dans leur partie inférieure, on les corrigera, comme les lignes ponctuées le font voir dans la Figure.

FIG. 19. & 20. (57.) Après que tous les couples sont déterminés à la satisfaction de l'Artiste, on trace les sections horisontales $\kappa\theta$, $\chi\lambda$ (*Fig.* 19.), sur la Projection horisontale, pour avoir les lignes d'eau $\zeta\gamma\theta$, $\pi\mu\lambda$ (*Fig.* 20.). Lorsque ces dernieres sont parfaitement d'accord avec leurs intersections, l'ouvrage est entiérement perfectionné; dans le cas contraire, il faut revenir, tant sur les lisses que sur les couples, pour les corriger, & répéter ces corrections jusqu'à ce qu'on ait rendu le tout parfaitement d'accord. Si, après avoir terminé l'ouvrage, on vouloit de plus que la poupe se terminât par une surface courbe, & non par un estain * absolument plane; c'est-à-dire, si l'on vouloit que le Vaisseau eût un *Cul rond*, on prolongeroit, dans la Projection transversale, les lisses $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, jusqu'en β & δ, & ces points de la lisse d'Hourdi & l'étambot se transporteroient sur les Projections horisontale & longitudinale; ensuite on feroit passer, par les points qu'ils détermineroient, la continuation des lisses, comme on le voit par les lignes qui s'entrecoupent. Leurs intersections avec les couples se transportent sur la Projection transversale, & par les points que cette opération détermine, on décrit les courbes qui, comme on voit, coupent les précédentes, & l'on a, par ce moyen, les couples correspondants à la poupe courbe.

(58.) Telle est la méthode dont se servent les Constructeurs Français les plus expérimentés. Une pratique suivie leur a donné un coup-d'œil si juste pour décrire les courbes qui représentent les lisses & les couples, qu'ils parviennent après très-peu de tâtonnements, à donner à ces courbes la perfection nécessaire, & à remplir leurs intentions. Il n'en est pas ainsi de ceux qui ne sont pas aussi versés dans la pratique, cela leur paroît un peu difficile, & très-rarement parviennent-ils à des couples d'un contour parfait; mais ils remédient à ce défaut par un moyen facile & sûr, pour diviser les lisses dans la Projection transversale, afin d'avoir les points de division par lesquels les couples doivent passer.

FIG. 19. & 21. (59.) Ayant divisé la lisse la plus basse $\epsilon\zeta$, suivant la proportion des nombres quarrés, ils divisent la plus haute *PGE*, suivant les ordonnées également distantes de l'arc *PGE*, auquel la droite *AP* est tangente en *P*. En observant de donner à *AP*, à peu près

FIG. 19. & 21.

* C'est ce que les Espagnols appellent *Popa de Cuchayro*, sans doute à cause de la ressemblance de cette partie avec le dos du cuilleron d'une cuiller.

une

une fois & demi, ou deux fois la longueur de AE, ou de son égale PE. Ayant ainsi divisé cette lisse, on la porte en EP, avec ses divisions, & l'on forme sur EP comme base, le triangle EAP, par le sommet duquel, & par les points de division de EP, on mene les droites, ou rayons $A\pi$, $A33$, $A30$, $A27$, &c. Menant, après cela, les droites $\pi\gamma$, $\alpha\xi$, paralleles à EP, & égales aux deux lisses $\pi\gamma$, $\alpha\xi$, les divisions marquées sur ces lignes par les droites menées du sommet A du triangle, donneront les divisions correspondantes de ces deux lisses. Ces points ainsi fixés sur les lisses, il ne s'agit plus que de tracer des courbes qui, passant par les points correspondants, détermineront le vrai contour des couples. Telle est la pratique de quelques Constructeurs; d'autres veulent que la lisse la plus basse $\epsilon\zeta$, soit aussi divisée par le triangle $\pi A\gamma$. D'autres exigent que les lisses $\xi\alpha$ & $\pi\gamma$, ne soient pas portées parallélement à la ligne EP, mais quelles aient quelque inclinaison; mais tout ceci n'aboutit qu'à donner plus, ou moins, de capacité aux couples, & peut servir pour y faire les changements qu'on juge à propos. Si, par exemple, les angles $A\xi\alpha$, $A\pi\gamma$, devenoient plus aigus, il est clair que les divisions des lisses $\alpha\xi$ & $\gamma\pi$, s'approcheroient davantage de α & de γ, & par conséquent les couples auroient plus de capacité: on doit entendre la même chose de quelqu'autre division que ce soit; ensorte qu'il n'est pas nécessaire d'attacher une grande importance à ces pratiques particulieres, dont le résultat ne sera jamais que de donner au corps du Navire plus ou moins de capacité. PLANC. V. FIG. 19. & 21. FIG. 23. FIG. 19. FIG. 23. & 19. FIG. 23.

(60.) Si, après cette opération, les couples se trouvent conformes aux idées du Constructeur, l'ouvrage sera fini, à moins que les sections horisontales ne s'accordent pas avec le reste, ou ne soient pas à son gré; dans ce cas, il faut changer les divisions de quelqu'une des lisses $\alpha\xi$, $\gamma\pi$, ou de la lisse $\epsilon\zeta$, & recommencer le tracer de ces sections jusqu'à ce que le tout soit parfaitement d'accord. Si l'on ne pratique pas ces corrections, il arrivera rarement que les contours des couples soient exempts de jarrets, de bosses, & de concavités subites.

(61.) Si l'estain n'est pas éloigné du couple 33, d'autant que les autres couples sont éloignés entr'eux, la ligne AE (*Fig.* 21.) ne doit pas aussi être éloignée de la premiere perpendiculaire, de la même quantité que les autres perpendiculaires sont éloignées entr'elles; alors la distance de couple à couple, doit être à la distance du couple 33 au point E (*Fig.* 18.), comme la distance de perpendiculaire à perpendiculaire (*Fig.* 21.), est à la distance de la li- FIG. 21. FIG. 18. & 21.

PLANC. V. gne *AE* à la premiere perpendiculaire qui la suit: on doit entendre la même chose des autres points ξ, π.

FIG. 18. (62.) Pour la division des lisses de proue $\alpha\sigma$, $\gamma\phi$, $\iota\omega$, on forme un autre triangle dont on divise la base suivant la proportion des nombres quarrés 1, 4, 9, 16, &c., ou suivant les ordonnées d'une autre courbe quelconque; & après avoir mené, par le sommet *A*, les lignes $A\omega$, $A\phi$, $A\sigma$, qui soient éloignées de la droite *AXXVII*, proportionnellement à ce que ces mêmes points sont éloignés du couple *XXVII*, on appliquera sur le triangle les lignes $\iota\omega$, $\gamma\phi$, $\alpha\sigma$, respectivement égales aux lisses quelles représentent, en observant de leur donner, avec la base, l'obliquité qui paroîtra la plus convenable, pour que de leurs divisions il résulte des couples dont les contours soient réguliers & bien suivis. On décrit ensuite,
FIG. 20. ou même auparavant, la Logarithmique *PHF*: pour cela on forme le rectangle *PoFA*, & ayant divisé la ligne *PA* en neuf parties égales, on éleve des perpendiculaires par toutes les divisions, & on fait la premiere $BC=\frac{1}{2}AF$, la seconde $DG=\frac{1}{2}BC$, & ainsi de suite jusqu'à la derniere division: faisant ensuite passer une courbe par les extrêmités de toutes ces perpendiculaires, cette courbe sera la Logarithmique, dont la Projection doit se porter sur la droite,
FIG. 19. ou courbe, *PBF*. Toutes les lisses de la proue étant ainsi divisées, on fait passer par les points de division des courbes qui forment le contour des couples: & l'on pratique ensuite sur ces couples les corrections qu'on a déjà expliquées, si l'on juge qu'elles soient nécessaires.

FIG. 18. (63.) Les distances proportionnelles des points ω, ϕ, σ, à la droite *AXXVII*, ne doivent pas être établies relativement à la distance de la droite *AXXVII*, à la droite *AXXIV*, comme le font quelques Auteurs *; mais relativement à la distance de la droite *AXXVII* à la droite *AXXX*, qui est plus grande que la précédente; & même, si ces points tombent entre les couples *XXX* & *XXXIII*, comme il arrive dans la Figure, les relations des parties comprises entre ces couples, doivent se déterminer relativement à la distance de la droite *AXXX*, à la droite *AXXXIII*; & encore cette méthode n'est-elle pas sûre, elle donneroit de l'erreur si la courbure des lignes étoit très-grande. La vraie méthode pour trouver, par exemple, la position de la droite $A\phi$, est de mesurer la distance du couple *XXVII* au point ϕ, dans les Projections longitudinale ou horisontale; supposant ensuite cette distance $=n$, &

* Voyez l'*Architecture Navale* de M. *Duhamel*, page 219, dans la premiere Edition, & 227 dans la seconde.

prenant l'unité pour exprimer la diſtance d'un couple à l'autre, la diſtance de la droite *Aφ* au point o, ſera $=(9+n)^2$, ou celle de la même droite à la droite *AXXVII* $= 18n+n^2$ * ; de cette ſorte, ſi l'on avoit $n=\frac{2}{3}$, cette diſtance ſeroit à fort peu près $=27\frac{1}{3}$.

(64.) Cette méthode de projetter les couples, a non-ſeulement l'avantage de faciliter les tentatives, mais encore celui d'aſſurer de la courbure parfaite des liſſes; mais avec tout cela, on n'eſt pas ſûr que les contours des couples ſe trouvent décrits avec la perfection néceſſaire, & que les ſections horiſontales ſe trouvent d'accord avec le reſte, comme on le déſireroit. Il eſt néceſſaire, comme dans les autres méthodes, d'en venir aux tâtonnements, &, ce qui eſt plus, il eſt néceſſaire de répéter les corrections beaucoup de fois, même pour les couples compris entre ceux de balancement. En outre, quoique les couples décrits ſur la Projection tranſverſale, & les liſſes ſur l'horiſontale, paroiſſent les uns & les autres avoir toute la perfection réquiſe, il n'y a pas pour cela de certitude qu'ils l'aient effectivement; car les points des couples compris entre les liſſes, dans la Projection tranſverſale, peuvent ne pas correſpondre à ceux de l'horiſontale. Pour prévenir cet inconvénient, il eſt néceſſaire de doubler, ou de tripler, les liſſes, & dans ce cas, les tâtonnements ſe multiplient encore, parce qu'on ne connoît pas la relation que doivent avoir entr'elles les diviſions de chaque liſſe, pour que le contour des couples ſoit régulier & parfait. On évite tous ces défauts en décrivant les couples par des arcs de cercle, comme le pratiquent les Anglais; mais ceux-ci n'ont obtenu cet avantage que pour la partie du corps principal du Navire, compriſe entre les couples de balancement; depuis ceux-ci juſqu'à la proue & juſqu'à la poupe, ils en ſont réduits aux tâtonnements, il en eſt de même pour tous les revers; de ſorte que cette méthode n'eſt exempte qu'en partie de tâtonnements, & qu'il reſte encore bien des difficultés. Nous allons donner dans le *Chapitre* ſuivant, une méthode qui n'en laiſſera ſubſiſter abſolument aucune.

CHAPITRE V.

De la maniere de décrire géométriquement le corps du Navire, & tous les Couples, par des arcs de cercle.

(65.) COMME on n'a conſidéré juſqu'ici les moyens de tracer les

* Car cette diſtance eſt $=(9+n)^2-9^2=18n+n^2$. Cela eſt de toute évidence ; car d'abord

PLANC. II. Plans du corps du Navire, qu'autant qu'on y peut parvenir par des essais & des tâtonnements, & nullement par les moyens que la Géométrie nous offre; il est nécessaire que nous entrions dans l'examen des secours que cette science peut fournir; l'utilité qui en peut résulter dédommagera amplement de la peine dont ce travail peut être susceptible.

Si le corps du Navire étoit un Ellipsoïde parfait, ou s'il étoit composé de deux demi-ellipsoïdes réunis dans le plan du maître-couple, il est clair que la méthode de décrire le contour de tous les couples, sur la Projection transversale, se présenteroit très-facilement, puisqu'ils seroient tous des cercles. Ce seroit la même chose, si le corps du Navire étoit formé par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe; mais l'expérience a toujours manifesté qu'un tel corps ne convient point du tout avec la figure qu'il faut donner aux Navires; & il ne convient pas davantage avec celle que la théorie nous indique; car elle est en ceci parfaitement d'accord avec l'expérience, comme on le verra ci-après. Le maître couple se réduiroit donc à un seul cercle, ainsi que les autres couples; & quoique, dans cette disposition, il y eût l'inconvénient de faire comprendre aux couples trop peu d'espace, ce qui feroit que le Navire manqueroit de capacité, il est évident qu'on pourroit y apporter remede, en accompagnant chaque portion circulaire, d'une ligne droite qui marquât sa partie inférieure, ou la varangue qu'il lui convient d'avoir; de cette sorte la moitié du corps principal du Navire seroit formée de la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe, & d'un plan auquel on donneroit la courbure nécessaire pour qu'il fût tangent au corps formé par la révolution de la courbe. Mais tout cela ne seroit pas encore suffisant : les cercles qui formeroient le contour des couples, auroient tous leur plus grande largeur à la même hauteur, puisque l'axe de révolution doit être parallele à la quille, attendu que, sans ce parallélisme, les sections du corps qui marquent les couples, & qui sont, par conséquent, perpendiculaires à la quille, ne seroient pas des cercles.

(66.) On peut cependant remédier encore à cet inconvénient. Pour cela, après que le corps est formé, il ne faut que donner à l'axe une courbure particuliere, dans le sens d'un plan vertical qui FIG. 24. passe par la quille : c'est-à-dire que, *EX* étant l'axe de révolution, *EMX* la section longitudinale, ou verticale du corps qui passe par

---

qu'on emploie la division suivant la proportion des nombres quarrés, il faut que les parties des lisses qu'on doit diviser, le soient aussi suivant cette proportion.

la quille, il ne faudra que donner à l'axe *EX*, & avec lui à tout le corps du Navire, la courbure *APB*, le point *E*, paſſant verticalement en *A*, le point *C* en *D*, le point *F* en *G*, *&c.*; & pareillement le point *H* paſſant en *I*, le point *K* en *L*, *&c.* Par cette diſpoſition il eſt évident qu'on remédie à l'inconvénient de ce que toutes les plus grandes largeurs des couples ſe trouvoient dans le plan horiſontal paſſant par l'axe *EX*, ſans que, pour cela, les ſections du corps qui repréſentent les couples aient éprouvé aucune altération, c'eſt-à-dire, ſans qu'elles aient ceſſé d'être circulaires; parce que chacune de ces ſections en particulier a été tranſportée en entier d'un mouvement vertical, égal à celui qu'on a donné à l'axe dans ſon point correſpondant. Plano. II.

(67.) Mais ce remede ne ſuffit pas encore, il eſt néceſſaire d'avoir recours à un autre non moins important. Comme l'axe doit être toujours parallele à la quille, ſans quoi, comme nous venons de le dire, les ſections qui déſignent les couples ne ſeroient pas circulaires, toutes ces ſections auront par conſéquent la même varangue; & le relevement, ou l'aculement, qu'on pourroit donner à celles-ci dans les derniers couples de la poupe, devroit être très-petit, afin qu'ils devinſſent tels que l'exige l'avantage du gouvernail, comme on le verra par la ſuite. Il doit donc en réſulter que les couples de poupe, n'auront pas les largeurs néceſſaires, tant pour la manœuvre de la barre du gouvernail, que pour l'emplacement & le ſervice de l'artillerie. Il ſe préſente de ſemblables difficultés à la proue, parce que juſqu'au dernier couple de cette partie auroit une varangue plate, & il ſeroit exceſſivement ample.

(68.) Le remede à ces inconvénients ſe préſente encore avec la même facilité que ci-deſſus; il ne faut que donner à l'axe *EX*, & avec cet axe à tout le corps, un mouvement horiſontal perpendiculaire à la quille; c'eſt-à dire, en faiſant paſſer le point *E* en *A*, le point *C* en *D*, le point *F* en *G*, de même que le point *H* en *I*, le point *R* en *L*, *&c.*; & à la proue, au contraire, en faiſant paſſer le point *X* en *B*, le point *N* en *O*, le point *Q* en *R*, *&c.* Car il eſt clair que, par ce procédé, on remédie aux inconvénients en queſtion, & qu'on n'altere nullement les ſections qui repréſentent les couples; ce ſont toujours les mêmes cercles, & leurs centres ſe trouvent tous ſur la ligne courbe *ADG*, *&c.* à laquelle l'axe ſe trouve réduit par les deux mouvements vertical & horiſontal, & leurs rayons *CH*, *FK*, ou *DI*, *GL*, *&c.* demeurent les mêmes qu'auparavant. Fig. 25.

(69.) Comme ces mouvements ſont arbitraires, il s'enſuit que

PLANC. II. les courbures qu'on doit donner à l'axe le sont aussi *; mais cet axe doit toujours être une ligne courbe : sans cela, les côtés du Navire ne seroient pas courbes; ainsi, en disposant l'axe en ligne courbe, non seulement les côtés le seront aussi, mais, quelque section qu'on fasse du corps du Navire, soit verticale, horisontale, ou oblique, sera toujours une courbe, continue & parfaite, ensorte qu'il ne sera pas nécessaire d'avoir recours à des tâtonnements pour sçavoir avec certitude qu'elles le seront.

(70.) Il ne nous reste plus maintenant que de considérer les revers, ou les *façons*, pour que le Vaisseau & tous ses couples de la poupe à la proue, soient entiérement décrits. Les revers peuvent être également les sections d'un autre corps formé par la révolution d'une courbe autour d'un axe parallele à la quille, lequel on rend tangent FIG. 26. au corps principal & à la quille, ou au plan vertical *BZ*, qui coïncide avec elle, & divise le Vaisseau en deux parties égales, en lui donnant deux mouvements, l'un horisontal, & l'autre vertical. Les centres *S*, *T*, *U*, *V*, *&c.* desquels on décrit les revers, se trouveront par conséquent dans une ligne courbe, & la concavité plus ou moins grande desdits revers dépendra de la courbure de cette ligne, ou des mouvements, vertical & horisontal, qu'on aura donnés à l'axe; mais quel que soit le mouvement donné à l'axe, la section faite par les lisses sera toujours une courbe continue & parfaite.

FIG. 24. (71.) On décrira donc arbitrairement la courbe *ASTUV*, *&c.*, pour représenter la courbure verticale donnée à l'axe, observant qu'elle soit tangente à la quille, & à l'étambot au point *A* où celle-ci s'unit avec la lisse d'hourdy. Les intersections de cette courbe avec les couples seront les centres des cercles qui doivent former les revers; ainsi on portera sur la Projection transversale les hauteurs de ces intersections au-dessus de la quille. Considérant ensuite que le corps formé par les revers doit être tangent au corps principal que termine la courbe *AILM*, on verra que les distances des points de cette courbe, à la courbe *ASTUV*, *&c*, seront les rayons avec lesquels il faut décrire les arcs circulaires qui forment les revers. Prenant donc ces distances, on les portera horisontale-FIG. 26. ment de la ligne *BZ*, aux points *S*, *T*, *U*, *V*, *&c.*, & de ces points comme centre, on décrira ces mêmes revers, qui seront non-seulement tangents au corps principal, mais aussi à la ligne *BZ*. On décrira, par le même procédé, les revers de la proue : & si l'étrave

* Cela dépend des qualités qu'on veut donner au Navire : ainsi il faut nécessairement de l'expérience pour faire le choix de la courbure qui convient à l'objet qu'on se propose.

eſt tangente à la quille, on pourra ſe ſervir de l'une & de l'autre, pour déſigner la tonture, ou le relevement qu'on doit donner à l'axe; de ſorte qu'elles termineront les hauteurs des centres deſquels il faut décrire les revers. Si l'étrave n'eſt pas tangente à la quille, on l'unira avec elle par un arc qui ſoit tangent à l'une & à l'autre, & dont la courbure ſoit douce, afin de détruire le coude qu'elles forment à leur réunion. PLANC. VI.

(72.) Ces regles bien entendues fourniſſent un moyen facile pour décrire, ou pour projetter les couples, tant pour le corps principal, que pour les revers, non ſeulement avec un arc de cercle, mais avec deux, trois, ou même avec un plus grand nombre, ſi on le juge néceſſaire. La pratique rend indiſpenſable l'uſage de pluſieurs arcs de cercle, parce qu'avec un ſeul arc, les varangues ſont terminées de maniere qu'elles deviennent plus grandes que celles du maître couple; & il ne reſte que peu de liberté au Conſtructeur pour corriger ſon ouvrage, lorſque les ſections horiſontales ne correſpondent pas à ſes intentions; en outre, dans cette méthode, les revers ſe trouvent avoir beaucoup de concavité, ce qu'il faut éviter, comme nous l'avons déja dit.

(73.) La maniere de décrire le total des couples, & le corps principal, avec trois arcs de cercle, comme on en a tracé quelques-uns dans les *Chapitres* précédents, ſe réduit donc à joindre au corps formé par la révolution d'une courbe autour d'un axe, deux autres corps formés par de ſemblables révolutions, & qui ſoient tangents entre eux; c'eſt-à-dire, qu'ayant déterminé le relevement, ou l'aculement, & la grandeur que doivent avoir les varangues, on leur joindra un corps qui leur ſoit tangent, & enſuite entre celui-ci & le corps le plus élevé, on en inſérera un troiſieme qui les touche tous deux. Tous les centres des arcs des ſections qui expriment les contours des couples, ſe trouveront, pour les raiſons qu'on a déjà expoſées, dans une ligne courbe, & leurs rayons ſeront les mêmes que ceux qu'ils avoient dans le corps formé par la révolution de l'autre courbe.

(74.) Ces principes poſés, en voici l'application à la pratique. Ayant élevé, ſur la quille, l'étambot & l'étrave. de meme que toutes les perpendiculaires qui doivent repréſenter les profils des couples, on décrira, ſuivant les meſures qu'on aura déterminé d'employer, les deux courbes *EGPHF*, & *EIMNF* ſur la Projection longitudinale, & leur correſpondante *EGPHF*, & *VIMNF* ſur l'horiſontale. Ayant décrit enſuite le contour du maître couple ſur la Projection tranſverſale, comme on l'a dit dans les *Chapitres* précédents, on tranſportera ſur cette Projection tous les points des FIG. 27. & 28.

PLANC. VI. FIG. 29. courbes ci-dessus, &, par tous ces points, on menera des horisontales comme *PQ*, *GK*, &c., *ML*, *IA*, &c., & les verticales *MB*, *IX*, &c. C'est dans ces dernieres que doivent se trouver les centres des arcs du corps le plus bas des trois qui doivent être tangents entr'eux, comme les centres des arcs du corps le plus élevé doivent se trouver dans les horisontales *PQ*, *GK*, &c. Ainsi, ayant décrit à volonté les courbes *QKE*, *BXY*, leurs intersections avec les horisontales & verticales, donneront les centres des arcs circulaires $P\alpha$, $G\xi$, &c., & $M\epsilon$, $I\pi$, &c.; de même que les distances *QP*, *KG*, &c., & *BM*, *XI*, &c., donneront les rayons avec lesquels ces arcs doivent être décrits. Ces arcs étant donc décrits, on a déjà les deux corps supérieur & inférieur, il ne reste plus qu'à trouver un corps intermédiaire qui leur soit tangent : or, on peut déterminer ce corps en décrivant des cercles égaux au cercle correspondant du maître couple; c'est-à-dire, en les décrivant tous avec le rayon qui a servi à décrire l'arc $\alpha\epsilon$ du maître couple, & en observant que ces arcs soient tangents à leurs correspondants supérieur & inférieur : c'est ainsi qu'a été décrit l'arc $\xi\pi$, &c. En suivant ce procédé, le corps principal du Navire se trouve entiérement tracé.

(75.) Si en décrivant tous les arcs intermédiaires avec des rayons égaux à celui qui a servi à décrire l'arc $\alpha\epsilon$, on s'appercevoit que le corps du Navire devînt un peu trop plein, ou trop taillé, relativement aux intentions qu'on auroit dans cette Construction; on pourroit alors décrire ces arcs avec des rayons qui augmenteroient, ou deminueroient suivant les ordonnées d'une courbe quelconque.

(76.) Pour décrire ensuite les revers, & éviter l'inconvénient des concavités excessives qui ont lieu en les décrivant avec un seul FIG. 29. corps tangent au corps principal, & au plan *LO* qui divise le Navire suivant sa longueur en deux parties égales, on les décrira de même par deux autres corps tangents entr'eux, au corps principal, & au plan *LO*. Ayant donc décrit à discrétion les deux FIG. 27. courbes *EAK*, *DBL*, qui, s'approchant peu à peu de la quille, parviennent avec douceur à lui être tangentes; la premiere touchant l'étambot par son autre extrêmité; & la seconde étant tangente à la verticale, qui passe par la lisse d'hourdy. La premiere de ces courbes déterminera la hauteur à laquelle doivent se trouver les centres des arcs du corps inférieur; & les distances entre les deux courbes seront les rayons avec lesquels les mêmes arcs doivent être décrits. Portant donc, d'après cela, les hauteurs *A* 33, *S* 30, *Q* 27, &c., sur la Projection transversale, & menant par ces hauteurs les droites

droites $\theta\lambda$, $\mu\gamma$, $\varpi\varphi$, *&c.*; on prendra sur ces lignes les distances $A\theta$, $\gamma\mu$, $\varphi\varpi$, *&c.*, égales à *AO*, *TS*, *BQ*, *&c.* (*Fig.* 27.), & avec ces lignes comme rayons, & des points θ, μ, ϖ, *&c.* comme centres, on décrira les arcs $\lambda\Delta$, $\gamma\Theta$, $\varphi\Phi$, *&c.*, lesquels formeront les parties inférieures des revers. Pour avoir les parties supérieures, on décrira la courbe *UVXY*, *&c.* (*Fig.* 27.), & avec les distances *V*33, *X*30, *Y*27, *&c.*, comme rayons on décrira des arcs qu'on observera de rendre tangents à leurs correspondants $\lambda\Delta$, $\gamma\Theta$, $\varphi\Phi$, *&c.*, & au corps principal; & les centres de ces arcs se trouveront dans une courbe comme on le voit dans la Figure 27; par ce moyen les revers seront entiérement formés. PLAN. VI. FIG. 27. & 29. FIG. 27.

(77.) Dans le dernier revers de poupe, qui correspond à la lisse d'hourdy, l'arc inférieur dégénere en une ligne droite *LV*, par conséquent le rayon avec lequel on décrit cet arc, ou la distance entre les deux courbes *EdSQ*, *DOTB*, prise dans la verticale *UD* (*Fig.* 27.) qui correspond à la lisse d'hourdy, doit être infinie, & en conséquence, la courbe *DOTB* ne doit toucher *UD* qu'à une distance infinie. Au contraire, l'arc supérieur du dernier revers de poupe, qui correspond à la lisse d'hourdy, dégénere dans un arc de cercle, dont le rayon est infiniment petit, & qui est tangent à la même lisse, & à la droite *LV*, d'où il suit que la courbe *UVXY* doit passer par le point *U* qui est dans la verticale de la lisse d'hourdy. On décrira de la même maniere les revers de la proue; mais dans ceux-ci il n'est pas nécessaire que les arcs inférieurs dégénerent en une ligne droite sur l'étrave, ni les arcs supérieurs dans un cercle d'un rayon infiniment petit. FIG. 29. FIG. 27.

(78.) Pour avoir exactement le tracer des courbes *QKE*, & *BXY*, on doit faire attention que le corps principal se terminant à la poupe en une ligne droite *EV*, ou que la derniere section, ou couple dégénérant dans cette ligne droite, il est évident que les rayons comme *PQ*, *GK*, *&c.* des arcs circulaires, doivent aller en diminuant, de sorte que le dernier en *E* se réduise à un point: par conséquent, la courbe *QKE* doit passer toujours par le point *E*, extrêmité de la ligne *PGE*. Par de semblables raisons, on voit que les rayons des arcs circulaires $M\epsilon$, $I\pi$, *&c.*, doivent aller en augmentant, jusqu'à ce que l'arc correspondant au point *V*, dégénere dans la droite *VE*: or, comme cette droite peut être considérée comme un arc de cercle d'un rayon infiniment grand, il s'ensuit que la courbe *BXY* doit être décrite de maniere qu'étant continuée, elle ne puisse être tangente à la ligne *LO* qu'à une distance infinie. Comme la proue se termine dans un point *F*, il FIG. 29.

PLANC. V. est clair que la courbe *CDF*, aussi bien que la courbe *RSTF*, doit passer par ce point *F*, extrêmité supérieure du corps principal.

(79.) Par la méthode que nous venons d'exposer, le Navire se trouve décrit géométriquement, & non-seulement on évite un très-grand nombre de tâtonnements, mais encore on a l'avantage de tracer parfaitement le contour des couples, sans qu'il se trouve des jarrets, des bosses, & des coudes trop subits. En outre, on est assuré que toutes les sections du corps du Navire,* tant les horisontales que les obliques, de même que celles qui représentent les lisses, sont des courbes parfaites, comme il est essentiel qu'elles le soient, pour que le Navire soit bordé solidement & commodément. On observera que même le Vaisseau de Construction Française, dont nous avons donné la description (55 *jusqu'à* 64), se trouve beaucoup plus parfait : on voit (*Fig.* 30.), à peu près la même carene que celle que nous avons décrite aux articles cités, mais corrigée, & elle n'a pas eu alors toute cette perfection, par la difficulté de décrire les couples d'une maniere réguliere, sans y employer une méthode convenable.

FIG. 30.

(80.) On ne prétend pas, pour cela, que pour la précision, il soit absolument nécessaire que tous les couples soient formés par des arcs de cercle, ils peuvent être formés par des arcs d'Ellipse, de Parabole, ou d'autres courbes quelconques : cependant, comme il n'y a pas de courbe aussi facile à tracer que le cercle, & qu'en se servant du cercle; on peut donner au contour des couples toute la variété qu'on voudra, soit en faisant varier les courbes *PGE*, *QKE*, *MIV*, *BXY*, soit en variant les rayons des arcs intermédiaires; & de même en changeant le contour des courbes *EASQ*, *DOTB*, *UVXY*; il nous paroît beaucoup mieux de se réduire au seul usage des cercles, que d'employer tout autres courbes. Dans le Navire Français, par exemple, la courbe *MIV* (*Fig.* 30.) a été décrite de maniere qu'elle a diminué les longueurs des varangues; & par la description de la courbe *BXY*, on a également diminué les rayons des arcs du corps inférieur; par-là le corps du Navire est devenu plus fin, ou moins plein qu'il n'eût été dans une disposition contraire *.

PLANC. VI. FIG. 29. FIG. 27. PLANC. V. FIG. 30.

* Nous nous sommes appliqués à rendre les idées de l'Auteur avec le plus de précision qu'il nous a été possible. Mais nous regrettons beaucoup qu'il n'ait pas développé davantage la méthode importante qui a fait l'objet de ce *Chapitre*. Il laisse entiérement à la discrétion du Constructeur le tracer des courbes qui doivent former les corps de révolution, ainsi que la Projection des courbes à double courbure que doivent former leurs axes; il ne donne là-dessus que des principes très-généraux, qui ne peuvent suffire pour guider les commençants.

Le développement de cette méthode exigeroit un ouvrage à part, du moins, si on le faisoit avec

(81.) On omet ici de parler de quelques petites attentions qu'on doit avoir également présentes, & qu'il est d'usage de ne pas négliger dans la description des Plans, ou Projections; comme de marquer les points où doivent se terminer les bordages, ceux par lesquels doivent passer les lisses, de même que la détermination de la vraie figure que ces courbes doivent avoir, ce qui sert pour déterminer

---

tous les détails que la théorie indique, & dont la pratique a besoin. Cette tâche ne peut gueres être remplie que par un Constructeur très-profond dans la théorie, & d'une pratique consommée. Ce seroit rendre un service immortel à l'Architecture Navale; car chacun sçait, & on l'a pu voir d'ailleurs dans les *Chapitres* précédents, combien les méthodes ordinaires de tracer le Plan des Vaisseaux sont défectueuses. C'est principalement au corps des Ingénieurs-Constructeurs de la Marine, que ce travail appartient, & l'on a lieu d'attendre un succès complet de leurs talents & de leur zele. Nous nous contenterons donc d'exposer succinctement la maniere dont il nous paroît qu'il convient d'envisager ce problême.

1°. Il faudra chercher à déterminer les courbes qui doivent former les corps de révolution; & pour le faire d'une maniere utile & exempte de toute hypothese, il conviendra de circonscrire son objet, en se bornant à la considération des corps qui ont eu du succès dans la pratique; en conséquence on appliquera ce travail aux carenes des meilleurs Vaisseaux, tel que *la Bretagne*, *la Couronne*, *&c.* On feroit bien encore de faire la même chose pour les Vaisseaux de différents rangs; on pourroit même l'appliquer à ceux auxquels on auroit reconnu les qualités les plus médiocres, ou même les plus mauvaises, afin d'avoir des objets de comparaison. Ce travail ne seroit pas difficile; mais il seroit long, fort minutieux, & même dispendieux, car il seroit peut-être essentiel d'avoir des modeles.

2°. Il faudra déterminer, dans le même détail, la courbure, tant verticale qu'horisontale, qu'il faut donner aux axes de ces corps, & tracer avec précision sur les Projections longitudinale & horisontale, les courbes à double courbure que forment ces axes, & de les tracer sur-tout dans le plan du maître couple, afin d'avoir le lieu des centres de tous les arcs qui forment le contour des couples. Ce dernier point, quoique plus embarrassant que le précédent, ne contient cependant que des difficultés du même ordre; quelqu'un versé dans l'art de la Construction, & habitué, par conséquent, au tracer des Plans, pourra aisément y réussir.

3°. A ce travail méchanique doit en succéder un autre tout-à-fait géométrique. Il s'agiroit de sçavoir si l'on ne pourroit pas trouver la solution générale du probleme, la longueur, la largeur & le creux étant donnés, ainsi que les quantités dépendantes des qualités qu'on voudroit donner au Navire. Il faudroit ici un examen très-délicat pour déterminer le dégré d'influence de ces quantités, afin d'en fixer les limites, &c. Les principes posés dans le cours de cet Ouvrage, ne peuvent manquer de jetter beaucoup de lumiere sur ce point, & les Plans dont nous venons de parler, empêcheront toujours de tomber dans l'arbitraire.

4°. Trouver les équations des courbes à double courbure formées par les axes des corps de révolution, & en déduire l'équation de leur Projection dans les différents plans, sur-tout dans celui du maître couple; & tâcher d'en déduire une méthode géométrique, ou même méchanique, pour faire ces Projections d'une maniere prompte & sûre. La solution générale de ce problême avanceroit beaucoup l'art de la Construction.

5°. Ayant obtenu la solution générale, il conviendra de chercher les formes particulieres des équations pour chaque espece de Vaisseau, tant pour le corps principal que pour les revers; ce qui les rendra d'une application plus facile pour la pratique. On conçoit aisément qu'on pourroit tirer de ces équations un très-grand nombre de conséquences de la plus grande importance, qu'on pourroit construire des tables des abscisses & ordonnées de ces courbes, &c. &c.

6°. Si l'on ne pouvoit parvenir à une solution générale, ce qui, malheureusement, est à craindre, on se contenteroit d'une solution approchée: on prendroit encore ce parti dans le cas où la solution générale conduiroit à des équations trop compliquées pour être d'un usage commode. On chercheroit donc à lier, par une loi approchée & simple, les points principaux des courbes dont il est question. Les Géométres ont imaginé pour cela plusieurs méthodes fort utiles; on pourroit sur-tout y appliquer celle de M. le *Marquis de Condorcet*, Sécretaire Perpétuel de l'Académie Royale des Sciences. On la trouve à la fin du Volume d'Expériences, sur la résistance des Fluides, faites à l'Ecole Royale Militaire, par MM. *d'Alembert*, *le Marquis de Condorcet*, & *l'Abbé le Bossut*.

PLANC. IV. l'équerrage qu'on doit donner aux bois dans leur épaisseur. Nous avons, dis-je, omis de parler de ces différents articles, parce qu'ils appartiennent aux traités de pratique, dans lesquels il est nécessaire de tout développer dans le plus grand détail ; mais nous ne devons pas les renfermer ici, pour ne pas mettre de confusion dans la multitude des objets que la théorie nous présente *.

CHAPITRE VI.

De la maniere de décrire les Œuvres mortes sur les Plans, ou Projections.

(82.) LES Œuvres mortes qui, comme nous l'avons dit (*Chap. I.*), sont les parties du Navire qui sont au-dessus de la ligne du fort, ou des plus grandes largeurs du Navire, se rapprochent vers l'intérieur, à mesure qu'elles s'élevent, afin que les poids qu'elles doivent supporter, soient moins éloignés du centre de gravité, & & de diminuer, par ce moyen, les forces d'inertie qu'ils doivent produire dans les mouvements du Navire. Pour construire ces Œuvres mortes, les Anglais ont coutume de tracer une seconde ligne du fort; car la premiere étant fort basse, si la rentrée commençoit de cette ligne, le côté du Navire commenceroit à rentrer de plus bas que la superficie de l'eau, où doit être le premier fort, ce qui seroit préjudiciable pour d'autres qualités que doit avoir le Navire.

FIG. 14. (83.) Ils menent donc la ligne *EabcF*, pour désigner la ligne de ce second fort, en faisant attention que le point *b* soit peu au-dessous du pont principal, ou du premier point. Ils portent ensuite, sur la Projection transversale, les élévations de cette ligne au-dessus de la quille, en les plaçant sur les verticales menées par tous les
FIG. 15. points des lignes *PGE*, *PHF*; car les deux lignes du fort se construi-
FIG. 14. sent avec les largeurs que fournit la ligne *EGPHF*; & l'on a, par ce procédé, la Projection des différents points des lignes *baE* & *bcF*, sur
FIG. 15. la Projection transversale; & par les points de ces lignes, on mene des horisontales, comme *bi*, *ak*, *nm*, *&c.* Prenant, sur ces dernieres, des points tels que *i*, *k*, *m*, *&c.*, de ces points comme centre,

* On trouve des détails fort intéressants sur ces articles, & sur la maniere de tracer les Plans en grand à la salle des gabaris, *&c.*, dans le *Chap. IX* de l'excellent *Traité de Construction* de M. *Chapman*, Chevalier de l'Ordre de l'Epée, premier Constructeur des Armées Navales du Roi de Suede, traduit du Suédois par M. *Vial du Clairbois*, Ingénieur-Constructeur, & de l'Académie Royale de Marine. On chercheroit vainement ailleurs les secours qu'on peut tirer de cet Ouvrage.

avec une distance déterminée & constante pour rayon, on décrit des arcs comme *bl*, *ao*, *np*, &c., qui donnent la continuation des couples jusqu'à *l o p* ; & l'on exécute la même chose pour la proue. PLANC. IV.

(84.) On mene ensuite la ligne *desgh* pour représenter le can supérieur de la préceinte du vibord; c'est-à-dire, pour désigner la ligne du plat-bord, ou le cordon (15.) On porte sur la Projection transversale, les hauteurs de cette ligne au-dessus de la quille; & par les points que ces hauteurs déterminent, on mene les horisontales *dq*, *er*, *fs*, & l'on fait la même chose pour la proue. On trace aussi, sur le Plan horisontal, la Projection de la même ligne *desgh*, qui terminera les largeurs que doit avoir le Navire en cet endroit, & l'on porte ces mêmes largeurs sur la Projection transversale, en *qd*, *re*, *sf*, &c., ce qui donne la ligne *def*, par les points de laquelle doivent passer les revers des couples. Pour tracer ces revers, on forme une tablette *tu*, telle qu'étant appliquée de façon qu'elle soit tangente à l'arc *bl*, elle passe par le point *f*, & que son extrêmité supérieure *u* soit parallele à la ligne *Cq*. On applique ensuite cette tablette, dans la même disposition, aux autres arcs, & aux points qui leur correspondent; elle sert ainsi de regle pour tracer tous les revers. FIG. 14. FIG. 15. FIG. 16.

(85.) Pour la proue, on fait usage d'une autre tablette *xy*, qu'on applique au point *f*, de façon qu'elle soit tangente à l'arc, & l'on marque dessus le point o. Cette tablette étant appliquée de la même maniere au couple *XXVII*, on marque le point *XXVII*; on divise ensuite la distance o *XXVII* suivant les ordonnées d'une courbe, ou suivant les divisions de la ligne *fh* : & en appliquant chaque point de la tablette au point correspondant de cette ligne, de façon qu'elle soit tangente à l'arc inférieur, on décrit, à son moyen, tous les autres revers.

(86.) Quelques Constructeurs emploient ce procédé pour décrire les revers de poupe; mais, dans plusieurs occasions, il est sujet à des inconvénients : car, pour faire convenir la tablette avec l'arc inférieur, il est nécessaire de lui donner un mouvement de rotation sur les points de la ligne *fed*; & quoique, par ce mouvement, la surface, ou le côté du Navire ne cesse pas de se conserver avec une courbure bien suivie, & que ses sections ne s'éloignent pas d'être des courbes continues & parfaites; cependant il y a des cas où les sections qui passent par les extrêmités des couples, & sur la ligne *fd*, dégénerent en des courbes en partie concaves, & en partie convexes, ce qui est absolument contraire aux idées reçues, & est très-préjudiciable pour clouer le bordage. Aussi les Constructeurs sont-ils obligés de faire corriger ces défauts avec l'erminette.

Planc. IV. Fig. 14. (87.) Ces Constructeurs ont encore coutume de commettre une autre erreur, en traçant la ligne *bcF*; ils la tracent sans avoir égard à sa nature; ils lui donnent la courbure qui leur paroît la plus agréable à la vue. Nous prendrions ce parti, s'il n'en résultoit aucun inconvénient; mais
Fig. 15. toutes les fois que l'angle *izb*, formé par la ligne *iω*, menée du centre *i* au point *ω*, dans lequel l'arc & le revers se touchent, & par la ligne *bz*, tangente de l'arc *bcF* dans le point *b*, toutes les fois, dis-je, que cet angle sera aigu, les arcs de quelqu'uns des couples *III*, *VI*, &c., couperont l'arc *bω* du maître couple plus bas que le point *ω*; d'où il suit que le côté du Navire saillissant plus en dehors qu'au maître couple, il ne peut qu'être très-imparfait.
Fig. 14. C'est pour cette raison qu'on n'a pas tracé la courbe *bcF* avec cette douceur qu'on pouvoit lui donner. Un inconvénient semblable peut avoir lieu à la poupe; cela dépend de la grandeur & de la disposition qu'on donnera aux couples, & de la nature de la ligne
Fig. 15. *banE* qui peut être courbe & convexe vers le haut. Pour éviter cet inconvénient, on suivra la même regle que celle qu'on a donnée pour la proue.

Fig. 15. 16. (88.) Quand on trace les revers du couple *XXVII*, il est nécessaire d'avoir présent à l'esprit que la courbe *vj* doit se terminer avec douceur sur l'étrave dans le point *j*; c'est-à-dire, sans qu'elle souffre aucune violence dans son contour; car, sans cette attention, on pourroit donner à ce couple une telle ouverture dans le point où il est coupé par cette courbe, que la courbe *vj* ne se terminât sur l'étrave qu'avec un coude considérable, ce qui seroit très-choquant.

(89.) Les Constructeurs Français tracent les Œuvres mortes, en
Planc. V Fig. 19. suivant leur méthode générale de la division des lisses. Ils achevent le maître couple en continuant la verticale *PA* jusqu'à la hauteur donnée par la Projection longitudinale; & faisant *AI* = *AK*, qu'ils appellent la *Rentrée des Œuvres mortes au maître couple* *, de la quantité qu'ils ont déterminé qu'elle devoit être, ils décrivent deux arcs de chaque côté, l'un convexe, comme *PL*, *PO*, tangent en *P* à la ligne *PA*, & l'autre concave comme, *LI*, *OK*, tangent au premier en *L* & *O*. Ils achevent de la même façon les couples 33 & *XXVII*; & tirant ensuite des lisses, comme *LN*, *IS*, *TV*, *OQ*, *KR* *, ils les divi-

---

* En Espagnol, *Recogimiento del portalon*, c'est-à-dire, Rentrée de l'échelle, parce que c'est souvent à cet endroit qu'on place les échelles pour monter dans le Navire.

** La lisse *RK*, *IS*, est ce qu'on appelle la lisse du vibord, celle *LN*, *OQ*, s'appelle lisse intermédiaire; on pourroit l'appeller lisse de *l'Inflexion*, cela la distingueroit des lisses intermédiaires de l'œuvre vive. Les autres lisses supérieures à celle du vibord, s'appellent lisses des rabattues, parce qu'on appelle *Rabatues* les élévations par degrés des Œuvres mortes du Vaisseau, en avant & en arriere.

sent par les triangles déjà construits, en les plaçant également sur ces triangles entre les couples o, 33, & o, *XXVII*; enfin, portant les points correspondants sur la Projection transversale, ils font passer des courbes par ces points jusqu'aux hauteurs indiquées par la Projection longitudinale, & les couples se trouvent entiérement achevés. PLANC. V. FIG. 23. & 22.

(90.) On peut également décrire les Œuvres mortes par notre méthode géométrique. Pour cela, on menera, s'il est nécessaire, la seconde ligne du fort *EabcF*; mais on lui donnera un contour bien suivi, parce qu'ici il n'est pas nécessaire d'avoir la précaution que nous avons recommandée pour éviter l'erreur qu'on peut commettre dans la méthode Anglaise. On portera, sur la Projection transversale, les hauteurs de cette ligne au-dessus de la quille, en les plaçant sur les verticales tirées par tous les points des lignes *PGE*, *PHF*, attendu que les deux lignes du fort sont supposées avoir l'une & l'autre les largeurs que fournit la ligne *EGPHF*. Par ce procédé, les lignes *baE*, & *bcF* se trouveront déterminées, avec tous leurs points, dans la Projection transversale. Cela fait, on mene, par tous ces points, des lignes horisontales, comme *bi*, *ak*, *nm*, & on les coupe par une courbe *ikm*; & prenant pour centres les intersections qu'elles fournissent, & pour rayons leurs distances aux points *b*, *a*, *n*, *&c.*, on décrit des arcs, comme *bl*, *ao*, *np*, *&c.*, lesquels donnent la continuation des couples jusqu'à *lop*. On fait la même chose pour les couples de l'avant. PLANC. VI. FIG. 27. FIG. 29.

(91.) On tracera ensuite la ligne de plat-bord, ou le cordon *defh*, tant sur le Plan longitudinal que sur l'horisontal, & on prendra sur ces Plans les largeurs de poupe, qu'on portera sur le Plan transversal: par les points, ainsi déterminés, & avec des rayons qui aillent en diminuant suivant les ordonnées d'une courbe, on décrira des arcs de cercle, comme *pdu*, *oer*, *lf*, *&c.* tangents aux arcs *np*, *ao*, *bl*, ayant soin qu'ils rentrent toujours; & les hauteurs des extrêmités supérieures de ces arcs seront les mêmes que leurs correspondantes sur le Plan longitudinal.

(92.) On pratiquera la même chose pour les couples de la proue; mais ayant soin que la concavité de l'arc *yh* soit telle que la courbe *lsj* du Plan horisontal se termine avec douceur sur l'étrave. FIG. 28 & 29.

(93.) La théorie de cette méthode est fondée sur les principes que nous avons donnés ci-devant (65 *& suiv.*), en exposant la description des fonds, par conséquent nous pouvons nous dispenser de la répéter ici. Il est certain qu'en suivant cette méthode on évite tous les inconvénients qu'on rencontre dans la méthode Anglaise; & les côtés du Navire se décrivent avec toute la justesse qu'on peut désirer, tous les couples étant formés par des

arcs de cercle, qu'on décrit ſans aucune difficulté; avantage qui n'a pas lieu dans la méthode Françaiſe.

CHAPITRE VII.

Des Ponts.

(94.) Nous avons dit dans le *Chapitre* premier, qu'on à coutume d'établir dans l'intérieur du Vaiſſeau des ſéparations, ou planchers que les Marins appellent des *Ponts*; & que ces planchers ſervent comme d'arc-boutants pour ſoutenir les côtés du Navire contre l'effort que produit le poids, ou la violence des eaux, qui agiſſent ſans ceſſe pour les pouſſer vers l'intérieur, & pour en conſerver l'union que cet effort pourroit détruire. Nous avons dit encore que ces Ponts, étant diſtribués d'une maniere convenable, ſervent pour placer l'artillerie, pour ſerrer différents effets que le Navire doit contenir, & pour faire des logements aux équipages. Le nombre des Ponts eſt proportionné au corps du Navire; car plus celui-ci ſera grand, plus l'eſpace qu'il eſt néceſſaire d'étayer ou de fortifier ſera conſidérable, & aura par conſéquent beſoin d'un plus grand nombre de pieces qui le lient & le fortifient; & plus auſſi on a beſoin de ménager de place, tant pour le logement des hommes, que pour diſtribuer convenablement l'artillerie que le Navire doit porter, & ſerrer les effets qu'il eſt eſſentiel de mettre à l'abri, &c.

(95.) Les regles que les Conſtructeurs ſuivent généralement pour la diſpoſition des Ponts, ſont que la diſtance d'un Pont à l'autre ſoit pour le moins celle qui eſt néceſſaire pour qu'on puiſſe aller & venir ſur les inférieurs, ſans être gêné, & qu'on puiſſe exécuter avec aiſance le travail & les manœuvres qu'on doit y faire; que ces diſtances ne ſoient pas cependant tellement grandes qu'il en réſulte une élévation démeſurée pour les œuvres mortes, ou, comme diſent les Marins, que le Vaiſſeau en devienne trop *enhuché*; car cela éleveroit beaucoup le centre de gravité, & en conſéquence le Vaiſſeau manqueroit de ſtabilité. Dans les Vaiſſeaux de guerre, le premier, ou le principal Pont, ſur lequel on place la plus groſſe artillerie, s'établit de façon que les *Sabords* ſoient élevés à une hauteur raiſonnable au-deſſus de la ſurface de la mer, afin que l'eau, dans ſes agitations régulieres, ne s'introduiſe pas par leſdits ſabords, & qu'on ne perde pas l'uſage de l'artillerie. La pratique ordinaire eſt de donner

au

au premier Pont, dans le lieu du maître couple, une élévation au-dessus de la quille, entre les $\frac{4}{9}$ & la moitié de la largeur du Navire. Cette détermination, au reste, dépend de l'espece de la Construction du Navire; car, comme nous l'avons déjà dit (8.), cela doit être proportionné au volume, attendu que la flottaison en dépend; par conséquent, le Pont sera plus élevé au-dessus des eaux, à proportion que le volume du Navire sera plus grand, quoique sa distance à la quille demeure constante. PLANC. IV.

(96.) Cela dépend encore beaucoup du jugement & de la prudence des Constructeurs, ou des Marins; parce que quelques-uns prétendent que dans les grands Vaisseaux il suffit que les sabords soient élevés de cinq pieds au-dessus de l'eau, tandis que d'autres ne se contentent pas d'avoir six de batterie, & en exigent même jusqu'à sept. Ce qu'il y a de certain, c'est que toutes les fois qu'on pourra donner au Vaisseau une batterie élevée, ou ce que les Marins appellent une *Belle Batterie* *, sans préjudicier aux autres qualités, ce sera un très-grand avantage, parce qu'ordinairement la mer est agitée de maniere à s'élever au-dessus des sabords.

(97.) Enfin, de quelque forme que soit le Vaisseau, les Constructeurs suivent une regle générale pour la hauteur que doit avoir le premier Pont au-dessus de la quille; & cette regle leur a été ordinairement fournie par l'expérience, ou bien ils l'ont reçue de leurs maîtres. Ils suivent le plus souvent cette regle, sans avoir égard à ce qu'ils peuvent avoir ajouté au volume de la Carene du Navire, ou en avoir retranché, d'où il résulte que très-souvent les batteries ne se trouvent pas avoir la hauteur qu'ils se proposoient de leur donner. Cependant, les théories qu'on a publiées jusqu'ici, ont déjà donné assez de lumieres pour que les Constructeurs les plus habiles aient porté leur attention à cet objet important, & par-là ils ont beaucoup plus de certitude de réussir sur ce point.

(98.) Ayant établi sur le maître couple le point *b* par lequel doit passer le premier Pont, soit en donnant à ce point une élévation au-dessus de la quille, des $\frac{4}{9}$, ou de la moitié de la largeur, ou soit en lui donnant une hauteur moyenne entre les deux précédentes, comme des $\frac{19}{40}$ de la même largeur, il paroît que sa situation devroit être déterminée dans toute sa longueur, en le mettant parallele à la superficie de l'eau; puisque les mêmes raisons subsistent pour qu'il en soit à égale distance dans toute sa longueur. Mais l'expérience a fait voir qu'il étoit nécessaire de l'arquer, ou de FIG. 14

* Les Espagnols appellent cela *Bateria desahogada*.

PLANC. IV. l'élever davantage dans ses extrêmités de poupe & de proue, en lui donnant ce que nous avons ci-devant exprimé (15.) par le mot *tonture*, afin que les eaux qui peuvent tomber sur le Pont puissent s'écouler vers le milieu, ou vers le maître couple où se trouvent ordinairement les dalôts *. On donne aussi cette tonture aux Ponts pour s'oppoſer qu'avec le temps ils ne prennent une courbure dans le sens contraire, par la disposition que les extrêmités de poupe & de proue du Navire ont à s'abaisser, ce qui constitue ce que les Marins appellent *Arquer*; accident qui est inévitable dans les grands Vaisseaux, comme nous l'expliquerons par la suite.

(*99.*) La tonture, ou le plus grand relevement qu'il est d'usage de donner au Pont vers la poupe, est depuis $\frac{1}{72}$ jusqu'à $\frac{1}{78}$ de la longueur du Vaisseau; on se regle dans cette mesure sur le plus ou le moins de capacité qu'on donne aux couples de poupe, à l'égard de ceux de la proue: car il est bien certain que l'assiette du Vaisseau, ou sa situation lorsqu'il flotte sur l'eau, dépend de cette relation : en augmentant le volume de la poupe, il n'est pas nécessaire de donner une si grande tonture; c'est le contraire si on le diminue. Les Constructeurs ont d'avance toutes leurs mesures déterminées, d'après ce que la pratique leur à pu apprendre dans la Construction des Navires qu'ils ont déjà faits; & ils n'ont pas d'autre guide. Lorsque les altérations qu'ils font subir au corps du Navire sont petites, la différence qui en peut résulter pour la tonture des Ponts, devient insensible; mais il y a beaucoup de cas dans lesquels la différence a été très-notable. Cependant, il leur reste la ressource que la disposition du chargement corrigera les défauts qu'ils n'auroient pas prevenus par l'étude préliminaire du plan du Vaisseau: car en mettant plus de poids dans la partie la plus volumineuse, on parvient à donner au Vaisseau l'assiette qu'on s'étoit proposée. Cette ressource a cependant un grand inconvénient; il n'est pas possible, par exemple, de faire baisser la proue en faisant passer des poids de la poupe à la proue, sans que la poupe ne s'éleve; & par conséquent, sans que le Navire ne soit plus exposé à s'arquer, comme nous le ferons voir dans la suite.

FIG. 14. (100.) Les Constructeurs marquent donc le point *A* plus élevé au-dessus de la quille que le point *b* de la quantité que leur pratique leur a enseignée, soit de $\frac{1}{72}$, de $\frac{1}{78}$, ou de toute autre partie

* Cet avantage ne peut subsister que dans les Ports; car à la mer le tangage continuel du Vaisseau détruit entiérement l'effet de la tonture. L'avant du Vaisseau se trouve tantôt plus haut, & tantôt plus bas que le milieu, & les eaux, qui sont sur le Pont, suivent ce mouvement, & ne peuvent se rassembler au milieu pour s'évacuer promptement par les dalots.

de la longueur du Vaisseau, moyenne entre ces deux : & par les mêmes principes ils marquent à la proue un autre point dont l'élévation au-dessus de la quille surpasse celle du point *b* de $\frac{1}{72}$ de la longueur, tout au plus. Faisant ensuite passer une courbe *Sbi*, par ces trois points, cette courbe marquera la situation du premier Pont dans toute sa longueur.

(101.) Non-seulement on donne à ce Pont la tonture, ou l'arc que nous avons déterminé dans le sens de sa longueur, on lui donne aussi de la courbure dans le sens de sa largeur, c'est-à-dire, suivant ses sections transversales, ou perpendiculaires à la quille, en l'abaissant sur les côtés, & le laissant plus élevé dans le milieu; cette disposition empêche les eaux d'y séjourner, en leur donnant un écoulement vers les côtés où se trouvent les dalots. Cette courbure, que les Constructeurs & les Marins appellent le *Bouge des Baux*, parce qu'ils donnent le nom de *Baux* aux solivaux, sur lesquels les bordages des Ponts sont cloués, doit être proportionnée à la longueur des baux, ou à la largeur des Ponts dans chaque point de leur longueur, afin que le talus, ou la pente qui est nécessaire soit uniforme ; mais tous les Constructeurs ne sont pas d'accord sur la maniere de déterminer cette courbure. Cependant, lorsqu'elle est la plus grande, ils ont coutume de donner au point du milieu une élévation de $\frac{1}{48}$ de toute la longueur du bau au-dessus des points des côtés. Les Anglais font cette élévation moindre lorsque le Pont est couvert par un autre, & la font plus grande lorsqu'il est exposé à recevoir les coups de mer; ensorte que les Ponts supérieurs ont plus de bouge que les inférieurs.

(102.) Ayant marqué la place & la disposition du premier Pont qui est le principal, on marque celle du second & du troisieme, qui sont au-dessus de lui, lorsque le Vaisseau est d'une capacité suffisante pour en avoir : ordinairement on les fait paralleles au premier, & distants entr'eux de 5, 6, 7, & même jusqu'à 7 pieds $\frac{1}{2}$, suivant la grandeur du Navire, & l'usage qu'on doit faire de l'espace compris entre les Ponts, que les Marins appellent *Entreponts*. Dans les plus grands Vaisseaux qui portent une grosse artillerie à leur premiere batterie, laquelle est composée de pieces de 36 ou de 24 liv. de balle, on donne 7 pieds $\frac{1}{2}$ Anglais de hauteur à l'entrepont, y compris l'épaisseur des baux; cette hauteur étant suffisante pour la commodité de la manœuvre, & du service de l'artillerie. Dans les Vaisseaux plus petits, on diminue cette hauteur à proportion, mais on ne la réduit pas au-dessous de 6 pieds $\frac{1}{2}$, qui est la hauteur nécessaire toutes les fois qu'il y aura de l'artillerie entre les deux Ponts. Lorsqu'il ne devra point

y en avoir, la hauteur des entreponts pourra être moindre, & diminuer à proportion jusqu'à même se reduire à 5 pieds, qui est la moindre hauteur qu'on puisse donner pour que les hommes de l'équipage puissent y marcher en se baissant, & s'y tenir assis. On a coutume, particuliérement dans les grands Vaisseaux, de mettre un autre Pont au-dessous du premier, que l'on appelle *Plancher de la Cale*, ou *Faux-Pont* *. Car, comme il reste une très-grande distance, ou une très-grande capacité depuis le premier Pont jusqu'à la quille, les côtés du Navire n'auroient aucun soutien dans tout cet espace.

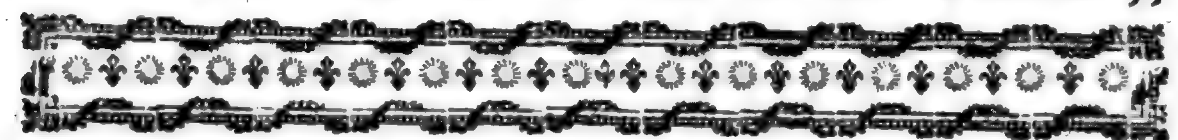
(103.) Outre les Ponts dont nous venons de parler, on a coutume de construire un autre demi-Pont au-dessus de tous les autres, & qui s'étend depuis la poupe jusqu'au milieu du Vaisseau, c'est ce que les Marins appellent le *Gaillard d'arriere.* On en construit encore d'autres d'une moindre étendue; sçavoir: un au-dessus du gaillard d'arriere, & qui s'étend jusqu'à la moitié de sa longueur, qu'on nomme *Dunette*; & un autre en avant, & à la même hauteur que le premier, qu'on nomme *Gaillard d'avant.* Il ne se présente rien à remarquer au sujet de ces demi-Ponts, ces détails n'entrent pas dans notre plan, ainsi que nous l'avons déjà dit. Nous dirons seulement que le parallélisme des Ponts n'est pas observé par tous les Constructeurs: les Français donnent un peu plus de hauteur aux entreponts vers la poupe, & font en général tous les entreponts plus élevés. Cette plus grande hauteur à la poupe a pour objet de faciliter le jeu de la *Barre du Gouvernail*, qui est la piece avec laquelle on l'assujettit dans une situation convenable, & avec laquelle on le fait mouvoir; mais il en résulte une plus grande tonture, ce qui est encore préjudiciable. La vérité est que les Constructeurs n'ont encore trouvé aucun moyen de placer cette barre, sans préjudicier aux pieces de bois qui assujettissent la poupe, particuliérement sans préjudicier à celle qu'on nomme *Barre d'Écusson* **, qui est placée au-dessus de l'extrêmité de l'étambot. Les Anglais remédient à cet inconvénient en donnant une courbure à cette piece dans son milieu & vers le bas. Quant aux détails particuliers dans lesquels il convient d'entrer, & aux autres attentions qu'on doit avoir dans la Construction des Ponts, nous n'en parlerons point ici: nous renvoyons aux traités de pratique, tant parce que ces détails sont très-nombreux, que parce qu'ils n'entrent pas dans le plan que nous nous sommes proposé ***.

---

* En Espagnol *Sollado*.

** Les Espagnols l'appellent la *Cruz*, c'est-à-dire, la *Croix*.

*** Voyez l'*Architecture Navale* de M. *Duhamel*, l'*Essai Géométrique & Pratique sur l'Architecture Navale*, par M. *Vial du Clairbois*, & l'excellent Ouvrage de M. *Chapman*.



LIVRE SECOND.

EXAMEN DU CORPS DU NAVIRE, de ses centres, & des forces, résistances & moments qu'il eprouve.

CHAPITRE PREMIER.

De la flottaison du Navire, de sa ligne d'eau, de son poids total, & du poids de sa coque.

(104.) AU moyen d'une pratique non interrompue pendant un grand nombre d'années, & par une tradition passée des uns aux autres, les Constructeurs sçavent à peu près quelle doit être la ligne d'eau dans laquelle le Vaisseau doit demeurer, & la disposition dans laquelle il doit s'établir, lorsqu'il flottera. Si, par beaucoup de tâtonnements & d'expériences, on étoit parvenu à trouver la disposition la plus avantageuse dans laquelle un Vaisseau pût flotter, il est évident qu'il n'y auroit aucune erreur à fixer la même disposition pour un autre Vaisseau absolument semblable, & qui seroit d'une grandeur & d'un poids égaux au premier. C'est par cette regle que les Constructeurs se sont conduits jusqu'à ces derniers temps, pour déterminer ce point important ; & en effet, si l'on ne varioit pas les dimensions, & si le poids des bois & des autres matériaux étoit toujours le même, il n'y a pas de doute que cette regle ne fût certaine, & il n'y auroit rien de mieux à faire que de la suivre ; mais, pour l'ordinaire, ces variations ont lieu, & on est même le plus souvent obligé de les introduire dans la pratique : ainsi l'état & la disposition qu'il convient de donner au Navire, deviennent par-là très-incertains.

(105) Les Constructeurs qui ont quelque théorie, font usage des principes d'Hydrostatique, pour déterminer au moins le volume que doit occuper leur Vaisseau dans le fluide. Nous avons déjà démontré (*Tome I.* 561.), que le volume qu'un corps doit occuper dans un fluide, pour que, flottant sur ce fluide, il demeure en repos, est

égal à un volume de ce même fluide, dont le poids est égal à celui du corps flottant. De cette proposition on infere conséquemment que, connoissant le poids de toutes les parties qui composent le Vaisseau & sa charge, comme bois, ferrures, agrès & apparaux, ancres, artillerie, vivres, équipages, &c., on pourra sçavoir combien il faut de pieds cubes d'eau de mer pour faire un poids égal à celui de la somme totale; c'est ce nombre de pieds cubiques que le Vaisseau doit avoir de submergés; c'est-à-dire, qu'il doit déplacer par sa partie submergée. Il n'est pas impossible de parvenir à connoître le poids total des Vaisseaux, ou d'un Vaisseau qu'on voudroit construire. Le calcul est un peu long & pénible, &, à moins d'une extrême attention, on est même exposé à commettre des erreurs; mais il n'est point difficile, & une fois vérifié, il l'est pour toujours.

(106.) Le calcul du volume de fluide que déplace le corps du Vaisseau par sa partie submergée n'a aucune difficulté pour un Géometre. On peut considérer tout ce corps divisé en prismes par des plans verticaux & horisontaux, & le volume de chacun étant déterminé par les regles ordinaires de la Géométrie, la somme de ces volumes donne le volume total du corps; duquel on peut ensuite ôter facilement la partie qui doit être submergée. L'unique chose à laquelle on doive avoir attention pour mettre dans cette pratique toute l'exactitude qui est nécessaire, est que les prismes soient petits, afin que leurs côtés extérieurs, qui font partie de la surface extérieure du Navire, soient sensiblement planes; car la facilité du calcul de leur volume exigeant qu'ils soient supposés tels, il faut qu'ils en approchent assez pour que les résultats soient exempts d'erreurs sensibles. Un simple coup-d'œil géométrique jetté sur cette opération en facilitera beaucoup la pratique.

Planc. VII. Soit *AMNOC* la Projection longitudinale du Vaisseau, & la droite *ABC* sa ligne d'eau, ou celle jusqu'à laquelle il doit à peu près se submerger. Soit divisé la hauteur *BO*, prise au maître couple, en un nombre quelconque de parties égales, par exemple, en cinq, ce qui est suffisant pour l'usage ordinaire; & par les points de division *B*, *E*, *H*, *K*, *N*, soit tiré les droites *DEF*, *GHI*, *JKL*, *MNO* paralleles à *ABC*, lesquelles représenteront autant de plans, ou sections horisontales, par lesquelles on suppose que le corps du Navire est divisé. Soit porté, sur la Projection transversale, tous les points dans lesquels ces plans coupent les couples, afin de faire passer par ces points la ligne courbe qui les représente; portant ensuite les points de la Projection transversale sur l'horisontale, & faisant passer par ces points les courbes *ABC*, *DEF*, *GHI*, *JKL*, *MNO*, ces

courbes termineront, & donneront la vraie repréſentation & les vraies dimenſions de ces plans. Regardant maintenant les largeurs des couples o, *III*, *VI*, &c., o, 3, 6, &c, priſes dans ces plans, comme autant d'ordonnées aux courbes ; & ſe rappellant que l'aire compriſe entre deux de ces ordonnées, eſt égale à la ſomme de celles-ci, multipliée par la moitié de leur diſtance *, ſi nous faiſons cette diſtance $= d$, nous aurons $(o + III)\frac{1}{2}d$ pour l'aire compriſe entre les couples o & *III* ; $(III + VI)\frac{1}{2}d$ pour celle compriſe entre les couples *III* & *VI*, & ainſi des autres : par conſéquent l'aire, ou le plan compris entre les couples o & *XXVII* ſera $= (o + III)\frac{1}{2}d + (III + VI)\frac{1}{2}d + (VI + IX)\frac{1}{2}d + (IX + XII)\frac{1}{2}d + (XII + XV)\frac{1}{2}d + (XV + XVIII)\frac{1}{2}d + (XVIII + XXI)\frac{1}{2}d + (XXI + XXIV)\frac{1}{2}d + (XXIV + XXVII)\frac{1}{2}d$, & en réduiſant $= (\frac{1}{2}o + III + VI + IX + XII + XV + XVIII + XXI + XXIV + \frac{1}{2}XXVII)d$: d'où l'on voit que l'aire, ou la ſurface, du plan compris entre le maître couple, & le dernier couple de la proue, ou de la poupe, eſt égale à la ſomme des largeurs de tous les couples intermédiaires, plus la moitié des largeurs des couples extrêmes, multipliée par la diſtance commune entre les couples. Telle eſt auſſi la regle qu'a donnée M. *Bouguer* dans ſon *Traité du Navire*. Pour avoir enſuite les aires entieres de ces plans, il ne faut plus qu'ajouter à chacune des aires qu'on vient de déterminer, les eſpaces qui reſtent entre les couples extrêmes & l'étrave & l'étambot, ce qui ſe réduit à un petit triangle de chaque côté, dont la ſurface eſt égale au produit de la largeur du couple, par la moitié de ſa diſtance au point où la courbe ſe joint à l'étrave, ou à l'étambot. Dans la courbe *ABC*, par exemple, le triangle de la proue eſt $= XXVII.\frac{1}{2}(XXVII\,C)$; il en eſt de même des autres. On aura ſeulement attention de ſouſtraire de chacune des aires l'eſpace compris entre les deux lignes paralleles qui repréſentent le maître couple, parce qu'on le prend double, en ſuivant la regle qu'on a donnée.

(107.) Ayant ainſi meſuré la ſurface des ſections par leſquelles on a diviſé le Plan longitudinal, il eſt queſtion de trouver les ſolides, ou volumes qu'elles renferment. La regle pour les meſurer eſt analogue à celle qu'on a ſuivie pour les plans ; car chacun de ces ſolides eſt égal à la ſomme des deux ſections ſupérieures & inférieures, multipliée par la moitié de la diſtance qu'il y a entre elles. C'eſt ce qu'il eſt aiſé de faire voir ; car on peut ſuppoſer qu'il y a dans chaque priſme deux faces paralleles qui feront les deux ſections horiſontales. Suppoſons que ces deux ſections ſont deux rectangles, dont les côtés

* *Voyez* le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Seconde Partie, *Art.* 254.

sont a & e, & b & f, b étant plus grand que a, & f plus grand que e : alors il est évident que la surface d'un rectangle intermédiaire entre les deux ci-dessus, & distant du plus petit ae de la quantité x, sera exprimée par $\left(a+\frac{b-a}{d}x\right)\left(e+\frac{f-e}{d}x\right)$ * $= ae + \frac{a}{d}(f-e)x + \frac{e}{d}(b-a)x + \frac{x^2}{d^2}(f-e)(b-a)$; & que la différencielle du prisme sera $= aedx + \frac{a}{d}(f-e)xdx + \frac{e}{d}(b-a)xdx + \frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a)$; quantité dont l'intégrale, en faisant $x=d$, est $= aed + \frac{1}{2}ad(f-e) + \frac{1}{2}ed(b-a) + \frac{1}{3}d(f-e)(b-a) = \frac{1}{3}aed + \frac{1}{6}afd + \frac{1}{6}bed + \frac{1}{3}bfd = \frac{1}{6}ad(f+2e) + \frac{1}{6}bd(2f+e)$. Supposons maintenant $e=f$, cette intégrale se réduit à $\frac{1}{2}d(ae+bf)$; c'est le résultat sur lequel nous avons fondé notre calcul, ainsi que l'a fait M. *Bouguer*. La supposition de $e=f$ ne renferme aucune erreur sensible, attendu que les longueurs des deux sections horisontales sont à très-peu près les mêmes. Le solide compris entre les deux sections ABC, DEF, sera donc égal à $(ABC+DEF)\frac{1}{2}d$, d exprimant maintenant la distance BE : pareillement le solide compris entre la section DEF & la section GHI, est égal à $(DEF+GHI)\frac{1}{2}d$, & ainsi des autres ; donc la solidité, ou le volume de tout le Navire, sera $= (ABC+DEF)\frac{1}{2}d + (DEF+GHI)\frac{1}{2}d + (GHI+JKL)\frac{1}{2}d + (JKL+MNO)\frac{1}{2}d + (MNO+Q)\frac{1}{2}d = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$(\frac{1}{2}ABC + DEF + GHI + JKL + MNO + \frac{1}{2}Q)d$, Q exprimant la surface de la quille ; de sorte que le volume total du Navire sera égal à la somme de toutes les sections intermédiaires, plus à la moitié des sections extrêmes, multipliée par la distance commune entre les sections. Il est nécessaire d'ajouter à ce résultat le volume du bordage, de la quille, de l'étrave, de l'étambot, du gouvernail, & du taillemer, & l'on aura le volume de toute la partie du Navire qu'on suppose submergée jusqu'à la ligne d'eau ABC.

(108) Il faut remarquer que, dans la pratique, la quille n'est pas parallele à la ligne MNO, ainsi qu'on l'a supposé dans la méthode de calcul qu'on vient d'exposer ; mais, après avoir fait une

---

PLANC. VII. FIG. A.

* Car si $ABFGHCDE$ représente le prisme dont il s'agit, ayant les deux faces $ABFG$, $CDEH$ horisontales, & les faces $BDEF$, $BDCA$ verticales. Si l'on abaisse dans ces dernieres les perpendiculaires Fp, Am, & si l'on conçoit le plan $abfg$ paralleles aux faces horisontales, il est évident qu'on aura $Cm = CD - AB = b - a$, & $fo = ED - FB = f - e$. Ceci posé, les triangles semblables ACm, Aan, donnent $Am : An :: Cm : an$, ou $d : x :: b-a : \frac{(b-a)x}{d}$. Donc $ab = bn + an = BA + an = a + \frac{(b-a)x}{d}$. On prouvera de même que $fo = \frac{(f-e)x}{d}$, & $bf = e + \frac{(f-e)x}{d}$. Donc, &c.

compensation

compensation des différences en plus & en moins, qui se rencontrent, & en ayant fait un calcul rigoureux, les différences qui peuvent résulter de cette supposition se sont trouvées négligeables, & par conséquent on a suivi généralement la regle ci-dessus, & nous croyons qu'on peut s'en tenir là *. L'exemple suivant fera connoître la maniere dont il convient de procéder dans le calcul,

* Il est bien vrai que cette supposition ne peut causer des différences bien considérables; cependant nous préférerions de considérer les choses dans leur état naturel, & d'employer une méthode de calcul plus rigoureuse. Celle qu'on trouve dans le *Traité de Construction* de M. *Chapman*, a cet avantage, sans être moins expéditive pour la pratique.

La méthode que notre Auteur vient d'exposer, suppose que la portion de chaque ligne d'eau, comprise entre deux couples est une ligne droite, & qu'il en est de même de la portion de chaque couple comprise entre deux plans de flottaison. M. *Chapman* suppose, au contraire, ces espaces terminés par des lignes courbes, comme en effet ils le sont, & il leur suppose une courbure parabolique. Il est vrai qu'en multipliant le nombre des sections horisontales & verticales, l'erreur qui peut résulter de la supposition des lignes droites, devient insensible; mais les deux méthodes étant appliquées au même nombre de sections, celle de M. *Chapman* donnera plus d'exactitude. Comme cet article nous paroît assez important, nous allons développer la théorie de la méthode dont il est ici question.

Trouver la surface d'un Plan terminé par une ligne courbe quelconque.

Soit *abhon* le plan dont il s'agit, si l'on divise la ligne *an* en un certain nombre de parties égales (plus il y en aura, plus le calcul sera exact), & si, par les points de division, on lui éleve des perpendiculaires *ab*, *cd*, *ef*, &c., lesquelles nous appellerons *a*, *b*, *c*, *d*, &c., chacun des espaces tels que *abdfe*, sera composé d'un trapese *abfe*, & d'un segment *bdfr*. Cela posé, il est clair qu'en supposant la ligne *an*, divisée en un nombre suffisant de parties, on pourra regarder le segment *bdfr* comme appartenant à une courbe quelconque, & comme on a une expression simple du segment parabolique, il conviendra de le supposer de cette espece; & alors *cd* sera un diametre de la parabole (*Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Troisieme Partie, *Article* 366.), & la corde *bf* sera une double ordonnée à ce diametre. Nommant *n* l'intervalle constant *ac* entre les ordonnées, l'aire du trapese *abfe* sera $=(a+c)n$. L'aire du segment parabolique *bdfr* est les deux tiers de celle du parallelogramme *bsfv* (*ibidem*, Quatrieme Partie, *Article* 95.). Or l'aire de ce parallélogramme $= by.fv$; & $fv = dr = cd - cr = b - \frac{1}{2}(a+c)$, (*ibidem*, Deuxieme Partie, *Article* 148). Donc $bsfv = (b - \frac{1}{2}(a+c))2n = (2b-a-c)n$; & par conséquent, le segment $bdfr = (2b-a-c)\frac{2}{3}n$. Ajoutant cette surface avec celle du trapese, & réduisant, on aura l'aire de l'espace $abdfe = (a+4b+c)\frac{1}{3}n$. On trouvera pareillement que l'espace $efhki = (c+4d+e)\frac{1}{3}n$; que l'espace $ikmon = (e+4f+g)\frac{1}{3}n$, & ainsi de suite. Donc en rassemblant tous ces résultats, on aura l'aire de l'espace $abhon = (a+4b+2c+4d+2e+4f+g)\frac{1}{3}n$. PLANC. VII. *Projection longitudin.*

Cette expression fait voir que pour avoir la surface de toutes les figures terminées par des lignes courbes, il faut diviser la ligne qu'on imagine traverser ces figures dans leur plus grande longueur, & que nous appellerons l'axe de la figure, en un nombre pair de parties égales (plus on en mettra, plus il y aura de précision); élever des perpendiculaires ou ordonnées à cet axe par chaque point de division, ce qui donnera un nombre impair d'ordonnées, dont on mesurera la grandeur sur une échelle décimale construite exprès. On prendra la premiere & la derniere ordonnée, telles qu'elles sont; on multipliera la deuxieme par 4, & la troisieme par 2; la quatrieme par 4, & la cinquieme par 2; la sixieme par 4, & la septieme par 2; & ainsi de suite jusqu'à l'avant-derniere, inclusivement: on ajoutera toutes ces quantités, & l'on en multipliera la somme par le tiers de la distance entre les ordonnées. On voit aisément comment il faut appliquer cela à la mesure de la surface des couples du Vaisseau, & à celle des plans de flottaison.

Si la courbe prenoit naissance sur l'axe, comme s'il s'agissoit d'avoir l'aire de l'espace *Aqp*, alors la premiere ordonnée qui est celle qui passe par le point *A* seroit $=0$, & l'on multiplieroit l'ordonnée *a* par 4, l'ordonnée *b* par 2, l'ordonnée *c* par 4, & ainsi de suite: de sorte que l'espace *Aqp* seroit $= (0+4a+2b+4c+2d+4e+2f+4g+h)\frac{1}{3}n$.

Application à la mesure de la solidité des corps terminés par des surfaces courbes.

Soit le solide *SRV* formé par la révolution d'une courbe *SMV*, autour de l'axe *SH*; on demande FIG. 8.

PLANC. VII. pour éviter la confusion, & pour y porter toute la netteté dont il est susceptible.

---

la solidité d'une partie $MVRP$ de ce solide, & celle du solide entier SRV. Ayant divisé la ligne QH en un certain nombre de parties égales, & ayant conduit par les points de division des plans, tels que LO perpendiculaires à l'axe SH, que nous appellerons m; si l'on nomme a, b, c, *&c.*, les diametres RV, OL, PM, *&c.*, des sections circulaires, & si l'on prolonge les lignes HV, NL, QM, de maniere que les lignes HT, NG, QF, soient respectivement égales à l'aire des sections circulaires correspondantes (on regarde ici ces aires comme des nombres abstraits); & qu'on fasse passer la courbe TGF, il est évident que l'aire du plan $FQHT$ exprimera la solidité du corps $MPRV$. Cela posé, si l'on nomme p la surface d'un cercle dont le diametre est l'unité; pa^2, pb^2, pc^2, *&c.*, seront les surfaces des sections faites par les plans RV, OL, PM: ainsi les ordonnées HT, NG, QF, étant respectivement égales aux quantités pa^2, pb^2, pc^2, on voit aisément que la formule qu'on vient de donner pour avoir la surface des plans, s'applique ici à la mesure de la solidité des corps; donnons-en quelques exemples.

Soit supposé $HN=NQ$, alors l'aire $HTFQ$ sera $=(FQ+4GN+TH)\frac{1}{3}NH$, & par conséquent la solidité du corps $MPRV=(c^2+4b^2+a^2)p.\frac{1}{3}NH$. Si $HQ=SQ=\frac{1}{2}SH=\frac{1}{2}m$; alors le plan qui passe par S étant $=0$, la solidité de tout le corps SRV sera $=(0+4c^2+a^2)p.\frac{1}{3}HQ$, ou $=(4c^2+a^2)p.\frac{1}{6}m$.

Si la ligne génératrice SMV étoit droite, le solide seroit un cône, & alors $RV=2PM$, ou $RV^2=4PM^2$, ou $a^2=4c^2$; ainsi la solidité de ce corps $=2a^2.p.\frac{1}{6}m=pa^2.\frac{1}{3}m$; c'est le produit de la surface de sa base par le tiers de sa hauteur, comme la Géométrie ordinaire le détermine. Si la courbe SMV étoit une parabole, le solide seroit un paraboloïde; & (*ibid.* Troisieme Partie, *Art.* 360.) $RV^2 : PM^2 :: SH : SQ$ ou $:: 2 : 1$. Donc $RV^2=2PM^2$, ou $a^2=2c^2$. Ainsi la solidité du paraboloïde devient $=3a^2.p.\frac{1}{6}m=pa^2.\frac{1}{2}m$; comme la géométrie le détermine (*ibid.* Quatrieme Partie, *Art.* 105.). Si la courbe SMV est un quart de cercle, ou un quart d'ellipse, le solide sera une demi-sphere, ou un demi-ellipsoïde, & alors (*ibid.* Deuxieme Partie, *Art.* 125, & Troisieme Partie, *Art.* 295.) $RV^2 : PM^2 :: SH.SH : SQ(SH+HQ)$ ou $:: 4 : 3$. Donc $4PM^2=3RV^2$, ou $4c^2=3a^2$, ainsi la solidité de ces corps est $=4a^2.p.\frac{1}{6}m=pa^2.\frac{2}{3}m$, ainsi qu'il est démontré (*ibid.* Deuxieme Partie, *Art.* 246, & Quatrieme Partie, *Art.* 103.).

FIG. C. On voit que notre formule est générale, & qu'elle s'applique même à la mesure des solides dont la courbe génératrice ne prend pas naissance sur l'axe. Soit le solide $S'S''RV$, dont la courbe génératrice $S'MV$ ne prend pas son origine sur l'axe, il est clair qu'en conservant les dénominations précédentes, & nommant f le diametre $S''S'$ du plan extrême, la solidité de ce corps sera $=(f^2+4c^2+a^2)p.\frac{1}{6}m$; expression qui se change dans la précédente, si l'on suppose $f=0$. Si l'on suppose que la ligne génératrice $S'MV$ est droite, & parallele à l'axe SH, le corps sera un cylindre, toutes les sections pa^2, pc^2, pf^2, seront égales à la base, & la solidité de ce corps sera $=6a^2.p.\frac{1}{6}m=pa^2.m$; c'est le produit de sa base par sa hauteur.

Si la ligne $S'MV$, étant droite, n'étoit pas parallele à l'axe SH, le solide seroit un cône tronqué. Si elle étoit une parabole, ce seroit un tronc de paraboloïde. Si c'étoit une portion de la circonférence d'un cercle ou d'une ellipse, ce seroit une portion de sphere, ou d'ellipsoïde comprise entre deux plans paralleles, *&c. &c.* On voit que dans tous ces cas la formule de la solidité doit contenir trois termes, & qu'on ne peut la réduire à deux qu'en regardant le premier terme comme égal à la somme des deux premiers; c'est ainsi que M. *Chapman* l'a fait, en supposant $4c^2=5a^2$, ce qui ne peut jamais être; mais il entend tacitement par l'expression $4c^2$, la somme f^2+4c^2, qui, pour le cylindre, est effectivement $=5a^2$. On voit que ce procédé est fort indirect, & contraire à l'esprit de la méthode.

Application de ces principes à la mesure du déplacement du Vaisseau.

On divisera la partie submergée par des plans horisontaux & verticaux, comme il est prescrit, *Art.* 106., en observant de mettre les plans horisontaux paralleles au plan de flottaison, & non paralleles à la quille, afin de se conformer davantage à l'état des choses. On observera aussi que le nombre des parties soit pair, ou que le nombre des plans soit impair. On mesurera, par la méthode précédente, la surface de chaque couple, ou de chaque section verticale.

Si, comme dans l'exemple que notre Auteur rapporte, on conçoit cinq plans horisontaux, il y aura dans la partie submergée de chaque couple cinq ordonnées, on prendra la premiere, & la derniere en entier, on multipliera la deuxieme par 4, la troisieme par 2, & la quatrieme par 4; &

CALCUL du Volume de fluide que deplace un Vaiſſeau de 42 pieds Anglais de largeur.

Largeurs & demi-largeurs des couples ſur chaque demi-plan de flottaiſon.

Couples de Poupe.	Plans de flottaiſon de Poupe. 1er. P. p	2e. P. p	3e. P. p	4e. P. p	5e. P. p
0	10. 6	10. 5	9.11	9. 0	7. 4
3	20.11	20.10	19.10	17.11	14. 8
6	20.10	20. 8	19. 8	17. 8	14. 2
9	20. 8	20. 5	19. 4	17. 1	13. 4
12	20. 5	20. 1	18.10	16. 4	12. 0
15	20. 1	19. 8	18. 2	15. 4	10. 1
18	19. 8	18.11	17. 3	13. 9	7. 5
21	19. 2	18. 1	15. 7	11. 1	5. 2
24	18. 1	16. 7	13. 4	8. 0	3. 8
27	16. 5	14. 2	9. 8	5. 5	2. 6
30	13.10	10. 2	5.10	3. 0	1. 4
33	4. 5	2. 3	1. 0	0. 5	0. 2
Somme des larg.	205. 0	192. 3	168. 5	135. 0	91.10
Diſtances entre les couples.	7. 2	7. 2	7. 2	7. 2	7. 2
Produits	1435 34 0	1344 32 2	1176 28 3	945 22 0	637 15 6
Aire des Triang. extrêmes	18	9	4	2	1
½ Aire des plans de flott. de poupe.	1487	1387	1211	969	659

Couples de Proue.	Plans de flottaiſon de Proue. 1er. P. p	2e. P. p	3e. P. p	4e. P. p	5e. P. p
0	10. 6	10. 5	9.11	9. 0	5. 4
III	20.11	20.10	19.11	17.11	14. 7
VI	20.11	20. 8	19. 7	17. 6	13. 8
IX	20.10	20. 8	19. 2	16. 9	12. 4
XII	20. 5	20. 4	18. 6	15.10	10. 2
XV	20. 4	19. 8	17. 7	14. 5	7. 7
XVIII	19. 3	18. 1	15. 9	11. 6	4.10
XXI	17. 0	15. 3	11.10	7. 2	1. 1
XXIV	12. 8	9. 6	2.10	1. 0	
XXVII	2. 5	1. 0			
Somme des larg.	165. 7	156. 5	135. 1	111. 1	71. 7
Diſtances entre les couples.	7. 2	7. 2	7. 2	7. 2	7. 2
Produits	1155 28 4	1092 26 3	945 23 0	777 19 0	497 12 4
Aire des Triang. extrêmes	6	2	16	2	2
½ Aire des plans de flot. de proue.	1193	1123	984	798	515

	1er.	2e.	3e.	4e.	5e.
Demi-aire des plans de flottaiſon de poupe.	1487	1387	1211	969	659
Demi-aire des Plans de flottaiſon de l'avant à l'arriere.	2680	2510	2195	1767	1174
Eſpace occupé par le maître couple ſur chaque plan de flottaiſon	24	24	23	21	17
Véritables demi-Aires.	2656	2486	2172	1746	1157
Multipliez par	2	2	2	2	2
Aires totales des plans de flottaiſon	5312	4972	4344	3492	2314

Demi-Aire du premier Plan de flottaiſon.	2656
Aire du deuxieme.	4972
Aire du troiſieme.	4344
Aire du quatrieme.	3492
Aire du cinquieme.	2314
Aire de la Quille.	100
Somme.	17878
Diſtance entre les plans de flottaiſon	3½
Produits.	53634 8939
Volume ſubmergé de la Coque	62573

Volume ſubmergé de la Coque.	62573
——— des Bordages.	2800
——— de la Quille.	400
——— de l'Etrave.	72
——— de l'Etambot.	63
——— du Taille-mer.	72
——— du Gouvernail.	84
Volume total du Vaiſſeau	66064

(109.) Ayant ainsi trouvé le nombre des pieds cubiques que la partie submergée du Vaisseau doit déplacer, on le multipliera par $1019\frac{2}{5}$, qui sont le nombre d'onces *Castillanes* que pese chaque pied cubique d'eau de mer (*a*); le produit exprimera le poids total que doit avoir le Vaisseau tout armé, approvisionné & équipé, pour qu'il s'enfonce dans le fluide jusqu'à la ligne d'eau *ABC* *.

---

l'on multipliera la somme de toutes ces quantités par le tiers de la distance d'un plan horisontal à l'autre; après quoi, il n'y aura plus qu'à ajouter à ce produit l'aire de l'espace triangulaire compris entre le dernier plan de flottaison & la quille.

Ayant trouvé la surface de chaque couple, on prendra celle des couples extrêmes en entier; on multipliera le deuxieme par 4; le troisieme par 2; le quatrieme par 4; le cinquieme par 2, *&c.*, jusqu'à l'avant-dernier, inclusivement; on prendra la somme de tous ces produits, & des deux couples extrêmes qu'on multipliera par le tiers de la distance d'un couple à l'autre, le produit sera le volume de la partie comprise entre les couples extrêmes; ainsi il ne s'agira plus que d'y ajouter le volume des parties comprises entre le couple le plus en avant & l'étrave, & entre le couple le plus en arriere & l'étambot, la somme sera le volume total déplacé, non compris le bordage, l'étrave, l'étambot, & la quille, qu'on y joindra, comme on le voit dans l'exemple précédent.

Comme les deux moitiés du Navire séparées par le plan vertical qui coïncide avec la quille sont égales & semblables, on ne fait le calcul que pour une des moitiés, & l'on double ensuite le résultat; ainsi on ne calcule ordinairement que l'aire de chaque demi-couple. On peut aussi calculer d'abord le volume de la partie de la proue jusqu'au maître couple, ensuite celui de la partie de la poupe depuis le maître couple jusqu'à l'étambot, & la réunion de ces deux parties donne le volume total. La raison de ce précepte, est qu'il peut souvent être utile d'avoir le volume de ces deux parties séparément. Il est bon de construire les plans avec des échelles décimales, où le pied soit divisé en cent parties; les calculs seront par-là plus faciles & plus exacts que si on les faisoit seulement en pieds & pouces comme est celui que *D. Georges Juan* donne pour exemple.

(*a*) J'ai trouvé, par mes propres expériences faite au *Callào*, que le poids d'un pied cubique d'eau de mer, mesure de France, exprimé en livres Castillanes, est de 77 livres $\frac{11}{32}$. Le pied Français est au pied Anglais, comme 16 est à 15 [1], & leurs cubes sont comme 4096 est à 3375: donc faisant la proportion $4096 : 3375 :: 77\frac{11}{32} : 63\frac{2987}{4096}$, on trouvera que le pied cubique Anglais d'eau de mer pesera 63 livres 11 onces $\frac{2736}{4096}$ Castillanes.

On trouve dans les *Leçons de Physique de Cotes*, que le poids d'un pied cubique Anglais d'eau de mer est de 1030 onces *Averdupois*, ou de 64 livres $\frac{3}{8}$.

La livre *Castillane* sera donc à la livre *Averdupois* comme 10072 est à 10000, ou, à fort peu près, comme 140 est à 139.

La livre *Averdupois* est à celle de *Paris*, suivant le même *Cotes*, comme 63 est à 68, ou, à peu près, comme 139 est à 150: donc la livre *Castillane* est à celle de *Paris*, comme 14 est à 15, à fort peu près. Au moyen de ces rapports connus, on pourra convertir en livres Françaises ou Anglaises, les mesures qu'on donnera en livres Castillanes.

Le poids d'un pieds cubique Francais d'eau de mer, exprimé en livres Françaises, sera, par conséquent, de 72 livres 3 onces, ou de 1155 onces [2].

* Le calcul dont on vient de détailler la théorie & la pratique, nous conduit naturellement à

---

[1] Le vrai rapport a été donné, *Tome I, Article* 51. Note.

[2] Ce rapport nous paroît assez exact, quoique la plupart des Constructeurs Français supposent avec M. *Bouguer* le poids du pied cubique d'eau de mer, seulement de 71 livres. Mais il y en a qui le font de 74, & d'autres seulement de 71 livres 6 onces. C'est à peu près ce dernier rapport qu'on trouve dans l'*Architecture Navale* de M. *du Hamel*, Préface, page XXXIX.

(110.) Si le poids du Navire étoit de quelque chose plus grand, ou plus petit que celui que nous venons de trouver, & si on vou-

---

parler de la Construction des *Tables* ou des *Echelles des solidités*, ou des pesanteurs correspondantes aux différentes parties de la carene qu'on peut concevoir submergées, soit par le poids du Navire, de ses agrès, *&c.*, soit par celui de sa charge; & à parler en même temps du *Jaugeage* des Navires. Comme ces articles sont très-importants, nous allons entrer dans quelque détail à leur sujet.

Ayant déterminé le volume submergé du Vaisseau, lorsqu'il est calé jusqu'à la ligne d'eau dans laquelle il doit naviguer, & en ayant conclu son poids total, tout équipé, approvisionné & chargé, il est clair qu'on peut faire le même calcul, & en tirer des conséquences semblables, en supposant le Vaisseau calé dans tout autre ligne d'eau. Si, par exemple, on détermine le déplacement lorsque le Vaisseau est lege, c'est-à-dire, lorsqu'il a seulement ses agrès, apparaux; & qu'on le retranche du déplacement, le Vaisseau étant calé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation, le reste exprimera le volume de fluide que la charge fait déplacer, & on en conclura de la même maniere que ci-dessus, le poids de la charge que le Navire doit porter pour être calé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation.

Il est donc évident qu'on peut déterminer, par un calcul semblable, le poids des différentes parparties de la charge qui correspondent à la submersion des différentes tranches de la carene, & en former des tables qui marqueront la charge qui correspond à chaque pied de tirant d'eau, & même à chaque pouce, si on le juge nécessaire. On pourroit aussi en construire qui marqueroient ce qu'il faut ajouter à la charge pour faire caler le Navire jusqu'à sa ligne d'eau de navigation. Ceci est trop simple pour que nous nous y arrêtions davantage; passons à la construction des *Echelles des solidités*, que les Constructeurs préféreront sans doute aux Tables; ce qui servira encore de développement à ce que nous venons de dire.

On calculera, 1°. la solidité de la tranche comprise entre le premier plan de flottaison & le deuxieme; c'est-à-dire, entre *AC* & *DF*, on la multipliera par 72 livres 3 onces, (nous supposons ici que les mesures sont prises avec le pied Français) on divisera le produit par 2000, & l'on aura au quotient le nombre des tonneaux qui correspond à la premiere tranche [1]; on trouvera dans l'exemple de l'Auteur 537,4 tonneaux.

2°. On calculera de même la solidité des tranches comprises entre le premier plan de flottaison & le troisieme, c'est-à dire, entre *AC* & *GI*, & on en conclura le nombre de tonneaux correspondant à ces deux tranches. On trouvera 1045,0 tonneaux.

3°. On calculera également la solidité des tranches comprises entre le premier & le quatrieme plan de flottaison, ou entre *AC* & *JL*, & on en conclura encore le nombre de tonneaux correspondant, qu'on trouvera de 1466,6 tonneaux.

4°. Par un calcul semblable, on déterminera la solidité des tranches comprises entre le premier & le cinquieme plan, entre le premier & le sixieme, *&c.*; & enfin entre le premier & la quille, ce qui donnera le déplacement total, & on en conclura toujours le nombre de tonneaux correspondants. On trouvera, pour les deux dernieres tranches de notre exemple, 1783,4 & 1931,0; ajoutant douze tonneaux à ce dernier, à cause de la quille, on aura le déplacement total = 1943,0 tonneaux.

On remarquera que dans chaque calcul il faut, comme nous l'avons fait, tenir compte du volume du bordage & des parties de l'étambot & de l'étrave qui répondent aux différentes tranches; attendu qu'il s'agit d'avoir les volumes extérieurs; & qu'il faut aussi ajouter le volume de la quille au dernier résultat pour avoir le déplacement total.

5°. Ces opérations faites, on tirera une ligne horisontale *RS*, à l'une des extrémités de laquelle on élévera une perpendiculaire ou verticale *RT*. On construira une échelle de dixme quelconque, sur la ligne horisontale, comme on le voit sur la figure, ce sera l'*Echelle des tonneaux*; & sur la verticale on formera pareillement une échelle aussi à volonté, divisée en pieds & parties de pieds, ce sera l'*Echelle des tirants d'eau*. PLANC. VII, FIG. D.

6°. On prendra sur l'échelle des tirants d'eau, à partir du point *R*, le nombre de pieds qui correspond à la distance de chaque plan de flottaison, au plan de flottaison supérieur, qui sont 3, 53

---

[1] Lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande précision, on peut diviser le nombre des pieds cubiques par 18, le quotient exprimera à peu près les tonneaux, parce que 18 pieds cubiques d'eau de mer font à peu près le poids d'un tonneau. Si l'on avoit mesuré le tout au pied Anglais, il faudroit diviser par 34, pour réduire le résultat en tonneaux de France: c'est ce que nous avons fait pour réduire l'exemple de l'Auteur.

loit sçavoir quelle seroit sa véritable ligne d'eau avec ce même poids, il n'y auroit qu'à convertir l'excès, ou la différence d'un poids à l'autre

---

7, 0; 10, 5; 14, 0; & 19, 5 pieds, & on marquera les points correspondants *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

7°. On prendra ensuite sur l'échelle des tonneaux, à partir du point *R*, les nombres de tonneaux qu'on a trouvés répondre aux tranches comprises entre les différents plans de flottaison; c'est-à-dire, dans la supposition présente, qu'on prendra 537, 4; 1045,0; 1466,6; 1783,4; 1943,0 tonneaux, & on marquera les points correspondants *f*, *g*, *h*, *i*, *k*.

8°. Par les points *a*, *b*, *c*, &c. de l'échelle des tirants d'eau, on tracera au crayon des lignes horisontales, & par les points *f*, *g*, *h*, &c. de l'échelle des tonneaux, on tracera des verticales; & ayant marqué les intersections respectives de ces lignes, chacune avec sa correspondante, on joindra ces dernieres par une ligne courbe *Rlmnop*, & l'*Echelle des solidités* sera achevée. En voici l'usage.

Supposons que le Navire n'étant pas calé jusqu'à sa ligne d'eau de Navigation, on veuille sçavoir ce qui lui manque de tonneaux pour completter sa charge. On observera combien il faut que le Navire cale de pieds en avant & en arriere pour être entiérement chargé; je suppose qu'il doive caler de 4 pieds 8 pouces en avant, & de 5 pieds 4 pouces en arriere; on ajoutera ces deux nombres ensemble, ce qui donnera 10 pieds, dont on prendra la moitié 5 pieds, laquelle marquera, à très-peu près, la quantité dont le Navire doit caler aux environs du maître couple. On prendra ces 5 pieds sur l'échelle des tirants d'eau, & par le point *y* qui répond à ce nombre, on menera une horisontale qui rencontrera la courbe dans le point *v*, & par ce point on menera la verticale *vx*, qui indiquera sur l'échelle des tonneaux, ce qu'il faut ajouter à la charge actuelle du Navire pour qu'il soit calé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation. On trouvera dans la supposition présente qu'il faut ajouter 771,5 tonneaux.

On pourra, pour la généralité des usages, faire une double échelle des tirants d'eau, l'une dont le zéro soit en *R* au plan de flottaison supérieur, c'est celle dont nous venons de parler; & l'autre dont le zéro soit à la quille, & qui marquera, par conséquent, les tirants d'eau absolus, pris au maître couple, tandis que l'autre marque ce dont le Navire doit s'enfoncer dans le fluide pour être calé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation. On pourra pareillement faire une double échelle des tonneaux, l'une dont le zéro soit en *R*, qui marquera le nombre des tonneaux qu'il faut ajouter à la charge pour que le Navire soit calé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation: ainsi le nombre extrême de cette échelle marquera le poids absolu de la charge & du Navire, avec ses agrès & apparaux. L'autre échelle auroit son zéro au point qui répond au tirant d'eau lorsque le Navire est lege, qu'il est gréé, équipé, &c., mais sans être chargé. Les chiffres de cette deuxieme échelle iroient en croissant, en allant vers la droite, & en allant vers la gauche; ceux de la gauche, c'est-à-dire, ceux qui iroient en croissant vers le point *R*, marqueroient le poids absolu de la charge qui répond à chaque tirant d'eau, & ceux de la droite marqueroient les pésanteurs des différentes parties de la carene, des agrès, équipages, &c., & le chiffre de l'extrémité marqueroit le poids de tous ces articles réunis. On pourroit aussi se borner à la premiere échelle, & placer dessus le zéro de la seconde; parce qu'avec un compas on trouveroit toujours aisément les valeurs des parties dont on a besoin. On a pris ce parti dans la figure, quant à l'échelle des tonneaux, &c. On voit aisément qu'on pourroit encore distinguer sur ces échelles le poids particulier de la mâture, des agrès, de la voilure, de la coque; tout ceci est trop simple pour que nous y insistions davantage; nous observerons seulement qu'il seroit aussi commode qu'essentiel, que les Constructeurs donnassent aux Armateurs & Capitaines, une semblable échelle pour les Navires qu'ils construisent. Lorsque ce travail est fait avec soin, & que l'échelle est d'une grandeur suffisante, on peut à peine se tromper de 2 tonneaux pour le plus grand Navire. On pourroit aussi y joindre parallélement à l'échelle des tonneaux, celle des *Tons* Anglais, *Lastes* Suédois, &c., & à côté de l'échelle des tirants d'eau, les pieds correspondants des différentes Nations, où les Vaisseaux peuvent aller charger, ou décharger; mais, pour éviter la confusion, nous pensons qu'il seroit mieux d'avoir les rapports des différentes mesures, & des différents pieds, consignés dans des tables. On en trouvera pour les principales Puissances Maritimes de l'Europe, dans les Additions de cet Ouvrage. Nous le répétons, ces échelles seroient de la plus grande utilité & commodité, on pourroit à leur moyen trouver tout d'un coup, & presque à la seule inspection, ce qui reste encore à charger, ce qu'on peut avoir déchargé, ce qui reste à bord, de combien un certain nombre de tonneaux peut faire caler le Navire; & une foule d'autres particularités qui intéressent directement la Construction, la Marine & le Commerce. Les Cons-

en pieds cubiques de volume, ce qu'on obtiendra aisément en divisant cette différence par 1019 $\frac{1}{5}$, qui sont le nombre des onces que pese

---

tructeurs pourroient mettre sur le même plan les échelles des solidités de tous les Navires qu'ils construisent, & terminer les courbes qui conviennent à chacun, par une autre courbe. On voit l'effet que produiroit cet assemblage marqué par les courbes *RO*, *RP*, *RQ*, & *Rp*, & la ligne terminatrice est *OPQp*; ils écriroient le nom de chaque Navire à l'extrêmité inférieure de sa courbe correspondante, ou bien ils les désigneroient par un numéro qui marqueroit l'ordre de leur construction. En voilà assez sur ce point, passons au *Jaugeage*.

On peut se proposer deux questions sur la capacité des Vaisseaux, la premiere a pour objet de déterminer le poids que le Vaisseau peut *porter* pour être chargé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation, & la deuxieme de déterminer ce qu'il peut *loger* de pieds cubiques de marchandises dans sa cale, & les autres endroits propres à en recevoir. La solution de ces deux questions intéresse, au plus haut dégré, la Marine & le Commerce; mais la premiere est d'une utilité beaucoup plus générale: car la connoissance de la capacité de la cale ne peut être d'une grande utilité, sans celle du port du Navire, & on ne peut gueres déterminer l'une des deux quantités par l'autre; attendu que très-souvent le Navire est tout-à-fait chargé sans que sa cale soit remplie, & aussi très-souvent tous les espaces de la cale sont remplis sans que le Navire ait une charge suffisante.

C'est aussi la solution de la premiere question qui constitue proprement le *Jaugeage*. Car on entend assez généralement par ce mot, la maniere de faire les opérations nécessaires pour trouver la charge que le Navire peut porter pour pouvoir naviguer sans danger: ainsi en France ces opérations ont pour but de faire connoître le nombre de tonneaux de 2000 livres chacun que le Navire peut porter. D'après ce qui a été dit au commencement de cette note, on voit qu'il ne s'agit que de mesurer en pieds cubiques le volume de la partie de la carene que la charge fait plonger dans la mer, de la multiplier par 72 livres 3 onces, & de diviser le produit par 2000, le quotient exprimera le nombre des tonneaux qui composent la charge. Lorsqu'on a le plan du Vaisseau, cette opération n'a aucune difficulté; mais lorsqu'on est privé de ce secours, on est obligé de prendre les mesures sur le Vaisseau même, ce qui est plus long & moins exact; souvent même ce travail présente des difficultés insurmontables lorsque le Navire est chargé. On voit donc, de plus en plus, la nécessité d'avoir le plan des Vaisseaux (18 *Note*.); & les échelles de solidités, faites par le Constructeur, exempteroient de tout travail à cet égard.

Le volume de la partie de la carene que la charge fait plonger dans la mer, peut se déterminer, soit en cherchant, comme nous l'avons dit, le déplacement du Navire lorsqu'il est lege, & son déplacement lorsqu'il est chargé, & en prenant la différence de ces deux quantités: ou bien, on peut chercher seulement le volume de cette partie, en la divisant en tranches, comme il a été dit (106.). Cependant, pour la pratique, il suffira de mesurer la surface du plan de flottaison, le Navire étant lege, celle du plan de flottaison, le Navire étant chargé, & de multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces par la quantité dont le Navire doit caler au maître couple, par l'effet de sa charge. Pour trouver cette derniere quantité lorsqu'on n'a pas le plan du Navire, on releve les tirants d'eau de l'avant & de l'arriere, le Navire étant lege; on fait la même chose, le Navire étant chargé; d'où l'on conclud la quantité dont chaque extrêmité du Navire doit caler par l'effet de sa charge. Ensuite, on ajoute ensemble ces deux quantités, & la moitié de leur somme marque l'enfoncement que produit la charge dans les environs du maître couple. Dans la vue d'abréger ce calcul, ou peut même se contenter de mesurer la surface du plan de flottaison qui tient le milieu entre le plan supérieur & l'inférieur, & la multiplier par l'enfoncement que produit la charge au maitre couple: car la surface de ce plan intermédiaire est à peu près la moitié de la somme de celles des plans supérieur & inférieur.

C'est à ces opérations que se réduit le jaugeage, lorsqu'on a pour objet de trouver la quantité pesante que le Navire peut porter: mais comme ce travail est d'un usage journalier, & qu'il est le plus souvent confié à des hommes qui n'ont pas les plus légeres connoissances des Mathématiques, on a cherché différens moyens pour simplifier le calcul, & le rendre à la portée du commun des Jaugeurs. Voici une regle qui nous paroît fort simple, & on pourra y avoir recours lorsqu'on n'aura pas besoin d'une extrême précision, ou lorsqu'on n'aura pas la commodité de faire autrement. 1°. On déterminera, comme ci-dessus, la quantité de pieds dont le Navire doit plonger par l'effet de sa charge. 2°. La longueur du Navire droit vis-à-vis la

chaque pied cubique (109, *Note.*): divifant enfuite le nombre des pieds cubiques qu'on aura ainfi trouvés par l'aire du plan de flottaifon *ABC*,

---

liffe d'hourdy. 3°. La largeur du Navire prife en dehors des bordages. 4°. On multipliera ces trois quantités l'une par l'autre. 5°. On divifera le produit par 33,8, fi le Navire eft plein dans fes extrêmités; fi, au contraire, il eft fort taillé, comme le feroit une Frégate, on divifera le produit par 35,3; & fi le Navire eft tellement plein qu'il conferve fa plus grande largeur prefque dans toute fa longueur, on divifera le produit par 32,2; le quotient de cette divifion exprimera, dans tous les cas, le nombre de tonneaux que le Navire peut porter. On voit aifément que l'efprit de cette regle, qui eft analogue à celle qu'on trouve dans l'Ouvrage de M. *Chapman*, confifte à chercher d'abord le volume d'un parallélipipede rectangle qui a la même largeur que le Navire, dont la longueur eft auffi la même que la fienne, prife à la liffe d'hourdy, & dont la hauteur eft la quantité de pieds dont la charge fait enfoncer le Navire: & qu'enfuite il a fallu trouver, par l'expérience, le divifeur qui convient pour ces trois efpeces de Navires, afin d'avoir tout de fuite la charge en tonneaux; attendu que le volume fubmergé par l'effet de la charge eft une portion de celui de ce parallélipipede, & une portion différente, fuivant l'efpece de conftruction du Bâtiment. Comme nous indiquons les deux cas extrêmes, & un cas intermédiaire, avec un peu d'application, on acquerra aifément, & en peu de temps, le coup d'œil néceffaire pour fe déterminer dans le choix du divifeur dont on doit faire ufage. Cette regle, employée avec intelligence, ne peut gueres donner une erreur de plus de fix tonneaux, pour un Bâtiment de 400, ce qui eft bien fuffifant pour les befoins ordinaires de la pratique.

Nous croyons donc qu'on peut s'en tenir à cette regle, qui eft préférable à la plus part de celles que fuivent les Conftructeurs & les Jaugeurs. Chaque Port, & même chaque Jaugeur a fa méthode particuliere, & on remarque même que ces regles ont fouffert plufieurs altérations dans différents temps, fuivant l'idée qu'on a attachée au mot *Jaugeage*: il y a même de ces regles qui font tout-à-fait abfurdes. La généralité de toutes ces méthodes paroît avoir pour objet de calculer la capacité de la cale des Navires en pieds cubiques; & enfuite on a cherché un divifeur convenable pour en conclure le nombre de tonneaux qu'ils pouvoient porter; parce qu'on a toujours cru voir un rapport entre la capacité de la cale du Navire, & le poids qu'il peut porter. Mais ce divifeur ne peut être conftant pour tous les Navires, celui qu'il faut employer pour trouver le port d'une Galiotte Hollandaife, dont on connoît la capacité de la cale en pieds cubiques, ne convient nullement pour une Frégate Françaife, ou Anglaife: celui qui convient pour un Vaiffeau de ligne, ne convient pas pour un Lougre, & même le divifeur qui conviendroit à un Bâtiment deftiné pour la traite des Noirs, ne conviendroit pas à un Bâtiment deftiné pour le commerce des Colonies de l'Amérique, *&c.* C'eft fans doute cette différence qui a donné lieu à la variété des méthodes, qui toutes peuvent convenir paffablement bien pour les efpeces de Navires auxquels elles ont été originairement appropriées; mais qui font abfolument défectueufes entre les mains du commun des Jaugeurs qui les applique indifféremment à tous les Navires

En évaluant ainfi la capacité de la cale des Navires en pieds cubiques, il eft évident qu'on a envifagé le jaugeage fous le deuxieme point de vue dont nous avons parlé; c'eft-à-dire, qu'on a cherché à déterminer ce que le Navire pouvoit *loger* dans fa cale: c'eft ce qui a donné lieu à la diftinction des *tonneaux de Poids* & des *tonneaux d'Arrimage*. Suivant l'Ordonnance de la Marine, de 1681, le tonneau d'arrimage eft fixé à 42 pieds cubiques; ainfi lorfqu'on a évalué la capacité de la cale en pieds cubiques, il faut la divifer par 42 pour avoir au quotient le nombre des tonneaux d'arrimage qui y correfpond. Faifons quelques réflexions à ce fujet.

Il eft évident que deux Navires conftruits fur le même plan, chargés comme il convient pour leur sûreté, & pour faire valoir leurs qualités, doivent naviguer avec la même ligne d'eau; & fi les matériaux qui entrent dans la conftruction de ces deux Navires font les mêmes, & fi leur mâture & leurs agrès font du même poids, il s'enfuit qu'ils feront d'un même port. Ces deux Navires, quoiqu'ayant leurs carenes fur le même plan, peuvent cependant avoir leur cale d'une capacité fort différente, fuivant la fituation qu'on donnera au premier pont, & fuivant la hauteur des entreponts. Si celui dont le premier pont eft le plus bas, ayant fa cale remplie d'une certaine efpece de marchandife, eft calé jufqu'à fa ligne d'eau de navigation, une femblable cargaifon mife dans la cale du deuxieme, le chargera également, mais il reftera beaucoup d'efpace vuide dans fa cale. Ainfi

le

le résultat de cette division exprimera la quantité dont la vraie ligne d'eau sera plus, ou moins élevée que la ligne *ABC*. Cette regle est

---

en suivant la regle que prescrit la valeur du tonneau de l'ordonnance, on trouveroit le deuxieme Navire d'un plus grand port que le premier: & si cette regle donnoit exactement le port du premier, il faudroit, pour qu'elle donnât le port du deuxieme, qui est le même, supposer le diviseur plus grand, c'est-à-dire, donner une plus grande valeur au tonneau d'arrimage.

Si, conservant le même creux à ces deux Navires l'un est construit d'une maniere beaucoup plus solide que l'autre, s'il entre plus de fer dans sa construction, si les couples sont plus rapprochés, si les bois sont d'une plus grande pésanteur spécifique, s'il a des agrès, & une mâture plus pesante, *&c.*; ce sera autant de diminué pour la charge qu'il pourra porter; cependant, en suivant la même regle, on trouvera son port égal à celui du premier, tandis qu'il est évidemment plus petit; & si cette regle convient pour le deuxieme Navire, il faudroit, pour qu'elle convînt également au premier, supposer le diviseur plus petit, ou faire le tonneau d'arrimage de moins de quarante-deux pieds cubiques.

On voit donc que la capacité de la cale des Navires n'a pas un rapport constant avec leur port; & qu'en voulant établir une relation entre ces deux quantités, on ne peut donner une valeur constante au tonneau d'arrimage. Ainsi, on doit prendre le tonneau d'ordonnance comme une mesure simplement étendue que le Législateur a prise pour servir à la perception de ses droits, & non comme l'expression d'une mesure pesante propre à exprimer le port des Navires d'une maniere fixe. En faisant le jaugeage suivant l'ordonnance, on trouve seulement ce que le Navire peut loger de marchandises d'une pesanteur spécifique telle que, sa cale étant entiérement remplie, il soit chargé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation. Mais on voit évidemment que cette espece de marchandise est absolument idéale, qu'elle doit varier suivant les différentes especes de Navires, suivant la pesanteur des bois, & la quantité de fer qui entrent dans leur construction, & suivant le poids de leur mâture, de leurs agrès, *&c.* Ainsi cette idée du jaugeage ne peut s'accorder aux besoins du Commerce, & la destination des Bâtiments qui y sont employés, parce qu'on a besoin principalement d'en connoître le port; elle ne peut tout au plus s'appliquer qu'à la perception des droits. C'est aussi sur leur capacité que les Navires payent les droits en Angleterre; encore cette maniere d'envisager les choses n'est-elle pas exempte de tout inconvénient.

Si l'on a toujours cherché à établir un rapport entre le port des Navires, & la capacité de leur cale, c'est qu'on a toujours senti que ces deux choses avoient une liaison intime, que la cale étoit destinée à être remplie, & que le Navire étoit destiné à être chargé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation: qu'il n'étoit pas juste de payer le fret d'une marchandise d'une grande pesanteur spécifique, seulement à l'espace qu'elle occuperoit, & de payer au poids le fret d'une marchandise d'un grand encombrement, & d'une petite pesanteur: que dans le cas où le Navire seroit chargé de marchandises de différentes pesanteurs, sous un même volume, ce qui arrive le plus souvent, il est toujours difficile d'établir le prix de chaque espece de fret, d'une maniere équitable, tant pour le Fretteur que pour l'Armateur.

Le seul cas où le tonneau de l'ordonnance donne, avec assez de précision, la charge du Vaisseau en tonneaux de poids, est celui où le Vaisseau avec sa mâture, son grément, son armement, ses vivres, *&c.* ne pese que le tiers du volume d'eau qu'il déplace étant chargé; c'est-à-dire, dans le cas où la charge est double du poids du Vaisseau tout équipé; & en même temps lorsque cette charge ne monte dans la cale que jusqu'au niveau de la flottaison. Car alors, en faisant abstraction du volume de la membrure & des bordages, le volume de la charge est le même que celui du déplacement; & comme le volume déplacé pese autant de tonneaux qu'il contient de fois 28 pieds cubiques, il s'ensuit que le tonneau de la charge occupera d'autant plus d'espace que la charge a moins de pésanteur. Or, la quantité de tonneaux qui compose la charge est, par la supposition, les deux tiers de celle du déplacement; donc réciproquement le volume du tonneau du déplacement sera les deux tiers de celui du tonneau de charge, ainsi le premier étant de 28 pieds cubiques, le deuxieme sera nécessairement de 42.

On a fait abstraction du volume de la membrure & des bordages, en supposant que la charge monte jusqu'au niveau de la flottaison; mais on ne doit pas craindre que ces suppositions induisent dans des erreurs de conséquence, car les espaces vuides qui sont au-dessus de l'eau sont, à peu près, égaux au volume de la charpente de la carene, c'est-à-dire, qu'en général les espaces destinés à la charge sont à peu près égaux au volume du déplacement. Il n'en est pas de même de la seconde

fondée sur ce que le Vaisseau doit se submerger plus, ou moins, & par conséquent occuper un nouveau volume de plus, ou de moins,

---

supposition, qui est que le Vaisseau tout équipé ne pese que le tiers de son déplacement en charge, les Vaisseaux pesent en général beaucoup davantage; ainsi il n'arrivera que très-rarement que le tonneau d'ordonnance donnera le port du Navire avec une précision suffisante. Voici cependant deux regles qui supposent une correspondance constante entre le tonneau de poids & celui d'arrimage; la premiere est usitée par les Constructeurs, lorsqu'ils n'ont pas la commodité de faire autrement; & la deuxieme est celle des Jaugeurs de Marseille.

PREMIERE REGLE. Prenez la longueur du Navire de tête en tête, en dehors de l'étrave & de l'étambot; la largeur au fort en dehors des préceintes; le creux de la ligne droite du maître bau sur la quille, qu'on peut presque toujours avoir à la pompe. Faites le produit de ces trois dimensions, & en retranchez les deux dernieres figures à droite: les chiffres qui restent à gauche indiqueront le nombre des tonneaux de 2000 livres, & de 42 pieds cubes, que peut porter, & arrimer le Navire.

SECONDE REGLE, ou *Regle de Marseille*. Mesurez en pans [1] la longueur du Navire, de l'étrave à l'étambot: sa plus grande largeur au maître bau, & son creux au même endroit, depuis la ligne qui a servi à déterminer la largeur jusqu'à la carlingue. Multipliez ces trois dimensions entr'elles, retranchez les deux dernieres figures de la droite du produit, & prenez la moitié de celles qui restent à gauche; cette moitié indiquera le nombre des tonneaux de poids & d'arrimage, qui constituent la capacité du Navire.

Le Lecteur est présentement à même d'apprécier le mérite de ces deux regles: quant à nous, il nous paroît qu'au lieu de chercher un rapport entre les tonneaux de poids & d'arrimage, rapport, qui, comme nous l'avons fait voir, ne peut être constant, il seroit beaucoup mieux d'exiger du Jaugeur qu'il déterminât le port du Navire en tonneaux de poids, & la capacité de sa cale en tonneaux d'arrimage. On lui feroit aussi évaluer la capacité des entreponts en tonneaux d'arrimage: & les opérations du jaugeage consisteroient à fournir ces deux résultats, qui mettroient à même de résoudre, avec exactitude & facilité, toutes les questions que les affrettements présentent sur l'arrimage & le port des Navires.

On pourroit demander sur lequel de ces deux résultats il convient de regler le prix du fret, sera-ce au poids, ou au volume des marchandises? Comme les opérations du Commerce doivent être débarrassées de calculs minutieux, & embarrassants, & comme on obtient aisément le poids des marchandises, tandis qu'il est souvent assez difficile de se procurer leur volume avec une précision suffisante; de plus, comme les Navires sont destinés à être chargés, & qu'il n'est jamais essentiel qu'ils soient absolument pleins, nous pensons avec M. *Bouguer*, qu'il convient que le tout se regle au tonneau de poids; alors pour fixer le prix du fret d'une maniere équitable, il faut faire ensorte de le proportionner au volume respectif des différents objets, afin de tenir compte de leur encombrement. Cet usage est aussi presque généralement établi dans les différents Ports: les Affrettements se font toujours au poids dans les Colonies, mais chaque espece de denrée paye un prix particulier relativement à son volume; & si la proportion exacte des volumes ne paroît pas absolument observée, c'est que les opérations de Commerce sont souvent modifiées par des circonstances qui ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureuse. En 1776, au Port-au-Prince & à Saint-Marc, le fret du Coton en balles, pesant environ 300 livres, étoit à 42 deniers de la livre, & à 36 deniers pour celui en ballottins qui ne passent pas 150 livres: celui de l'Indigo en futailles, depuis 160 jusqu'à 700 livres, étoit à 33 deniers: celui du Café en boucauds, de 1200 livres ou environ, étoit à 17 deniers, en barriques de 5 à 600 livres, il étoit à 16 deniers, en quarts de 240 à 250 livres, à 15 deniers, & en sacs d'environ 100 livres, à 14 deniers: celui du Cacao étoit à 16 deniers: enfin le fret du Sucre terré en barriques créoles, du poids de 1700 à 2000 livres, étoit à 13 deniers; à 12 deniers, en tierçons de 5 à 600 livres, & en quarts de 170 à 180 livres, il étoit à 11 deniers. Ainsi le fret du Coton, Indigo, Café, Cacao, & Sucre, sous les volumes où ils sont le plus ordinairement, étoit comme les nombres 42, 33, 17, 16, & 13. Celui du Coton sous les deux formes spécifiées, étoit comme 42 est à 36, ou comme 14 à 12. Celui du Café, dans ses trois especes de futailles & en sacs, comme 17, 16, 15, & 14: & celui du Sucre terré en barriques, tierçons

---

[1] On suppose ici le pan seulement de neuf pouces, ou trois quarts de pied, quoiqu'il soit effectivement de neuf pouces trois lignes, trois huitiemes.

lequel soit égal à celui du fluide, dont le poids est la différence entre le poids du Navire & celui du volume calculé : mais ce volume est celui

& quarts, comme 13, 12 & 11. Quant aux autres denrées, comme elles ne sont jamais assez abondantes pour former l'objet principal de la cargaison, leur fret est assez communement constant, quoiqu'elles soient présentées sous des volumes différents, comme on a vu pour l'Indigo & le Cacao [1].

On remarquera, sans doute, que cette diminution du prix du fret pour une même marchandise, à proportion que la futaille qui la renferme diminue de grandeur, contredit la proportion des volumes que nous avons établie, & qui doit être suivie ; car il est évident que huit quarts de Sucre de 250 livres, produisent beaucoup plus d'encombrement qu'une barrique de 2000 livres, & cependant ces huit quarts payent moins de fret que la barrique, dans la raison de 13 à 11. Voici la raison de cette contradiction. Les denrées mises dans ces petites futailles sont beaucoup moins estimées dans le Commerce que celles qui sont dans les grandes, & paient, en outre, une tare plus forte dans la raison de 19 à 13; de plus, les petites futailles sont à proportion plus coûteuses que les grandes : ainsi les Colons mettent leurs denrées le moins qu'ils peuvent sous ces petits volumes. Mais, d'un autre côté, comme ces petites pieces sont très-nécessaires pour la perfection de l'arrimage, afin de remplir les vuides que les grandes pieces laissent entr'elles, ou, comme disent les Marins, pour remplir les *Forins*, elles sont fort recherchées des Capitaines; & c'est cette concurrence qui produit une réduction dans le prix du fret : mais il n'est pas douteux que s'il s'agissoit de faire un chargement complet en petites futailles, le prix du fret ne fût plus fort que pour les grandes.

Lorsqu'on prend une cargaison de marchandises très-volumineuses, relativement à leur pesanteur, de maniere que le Navire soit tout-à-fait plein, sans être chargé jusqu'à sa ligne d'eau de navigation, il semble que le fret devroit se régler sur le volume; mais il nous paroît que, même dans ce cas, on doit se régler sur le tonneau de poids ; car il est évident que cette cargaison doit rapporter le même fret que si le Navire étoit entiérement chargé. Si le Navire est de 500 tonneaux, & qu'on ne puisse arrimer que le poids de 400 tonneaux de cette marchandise, il faut que ces 400 tonneaux produisent un fret égal à celui qu'auroient produit 500 tonneaux d'une marchandise qui auroit pu s'arrimer en entier; attendu que le Navire est entiérement occupé par cette cargaison : ainsi c'est sur le port du Navire que doit se régler l'affrettement. De plus, si les marchandises étoient tellement légeres que le Navire, quoique plein, ne fût pas suffisamment chargé pour naviguer avec sûreté, il faudroit alors embarquer du lest pour augmenter la stabilité, & dans ce cas les frais du lestage doivent entrer dans le prix du fret; c'est aussi ce qui se pratique, car les Armateurs veulent, autant que les circonstances peuvent le permettre, retirer de leurs Navires ce qu'ils en retireroient si on les chargeoit entiérement. Au reste, tout ceci souffre nécessairement quelques modifications, suivant l'abondance ou la rareté du fret relativement au nombre des Navires.

Il est, malgré cela, très-utile aux Capitaines de connoître la capacité de leur Navire en tonneaux d'arrimage ; car connoissant seulement le port du Navire, on ne sçait pas pour cela ce que le Navire peut prendre de telle ou telle marchandise ; souvent il ne pourroit pas loger dans ses capacités un volume de cette marchandise équivalent à son port, c'est ce qui nous a fait dire qu'il étoit essentiel de connoître le port & l'arrimage. Par l'arrimage on connoît le volume de marchandises que le Navire peut loger, mais le port fait connoître s'il est en état de les porter. Voici une regle assez simple & assez exacte pour trouver la capacité intérieure des Navires, elle est fondée sur les mêmes principes que celle qui a été exposée (106.) pour trouver le déplacement.

Regle pour trouver la capacité de la cale d'un Navire en tonneaux d'arrimage. Mesurez trois largeurs du Navire, par le centre du mât d'artimon, l'une sous le pont, l'autre au niveau du dessus de la carlingue, & la troisieme au milieu de la distance entre le dessus de la carlingue & le pont. Mesurez pareillement trois largeurs semblables, quelques pieds en arriere du mât de misaine, & trois autres au milieu de la distance des points où l'on a mesuré les largeurs dans les deux premieres opérations : & vous aurez ainsi trois largeurs prises dans trois sections de la cale, faites à égale distance entr'elles.

[1] Nous avons pris ces nombres sur des affrettements faits en temps de paix, parce que le Commerce se fait alors d'une maniere plus uniforme, & que les choses sont dans une espece d'équilibre. On ne doit cependant pas s'attendre à une exactitude rigoureuse, parce que ces nombres étant petits, une variation d'une unité, en plus, ou en moins, fait varier sensiblement leur rapport. En 1780 (temps de guerre), les affrettements du Coton, Indigo Café, Cacao, Sucre, suivoient la proportion des nombres 20, 20, 12, 10, & 11, (le fret du Coton étant à 120 den.) ; proportion, qui, comme on le voit, differe sensiblement de la précédente : mais dans la guerre le Commerce éprouve des especes de mouvements convulsifs, qui troublent singuliérement l'ordre de ses opérations.

dont la base est la section, ou le plan de flottaison, *ABC*, & dont la hauteur est la quantité dont le Navire doit se submerger plus oumoins, en supposant néanmoins que cette quantité soit très-petite. Donc, en divisant le volume par l'aire du plan de flottaison, le quotient sera

---

Pour avoir l'aire de chaque section, ajoutez ensemble la moitié des largeurs prises sous le pont & au-dessus de la carlingue, & la largeur intermédiaire en entier; multipliez cette somme par la moitié du creux de dessous barrot sur carlingue, le produit sera l'aire de chaque section (106.).

Ajoutez ensuite la moitié de l'aire des sections faites au mât d'artimon, & au mât de misaine, avec la section intermédiaire prise en entier, & multipliez la somme par la distance d'une section à l'autre; le produit exprimera en pieds cubiques la capacité de la partie de la cale comprise entre les sections extrêmes; il ne s'agit plus que d'y joindre les parties comprises entre ces sections extrêmes & l'étambot & l'étrave (106.).

On peut regarder, sans erreur sensible, ces derniers espaces comme des demi-paraboloïdes, ainsi leur solidité se trouvera en multipliant l'aire de chaque section extrême, par la moitié de la distance à l'étambot, ou à l'étrave (108, *Note*, *page* 60, & *Tome I*, 124 & 126.).

Retranchant de la somme de ces trois quantités, l'espace qu'occupe l'archipompe, on aura la capacité de la cale en pieds cubiques, à quoi on ajoutera les espaces de l'entrepont, où l'on peut loger des marchandises; & il ne s'agira plus que de diviser la somme de tous ces espaces par 42, le quotient sera la capacité du Navire en tonneaux d'arrimage.

Il faut ensuite connoître la quantité de pieds cubiques qu'occupe un tonneau de poids de la marchandise qui doit faire la cargaison, & diviser la capacité du Navire, exprimée en pieds cubiques, par ce nombre, le quotient exprimera le nombre de tonneaux de poids qui correspond à la totalité de l'arrimage. Ainsi, connoissant le port du Navire, on verra, tout d'un coup, s'il peut porter une cargaison complette de cette marchandise, si le Navire en sera suffisamment chargé, ou s'il faudra embarquer du lest.

Dans le cas où il sera nécessaire d'embarquer du lest, on en soustraira le volume de celui qu'on vient de trouver pour la capacité du Navire; faisant ensuite la division, comme on vient de le prescrire, on ajoutera le poids du lest au quotient, la somme sera la charge produite par la cargaison & par le lest.

Pareillement, si l'on connoît le port du Navire en tonneaux de poids, on pourra trouver le volume de telle ou telle marchandise qui répond à ce poids, en multipliant le port par la quantité de pieds cubiques qu'occupe un tonneau de cette marchandise: & divisant le produit par 42, on aura le nombre des tonneaux d'arrimage qui y répond. Ainsi, en connoissant d'avance la capacité du Navire, on verra si le Navire peut loger autant de cette marchandise qu'il en peut porter.

Par les principes que nous avons donnés dans cette Note, on peut aussi trouver jusqu'à quelle ligne d'eau le Navire doit enfoncer, sa cale étant remplie d'une espece de marchandise, dont la pésanteur spécifique n'est pas suffisante pour charger le Navire: par-là on verra s'il faut absolument embarquer du lest, & la quantité qu'il convient d'en prendre. On peut aussi, comme nous l'avons dit, faire usage des échelles de solidités.

Pour rendre ces calculs plus faciles, nous donnerons, dans les Additions de cet Ouvrage, une Table des pesanteurs spécifiques des différents objets qui peuvent former une cargaison, de même que des munitions de guerre & de bouche, des differentes parties du grément, & des objets qui entrent dans la construction d'un Navire. Ces tables seront très-utiles aux Constructeurs, car à leur moyen ils évalueront aisément ce que doit peser, tout armé, équipé, & chargé, un Navire qu'ils auroient à construire d'un port déterminé; & à ce moyen, ils seront à même d'en déterminer le déplacement, & de proportionner sa carene en conséquence.

Quelquefois c'est sur la capacité de la cale qu'il faut tabler, lorsqu'on construit un Navire destiné à telle ou telle espece de commerce, lorsqu'il doit, par exemple, charger en grenier quelque espece de grains, ou autre chose; alors il faut faire ensorte de lui donner des capacités suffisantes pour loger une quantité déterminée de ces marchandises, & proportionner sa carene de maniere qu'il en soit suffisamment chargé. Pour faciliter ces opérations, on trouvera aussi, dans les Additions, combien il faut de chaque espece de marchandise pour faire un tonneau, suivant ce qui a été reglé pour les affrettements du Roi.

la hauteur. Dans l'exemple qui précede, on vient de voir que le volume dont le Navire sera submergé dans le fluide, en supposant qu'il enfonce jusqu'à la ligne d'eau *ABC*, est de 66064 pieds cubiques: multipliant cette quantité par 1019 onces $\frac{4}{5}$, le produit 67263259 onces exprimera le poids de ce volume. Supposons maintenant que le Vaisseau dût peser 70000000 onces, la différence sera 2736741, laquelle étant divisée par 1019 $\frac{4}{5}$, donnera 2684 pieds cubiques pour le volume correspondant à cette différence. Divisant ce nombre de pieds cubiques par 5312, qui est la valeur en pieds quarrés de la surface du plan de flottaison *ABC* (108.), on trouve pour quotient un peu plus de 6 pouces; c'est la hauteur dont la vraie ligne d'eau sera plus élevée que la ligne d'eau *ABC*.

(111.) S'il est essentiel de ne pas changer cette ligne d'eau *ABC*, soit parce qu'en la changeant, la batterie deviendroit extraordinairement trop basse, ou trop haute, il sera nécessaire alors de faire des changements au Navire, en donnant plus ou moins de volume à sa carene, jusqu'à ce qu'il en résulte un volume qui convienne avec le poids que le Navire doit avoir. On peut faire ces altérations de différentes manieres, soit en donnant plus ou moins de capacité aux couples, soit en augmentant, ou en diminuant, quelqu'unes des dimensions du Navire, ou en les changeant toutes ensemble. Mais en supposant qu'on ait donné aux couples la figure la plus parfaite, & qu'on ne veuille pas l'abandonner; on fera ensorte d'augmenter, ou de diminuer le Vaisseau proportionnellement dans toutes ses parties; c'est ce qu'on peut toujours faire avec beaucoup de précision: car si l'on exprime par v le volume trouvé par le calcul, par V celui qu'on voudroit donner au Vaisseau, par m la largeur correspondante au volume v, & par x celle qui correspond au volume V; on aura cette proportion, à cause de la similitude qu'il doit y avoir entre les Vaisseaux, $v : V :: m^3 : x^3$ *, ce qui donne $x = \frac{mV^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{3}}}$: de sorte que le produit de la racine cubique du volume qu'on veut donner au Vaisseau, multipliée par la largeur de celui dont on a déterminé le volume par le calcul, étant divisé par la racine cubique du volume trouvé par le même calcul, le quotient exprimera la largeur qu'il faut donner au nouveau Navire, pour que sa carene ait le volume V, qu'on desiroit qu'elle eût. Dans le même exemple précédent, si on vouloit que le Vaisseau déplaçât un volume de fluide de 72000 pieds cubiques, au lieu des 66064

* *Voyez* le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Deuxieme Partie, *Article* 265.

pieds cubiques trouvés par le calcul, on auroit $\frac{42.(72000)^{\frac{1}{3}}}{(66064)^{\frac{1}{3}}} = 43$ pieds $\frac{1}{4}$ pour la valeur de la largeur qui correſpond à ce nouveau volume. On ſuppoſe dans tout ce calcul, que toutes les parties du Navire augmentent proportionnellement; mais quoiqu'il n'en fût pas ainſi, à toute rigueur, l'altération ne devant pas être très-grande, l'erreur ſeroit toujours négligeable; car quand le calcul différeroit de la vérité de 1000 pieds cubiques, comme il faut diviſer ces 1000 pieds cubiques par 5312, qui eſt la ſurface du plan de flottaiſon il n'en réſulteroit qu'une erreur de $\frac{1000}{5312}$ de pieds, ou d'environ deux pouces, dans la hauteur de la ligne d'eau; quantité qui eſt aſſurément négligeable.

(112.) Le calcul matériel du poids d'un Vaiſſeau de guerre, déterminé par la réunion du poids de toutes ſes parties, eſt long, comme nous l'avons dit ci-devant, & l'on eſt d'ailleurs fort expoſé à commettre des erreurs. Il eſt beaucoup plus facile pour les Conſtructeurs, d'examiner, au moyen des plans qu'ils peuvent avoir de quelques Vaiſſeaux anciennement conſtruits, le volume que ces Vaiſſeaux ont deplacé: car ce volume devant être le même pour tous ceux du même rang, il ſervira de baſe pour ceux qu'ils auroient à conſtruire par la ſuite. En examinant le volume qu'occupent dans l'eau de mer les Vaiſſeaux & Frégates du Roi, conſtruits ſuivant la méthode Anglaiſe, on a trouvé que le Vaiſſeau de 70 canons, ayant 48 pieds de largeur, déplace 96500 pieds cubiques: que celui de 60 canons, ayant 42 pieds de largeur, déplace 68650^{ppp}: que la Frégate de 26 canons de 12, ayant 33 pieds de largeur, déplace 34782^{ppp}: que la Frégate de 22 canons de 8, & de 31 pieds $\frac{1}{2}$ de largeur, déplace 25170^{ppp}: qu'un Paquebot de 18 canons de 6, avec 26 pieds de largeur, déplace 15740^{ppp}: & qu'un autre Paquebot de 16 canons de 4, avec 25 pieds de largeur, déplace 11770^{ppp}. Si l'on multiplie ces volumes ainſi exprimés en pieds cubiques par $1019\frac{1}{3}$, qui eſt le nombre des onces Caſtillanes que peſe un pieds cube d'eau de mer, & ſi l'on diviſe le produit par 1600, nombre des onces contenues dans un quintal, on trouvera que le Vaiſſeau de 70 canons peſe 61499 quintaux: celui de 60 canons, 43750: la Frégate de 26 canons, 22166: celle de 22 canons, 16040: le Paquebot de 18 canons, 10031: & celui de 16 canons, 7511.

(113.) Si tous ces Navires étoient ſemblables, de façon que leurs dimenſions fuſſent proportionnelles, leurs volumes & leurs poids ſeroient comme les cubes de leur largeur. Dans cette ſuppoſition, en prenant pour baſe le Vaiſſeau de 60 canons, on trouvera 65306

quintaux pour le poids qui correſpond au Vaiſſeau de 70 canons; quantité qui excede celle qu'on a trouvée par l'expérience de 3807 quintaux. On conclud de cet exemple, qu'à meſure que les Vaiſſeaux ſont plus grands, leurs volumes & leurs poids ſuivent une raiſon moindre que celle des cubes de leurs largeurs. Ceci dépend non ſeulement de ce que, contre toute raiſon, quelques Conſtructeurs ſont dans l'uſage de donner aux bois & ferrures des grands Vaiſſeaux de moindres dimenſions, c'eſt-à-dire, un moindre échantillon que celui qu'ils devroient avoir à proportion de leur grandeur; mais encore de ce que les grands Vaiſſeaux n'ont pas beſoin d'avoir des entreponts & des chambres d'une élévation proportionnée à leur grandeur; d'où il réſulte par conſéquent que le corps entier du Vaiſſeau n'eſt point élevé en proportion de ſa grandeur. Le Vaiſſeau de 60 canons a 6 pieds 10 pouces $\frac{1}{4}$ de hauteur d'entrepont; en ſuivant la proportion qui réſulte de la ſimilitude parfaite, il correſpondroit une hauteur de 7 pieds 10 pouces pour l'entrepont du Vaiſſeau de 70, lequel n'a cependant que 7 pieds 1 pouce. Les quatriemes alonges des couples du Vaiſſeau de 60 canons ont 12 pouces $\frac{1}{2}$ de largeur : en ſuivant la proportion, il viendroit 14 pouces $\frac{2}{7}$ pour le vaiſſeau de 70; & dans ce Vaiſſeau elles ont ſeulement 13 pouces $\frac{1}{2}$. Il eſt vrai que les Conſtructeurs compenſent ce défaut, quoique non abſolument, en mettant à proportion une moindre diſtance entre les couples des grands vaiſſeaux; mais cela ne peut apporter de compenſation qu'au défaut d'échantillon des alonges. Les autres pieces demeurent toujours ſans aucune compenſation. Les baux du premier pont, dans le vaiſſeau de 60 canons, ont 15 pouces $\frac{3}{4}$ de largeur; ce qui correſpond à 18 pouces pour celui de 70 canons : cependant les baux du premier pont de ce Vaiſſeau n'ont ſeulement que 17 pouces $\frac{1}{2}$. Ajoutons à cela que l'on borde ordinairement ces deux Vaiſſeaux avec des bordages de même épaiſſeur. Cette pratique s'eſt introduite ſans réflexion, & ſans aucune raiſon; car ſi nous nous rappellons ce que nous avons dit des Leviers, (*Tome I, Art.* 212, 213, 214, 215, *& leurs Notes*), la réſiſtance des pieces de bois eſt comme les cubes de leurs diametres; & puiſque les poids ſont dans la raiſon des cubes des largeurs des Navires; les moments dont ils ont à éprouver l'action, ſont comme les quatriemes puiſſances deſdites largeurs, ou les moments d'inertie ſeront comme les cinquiemes puiſſances*. Il eſt évident, par cette raiſon, qu'en ſuppoſant les di-

* Pour voir diſtinctement la légitimité de l'application des *Articles* du premier Volume auquel l'Auteur renvoie; on remarquera 1°. que, par l'*Article* 214, la force dont les bois peuvent ſupporter

mensions proportionnelles, le grand Vaisseau est moins capable de résistance que le petit, & par conséquent il faudroit donner de plus grandes épaisseurs aux pieces de bois dont le grand est composé, c'est-à-dire, leur donner un plus fort échantillon, ce qui est tout le contraire de ce que pratiquent les Constructeurs. Si l'on représente par g l'épaisseur des couples, par a leur largeur, par n leur nombre, & par m la largeur du Vaisseau; pour que tous les Vaisseaux fussent capables d'une égale résistance, l'expression $\frac{ng^2a}{m^5}$ devroit être généralement constante pour tous les cas. Ainsi l'on voit que, quand on feroit les épaisseurs g, les largeurs a, & le nombres des couples n, dans le rapport des dimensions linéaires, ou des largeurs m des Navires, l'expression se réduiroit toujours à $\frac{1}{m}$: ce qui fait voir que, même dans ce cas, les Frégates demeureroient encore plus fortes que les Vaisseaux, & malgré cela, elles seroient beaucoup moins chargées de bois, en raison inverse des mêmes largeurs. Ajoutons à cela que, pour l'ordinaire, les Constructeurs ne font n que comme $m^{\frac{2}{3}}$, ce qui réduit l'expression ci-dessus à $\frac{1}{m^{\frac{4}{3}}}$. L'expérience confirme journellement cette théorie : il n'est que trop ordinaire de voir les grands Vaisseaux arqués, rompus, désunis, tandis que les Frégates se maintiennent fermes, sans aucune désunion, & sans le moindre arc. Les

---

l'action, est en raison directe de la somme des moments de leurs fibres, par rapport à l'axe autour duquel la rotation tend à se faire, & en raison inverse de la distance de la puissance agissante au même axe. Supposant donc la puissance appliquée à la même distance de l'axe dans deux leviers différents, il s'ensuivra que la force dont ces leviers pourront supporter l'action sera seulement dans la raison de la somme des moments qui résultent de l'intensité des fibres. Or (*Tome I*, *Article* 208.) la somme de ces moments est exprimée par $KA^2 + ka^2$, & on a fait voir (*Tome I*, *Article* 212. *Note.*) que, dans le cas où l'on supposeroit les leviers semblables, cette quantité est proportionnelle à L^3, c'est-à-dire, au cube de leurs diametres.

2°. Le même *Article* 214 donne $\frac{p\pi}{L^2l} = \frac{P\varphi}{L'^2l'}$, ou $\frac{L^2l}{p\pi} = \frac{L'^2l'}{P\varphi}$, pour le cas où le levier est en repos; mais dans le cas où la rotation se fait effectivement autour d'un axe, les moments $p\pi$, $P\varphi$ des puissances, sont les moments d'inertie: exprimant donc ces moments par S & S', dans les deux leviers, on aura $\frac{L^2l}{S} = \frac{L'^2l'}{S'}$. On parviendroit à une expression analogue, en considérant que $\pi = \frac{Sdu}{p^2dt}$, & par conséquent $\varphi = \frac{S'du}{P^2dt}$ (*Tome I*, *Article* 205.): ce qui fait voir que sous une même vîtesse angulaire les puissances sont entr'elles comme les moments d'inertie, *&c. &c.*

Ceci posé, si on considére le Navire comme un levier, ainsi que le fait l'Auteur, il est clair que les puissances π & φ étant les poids, elles sont proportionnelles aux cubes des largeurs des Navires, & que les distances p & P sont proportionnelles aux mêmes largeurs; ainsi les moments $p\pi$, $p\varphi$ sont comme les quatriemes puissances desdites largeurs. On voit encore que les moments d'inertie étant le produit des poids par le quarré de leurs distances à l'axe de rotation, ces moments sont proportionnels aux cinquiemes puissances des largeurs des Navires, *&c. &c* (*Voyez* aussi l'*Article* 439 de ce Volume, qui contient une démonstration particuliere de cette vérité.)

bois

bois qui composent les Vaisseaux de guerre sont donc trop foibles, tandis que ceux qui composent les Frégates peuvent être extraordinairement forts. Si les Bâtiments d'une grandeur moyenne, comme, par exemple, ceux de 40 pieds de largeur, ont été reconnus avoir une force suffisante, il n'étoit pas nécessaire, & il est même contre la raison, que les Bâtiments d'une moindre grandeur aient à proportion plus d'épaisseur de bois; ces derniers peuvent même en avoir moins, sans qu'il y ait de risque qu'ils soient moins forts à proportion. Au contraire, dans les grands Vaisseaux, comme les Vaisseaux de guerre, il est nécessaire que les bois soient d'un plus fort échantillon; & malgré cela, on ne pourra jamais leur donner une force égale à celle des petits, sans courir le risque qu'ils n'occupent ensuite un volume beaucoup trop considérable dans le fluide, & qu'il n'en résulte de très-grands défauts. On voit, en conséquence de tout ceci, qu'il convient de faire quelque augmentation à l'échantillon des grands Vaisseaux; mais cela doit se faire avec beaucoup de précautions & de réserve : car un demi-pouce seulement d'augmentation dans les épaisseurs sur chaque 12 pouces, ou un pouce d'augmentation sur 24 pouces, augmente le poids d'une piece, à très-peu-près, dans la raison de 12 à 13, les poids étant comme les quarrés des dimensions linéaires. Par conséquent, si le corps du Navire pese 37100 quintaux, ce qui est à peu près le poids d'un Vaisseau de 70 canons, comme on le verra plus bas, cette seule augmentation dans les épaisseurs, le feroit peser 3090 quintaux de plus, ce qui lui abaisseroit sa batterie de 8 pouces, & lui feroit perdre beaucoup de sa marche.

(114.) Dans les Vaisseaux Espagnols construits par *Gastañeta*, les couples étoient aussi unis qu'ils le sont dans ceux de construction Anglaise; mais les unions, ou empâtures des pieces les uns avec les autres étoient plus petites, ce qui diminuoit la longueur de chaque piece d'un pied & demi, ou de deux pieds, & cette diminution des longueurs diminuoit le poids du Navire d'environ 1000 quintaux: ces Vaisseaux étoient donc toujours légers; mais ce travail est fondé sur de faux principes, comme le sçavent les Constructeurs habiles.

(115.) Les Constructeurs Français mettent une plus grande distance entre les couples; ils n'emploient pas non plus tant de pieces courbes *, de sorte qu'un Vaisseau de 70 canons, avec 46 pieds

* L'Auteur entend parler des courbes qui servent à assujettir les baux contre les membres, les courbes d'arcasses, la courbe d'étambot, &c., les guirlandes, &c., qu'on met en moindre quantité, ou d'un moindre échantillon.

Anglais de largeur, déplace seulement 90260 pieds cubiques, qui équivalent à 57522 quintaux de poids. Ce Vaisseau ayant la même longueur & le même creux que celui dont nous avons parlé, qui est construit à l'Anglaise; il s'ensuit que les poids du corps de ces Navires doivent être entre eux comme leur largeur; c'est-à-dire, comme 48 est à 46. Or, si le corps du premier de ces Vaisseaux pesoit 37100 quintaux, le poids du second ne devroit être moindre que de 1546 quintaux, au lieu de 3977 qu'on a trouvés en prenant le poids total de toutes ses parties. Donc la différence 2431 quintaux provient de la moindre quantité de bois & ferrures employés dans la construction du Vaisseau Français; & ajoutons à cela encore quelque chose de plus pour la plus grande quantité de lest dont ces Vaisseaux ont besoin. La distance entre les couples de ce Navire étoit plus grande de 4 pouces, ce qui fait qu'il y avoit en tout huit couples de moins, dont le poids est à peu près de 1030 quintaux. Si l'on soustrait cette quantité des 2431 quintaux ci-dessus, il ne reste déjà plus que 1401, qui proviendroient des courbes & autres pieces qu'on emploie de moins dans la construction Française.

(116.) Il résulte de tout cela, que quoiqu'on ait le poids des Vaisseaux par l'expérience, ou par le calcul du volume d'eau qu'ils déplacent, il n'en faudra pas conclure que tous ceux d'un même rang auront le même poids : car il est nécessaire d'avoir égard à la nature de leur construction, au poids & à la qualité des matériaux qui y entrent. Mais toutes les fois qu'on aura soin de faire les corrections correspondantes aux différences qu'il y auroit entre eux, on pourra parvenir à connoître, avec une approximation suffisante, le poids & le volume du Navire qu'on voudroit construire.

(117.) Si, dans les Vaisseaux de construction Anglaise, il n'y avoit pas d'autres différences que celles qui naissent des différentes hauteurs des entreponts, & celle que nous avons remarquée, qui provient des épaisseurs des bois, & qui est légere; & si, dans tout le reste, ils étoient réglés suivant la proportion de leur largeur, les volumes qu'ils occuperoient dans le fluide seroient pour le Vaisseau de 80 canons, avec 51 pieds de largeur, 111500 pieds cub.

de 70	48	96500
de 64	45	81400
de 60	42	68650
de 54	40	60900

(118.) On a coutume de faire un Vaisseau de 100 canons de celui de 80, en lui donnant un second entrepont: cette addition augmente le poids du Vaisseau d'à-peu-près 4200 quintaux, auxquels ajoutant

6475 quintaux de plus pour l'augmentation de l'artillerie, des munitions, des équipages, & des vivres; & de plus, 3000 quintaux pour l'augmentation du lest, on aura 10675 quintaux, dont le Vaisseau de 100 canons pesera plus que celui de 80: or cet excédent équivaut à 16793 pieds cubiques de volume; donc le volume de fluide que déplacera le Vaisseau à trois Ponts, sera de 128293 pieds cubiques. Ce Vaisseau construit sur le gabari du Vaisseau de 80, aura sa batterie de 30 pouces plus basse que celle de celui-ci: de sorte qu'il ne lui restera que 4 pieds ½ de batterie; ce qui démontre la nécessité d'augmenter la capacité des gabaris des Vaisseaux à trois ponts; & fait voir, par conséquent, que jamais un tel Vaisseau n'aura d'aussi bonnes qualités que celui de 80 canons.

(119.) Il ne restera non plus, au Vaisseau de 54 canons, que 4 pieds ½ de hauteur de batterie, & pour lui donner plus d'élévation il seroit nécessaire de l'alléger en diminuant la quantité & les dimensions des bois qui entrent dans sa construction.

(120.) On peut trouver, par les mêmes regles, le volume que les Frégates doivent déplacer. Prenant pour exemple la Frégate de 22 canons, on aura le cube de 48, largeur du Vaisseau de 70 canons, est au cube de 31 ⅔, largeur de la Frégate de 22, comme 96500 pieds cubiques, volume que déplace le Vaisseau, est à 27708 pieds cubiques, volume que devroit déplacer la Frégate, si elle étoit en tout semblable au Vaisseau. La Frégate avoit un entrepont, mais comme elle ne devoit pas y porter d'artillerie, il étoit fort bas, & toute la hauteur de la Frégate, depuis la quille jusqu'au plat-bord, étoit proportionnée à celle du Vaisseau; de sorte qu'à cet égard il n'y a point de correction à faire. Il manquoit à la Frégate le faux pont & la dunette, & comme ses couples étoient distants les uns des autres de 26 pouces, au lieu de 20, comme ils auroient du l'être, suivant la proportion du Vaisseau, il lui manquoit 16 couples: en outre, le poids de son artillerie, qui, en suivant la proportion avec celle du Vaisseau, devoit être de 1000 quintaux, étoit seulement de 550. Le poids du faux pont auroit été de 1140 quintaux, celui de la dunette, avec l'augmentation d'œuvre morte qui en résulte des deux côtés, de 170; celui des 16 couples, de 740; enfin celui de l'artillerie, des boulets, affuts, & autres ustensiles, étoit de 880. Le total est donc 2930 quintaux qui correspondent à 4597 pieds cubiques de volume. Soustrayant ce nombre des 27708 pieds cubiques trouvés ci-dessus, il restera 23111, c'est-à-dire, 2059 pieds cubiques de moins que ce qu'on a trouvé par l'expérience; différence qui provient de la trop grande épaisseur qu'on a donnée aux bois employés dans la construction de cette Frégate.

(121.) Le cube de 31 $\frac{2}{5}$, largeur de la Frégate de 22 canons, eſt au cube de 25, largeur du Paquebot de 16 canons, comme 25170 pieds de volume que déplaçoit la Frégate, eſt à 12385, volume que devroit déplacer le Paquebot. Retranchant 300 de ce nombre pour 6 couples que le Paquebot avoit de moins, à cauſe qu'ils étoient à une plus grande diſtance que ne le requéroit la proportion des corps de ces deux Bâtiments, il reſtera 12085 pieds cubiques, nombre qui n'eſt que de 15 pieds plus fort que celui qu'a donné l'expérience; d'où l'on conclud que ce Pequebot étoit à proportion moins chargé de bois que la Frégate.

(122.) Malgré ces attentions ſcrupuleuſes pour approcher le calcul de la vérité, on trouve quelquefois des différences conſidérables. Les Capitaines, ou les Contre-Maîtres, mettent le leſt ſans obſerver beaucoup de regle: celui qui eſt plus timide en embarque davantage: de ſorte que 200 quintaux de plus ou de moins dans un petit Bâtiment, ou 1500 dans un grand, leur paroît un objet qui ne mérite aucune conſidération. Cette différence eſt remarquable dans la Frégate de 26 canons de 12. Le cube de 31 $\frac{2}{5}$, largeur de la Frégate de 22, eſt au cube de 33, largeur de celle de 26, comme 25170 pieds cubiques, volume que déplaçoit la premiere, eſt à 28447, volume qu'auroit dû déplacer la ſeconde; mais comme cette derniere Frégate avoit 5 pieds de longueur de plus qu'elle n'auroit dû avoir, ſuivant la proportion générale, on doit augmenter ce dernier nombre de 1138 pieds cubiques, & le volume qu'elle auroit dû occuper dans le fluide, ſera de 29585 pieds cubiques. En outre, en ſuivant la proportion générale des cubes des dimenſions, ſon artillerie n'auroit dû peſer que 620 quintaux, & elle en peſoit 910, ce qui fait 290 de plus que la régularité ne l'exigeoit, leſquels avec 130, poids correſpondant aux uſtenſiles & munitions qui proviennent de cet excès, font 420 quintaux, qui correſpondent à un volume de 660 pieds cubiques. Ajoutant ce volume aux 29585 pieds cubiques trouvés ci-deſſus, le volume total que devoit déplacer la Frégate, ſera de 30245. Mais on a trouvé par l'expérience, qu'elle en déplaçoit 34782, donc elle déplaçoit 4537 pieds cubiques de plus qu'elle n'auroit dû le faire, ce qui correſpond à 2890 quintaux, d'où l'on doit conclure que la Frégate étoit trop ſurchargée de leſt. On doit cependant convenir, qu'il y avoit de très-bonnes raiſons pour admettre une partie de cet excès de leſt, parce que les 290 quintaux de plus que peſoit la ſeule artillerie, avec le poids des munitions & uſtenſiles qui en dépendent, élevoient néceſſairement le centre de gravité, & il étoit néceſſaire de l'abaiſſer par le moyen d'une augmentation de leſt, afin

de mettre ce Bâtiment en état de naviguer avec la sûreté convenable ; mais on peut toujours dire, avec vérité, que la quantité qu'on a employée pour remplir cet objet est excessive. On parviendroit au même résultat en faisant le calcul sur le Paquebot de 18 canons.

(123.) Il résulte de tout ce qui vient d'être dit, que même en calculant le poids de toutes les parties dont on compose le Vaisseau, & celui de sa charge, on ne peut être assuré de sa ligne de flottaison, ou du volume qu'il doit déplacer dans le fluide ; parce que cela dépend du lest qu'on y mettra, & celui-ci de la situation du centre de gravité : mais étant assurés d'avance de la situation de ce centre, la regle est aussi générale & aussi sûre qu'on peut le désirer. Ces erreurs ont coutume aussi de dépendre, de ce qu'on ne donne pas aux Bâtiments la grandeur correspondante. Pour que le tout fût dans la vraie proportion, l'artillerie de la Frégate de 22 canons, pesant 550 quintaux, & l'artillerie de celle de 26 en pesant 910, on devroit avoir cette proportion : 31 $\frac{1}{3}$, largeur de la premiere, est à la largeur de la seconde, comme la racine cubique de 550 est à la racine cubique de 910 ; ainsi, la largeur de la derniere auroit dû être, dans ce cas, de 37 pieds, au lieu de 33 ; & le volume qu'auroit occupé la Frégate avec cette largeur, seroit de 37540 pieds cubiques.

(124.) Toutes les parties des carenes doivent se régler sur la même proportion, pour que les volumes déplacés soient aussi dans ce rapport ; & en effet, la pratique manifeste qu'ils suivent à peu près cette proportion à quelque différence près, qui proviennent des erreurs que l'ignorance, ou l'inattention, fait commettre. Les Constructeurs pourront cependant s'éloigner de ces regles, mais ils doivent être fondés sur des motifs bien naturels, comme, par exemple, si on leur demandoit un Navire capable d'une plus grande charge, ou d'une plus grande résistance, ou bien d'une marche plus avantageuse ; dans un tel cas, on examinera avec soin les altérations qu'on voudra faire, pour qu'après avoir calculé l'augmentation ou la diminution du poids qui doit en résulter, on puisse en conséquence augmenter ou diminuer le volume dans la même proportion.

(125.) Cet examen nous donne lieu de faire une remarque importante ; c'est que même jusqu'au nombre d'hommes dont sont composés les équipages des différents Navires, ne sont pas éloignés de suivre la proportion des cubes des largeurs ; on voit, dans la Table suivante, quels doivent être les équipages pour être réglés suivant la raison des cubes, & ces nombres ne sont pas éloignés de ceux qui ont effectivement lieu dans la pratique.

Navires de	*Largeurs.*	*Equipages.*
80 canons	51 pieds.	717 hommes.
70	48	590
64	45	493
60	42	401
54	40	346
26	37	273
22	$31\frac{1}{3}$	178
18	26	95
16	25	84

On doit entendre que, pour que cette loi ait lieu, il faut que l'artillerie soit aussi réglée sur cette proportion; car en surchargeant les Vaisseaux d'artillerie, il est nécessaire d'augmenter en même temps les équipages; mais ces deux articles étant fixés suivant la regle établie, les vivres suivront nécessairement la même regle, & par conséquent la totalité du Vaisseau.

(126.) De même qu'on a calculé le volume du fluide que déplace le Vaisseau tout armé, qu'il a toute sa charge, & qu'il est calé jusqu'à la ligne d'eau dans laquelle il doit naviguer, on peut calculer de la même maniere le volume qu'il déplace lorsqu'il est vuide, qu'il n'y a que sa coque d'achevée, comme lorsqu'on vient de le lancer à la mer: & par conséquent on en peut conclure son poids. Le volume que déplaçoit en cet état le Vaisseau de 70 canons, & de 48 pieds de largeur, s'est trouvé de 58222 pieds cubiques, celui du Vaisseau de 60 canons, & de 42 pieds de largeur, s'est trouvé de 42705 pieds: celui de la Frégate de 26 canons, étoit de 16380 pieds: & celui de la Frégate de 22 canons, de 16693 pieds.

(127.) En supposant que les bois & les ferrures de ces Navires soient proportionnés d'une maniere convenable, ces volumes doivent suivre la raison des cubes des largeurs. Le cube de 48, largeur du Vaisseau de 70 canons, sera donc au cube de 42, largeur de celui de 60, comme 58222, volume que déplaçoit le premier, est à 39004, volume que devoit déplacer le second: mais ce dernier déplaçoit un volume de 42705^{ppp}, lequel excéde celui trouvé par l'analogie de 3701^{ppp}. Cette différence vient non-seulement de la plus grande hauteur des entreponts qu'avoit, à proportion, le Vaisseau de 60 canons, mais particuliérement de la plus grande épaisseur qu'on a donnée, sans nécessité, aux pieces de bois qui entrent dans sa construction. Pareillement, le cube de 48, largeur du Vaisseau de 70 canons, est au cube de $31\frac{1}{3}$, largeur de la Frégate de 22 canons, comme 58222

volume que déplaçoit le Vaisseau, est à 16693, volume que devoit déplacer la Frégate. Ce volume se réduit à 13477, si l'on en retranche 3216 pieds cubiques, qui correspondent à 2050 quintaux, qu'on a retranchés (120.), pour le poids du faux pont, de la dunette, & des couples que la Frégate avoit de moins. Mais cette Frégate a déplacé réellement 16490 pieds cubiques de volume: donc la différence 3013 est en excès, à cause de la plus grande épaisseur que le Constructeur avoit donnée, sans nécessité, aux bois qui entrent dans sa construction. On a trouvé cet excès (120.) seulement de 2059: donc la différence 954 provient de 608 quintaux de lest que la Frégate portoit de moins, à proportion de celui que portoit le Vaisseau; ainsi les 3013 pieds cubiques, lesquels équivalent à 1920 quintaux de poids, doivent être attribués en entier au trop fort échantillon des pieces dont la Frégate étoit construite.

(128.) La Frégate de 26 canons qui, contre tout bon principe, s'est trouvée peser effectivement moins à proportion que celle de 22, se trouve néanmoins en quelque chose surchargée de bois. Le cube de 48, largeur du Vaisseau de 70 canons, est au cube de 33, largeur de la Frégate de 26, comme 58222, volume que déplaçoit la coque du Vaisseau, est à 18867, volume que devoit déplacer celle de la Frégate, en la supposant semblable au Vaisseau dans toutes ses dimensions; mais comme cette Frégate avoit 5 pieds de longueur de plus que cette proportion, il faut ajouter 755 pieds à ce volume, lequel devient, par cette raison, de 19622 pieds cubes. Retranchant de ce nombre 3780 pour le faux pont, la dunette, & les couples qu'elle avoit de moins, il restera, pour le volume que cette Frégate devoit déplacer 15842; ensorte qu'elle déplaçoit encore 538 pieds cubiques de plus qu'elle n'auroit dû le faire.

(129.) Il ne paroît pas croyable qu'il pût jamais entrer dans l'esprit du même Constructeur de donner plus d'épaisseur de bois à la Frégate de 22 canons qu'à celle de 26. L'erreur vient sans doute du défaut de soin des ouvriers, & du désordre qui regne le plus souvent dans les chantiers de construction: car il m'est arrivé à différentes fois de mesurer les couples de deux Navires parfaitement égaux, & j'ai trouvé une différence d'un pouce, & même d'un pouce & demi dans les épaisseurs.

(130.) Le volume de fluide que déplace le Vaisseau de 70 canons lorsqu'il est vuide, est les $\frac{3}{5}+\frac{1}{300}$ de celui qu'il déplace étant armé, & prêt à naviguer; celui du Vaisseau de 60 canons est les $\frac{3}{5}+\frac{6\frac{1}{2}}{300}$; & celui de la Frégate de 22 canons les $\frac{3}{5}+\frac{6\frac{1}{2}}{300}$: mais l'augmentation

de ces rapports dans ces deux Bâtiments provient, comme nous l'avons déjà vu, de ce qu'ils sont surchargés de bois : & ainsi on ne peut déduire de regles sûres pour la pratique. Si, dans les Frégates, on regle les dimensions des bois sur les largeurs, & qu'on appelle p le volume que déplace une Frégate armée, & en état de naviguer, en la supposant en tout semblable au Vaisseau ; si de plus on appelle r le volume qui correspond au poids des ponts & des couples qu'elle a de moins, & a celui qui correspond au poids de l'artillerie, dont aussi elle est moins chargée à proportion ; alors $p-r-a$ sera le volume avec lequel la Frégate doit naviguer. Prenant q pour exprimer le volume qu'elle doit déplacer étant vuide, en la supposant toujours semblable en tout point au Vaisseau, $q-r$ sera celui qu'elle déplacera réellement ; d'où il suit que $\frac{q-r}{p-r-a}$ sera l'expression du rapport dans laquelle se trouveront les deux volumes. Mais, pour le Vaisseau, ce rapport est $\frac{q}{p}$: donc toutes les fois que $\frac{r}{r+a}$ sera plus grand que $\frac{q}{p}$, comme cela doit être réguliérement, le rapport de ces deux volumes sera moindre dans les Frégates que dans les Vaisseaux ; c'est-à-dire, que le volume qu'elles déplacent, étant vuides, doit être moindre que les $\frac{3}{5}+\frac{1}{300}$ de celui qu'elles déplacent lorsqu'elles sont chargées, & en état de naviguer. Au contraire, dans les Vaisseaux, cette raison doit augmenter à mesure qu'ils sont moins grands, parce qu'outre qu'il n'y a rien pour eux à retrancher à raison des ponts, ils ont, à proportion, leurs entreponts plus élevés.

(131.) Ces déterminations sont d'autant plus admissibles, qu'elles sont confirmées par l'expérience de la Frégate de 26 canons ; car les pieces de cette Frégate ne s'éloignoient que très-peu d'avoir des dimensions proportionnelles aux largeurs : elle étoit surchargée d'artillerie & de lest ; ainsi les efforts qu'elle avoit à soutenir dans les mouvements de roulis & de tangage, étoient beaucoup plus grands qu'ils n'auroient dû l'être, & cependant elle a supporté tous ces efforts sans avoir largué, & sans avoir donné la moindre apparence de brisure : ainsi toutes les Frégates n'ont pas besoin d'être construites avec des bois d'un échantillon plus fort que celui qu'on a donné à la Frégate dont il s'agit ici.

(132.) Toutes ces remarques demandent une aussi sérieuse attention de la part des Constructeurs, que la belle continuité des lignes d'eau sur laquelle ils fondent toute la perfection de leurs constructions. Un Bâtiment trop chargé de bois a un plus grand volume submergé dans le fluide, il éprouve plus de résistance pour le di-

viser,

viser, est, par conséquent, moins bon voilier, & en outre plus exposé à la dérive, & moins docile à son gouvernail; parce que les parties rondes qui devroient être élevées au-dessus de l'eau, se trouvent ordinairement submergées dans le fluide. Si le Bâtiment, sans être trop surchargé de bois, l'étoit trop par son artillerie, ces inconvénients auroient encore lieu; car, outre le poids excessif de l'artillerie, on est encore obligé d'augmenter la quantité du lest, pour abaisser le centre de gravité; d'où il résulte encore les mêmes inconvénients. Ainsi, on doit conclure de tout ceci qu'un Bâtiment surchargé de bois & d'artillerie, aura les plus mauvaises qualités qu'il soit possible d'imaginer.

(133.) Les Constructeurs Français, comme nous l'avons déjà dit, n'emploient pas une si grande quantité de bois. Le Vaisseau de 70 canons construit à la Française, tout armé & calé, jusqu'à la ligne de flottaison suivant laquelle il devoit naviguer, a été trouvé peser 57522 quintaux. Ajoutant à ce nombre 2501 quintaux, à cause des deux pieds que ce Vaisseau avoit de moins en largeur, afin de le réduire à avoir 48 pieds de largeur, son poids total sera de 60023 quintaux. Le Vaisseau de même grandeur, construit à l'Anglaise, pesoit, tout calé & prêt à prendre la mer, 61499 quintaux, & 37106, étant vuide & désarmé. Ainsi, la différence 24393 est le poids de tout ce qui compose l'équipement & l'approvisionnement. Ce poids convient également au Vaisseau Français, avec quelque augmentation de lest; supposons donc que le tout pese 25000 quintaux, en retranchant ce nombre du poids total 60023 quintaux, il restera 35023 quintaux, qui seront le poids de la coque entiérement finie; c'est 2083 quintaux de moins que la même coque construite à l'Anglaise. Suivant la construction Française, le poids de la coque sera donc les $\frac{3}{5}-\frac{1}{60}$ du poids total du Vaisseau armé & équipé. On doit encore diminuer quelque chose dans les Frégates, pour les ponts qu'elles ont de moins; & beaucoup plus, si l'on a attention à ce qui a été dit, *Art.* 113. En effet, M. *Bouguer* (*Traité du Navire*, *pag.* 279 & 282) prétend que la coque de la Frégate *la Gazelle* pesoit seulement 138 tonneaux, tandis que cette Frégate toute armée en pesoit 400: de sorte que, quand la coque eût pesé 140 tonneaux, ce poids n'eût encore été que les $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}$ du poids total.

PLANC. VII.

CHAPITRE II.

Du Centre du volume que le Vaisseau occupe dans le fluide.

(134.) ON a vu dans le Traité des fluides, combien la situation du centre de volume contribue à l'augmentation, ou à la diminution des résistances, des inclinaisons & des moments. Il est donc nécessaire de déterminer par le calcul la vraie situation de ce centre dans les Vaisseaux, & de considérer les avantages qu'on peut obtenir de sa meilleure situation. Nous avons dit (*Tome I*, *Art.* 124) que, pour trouver le centre de masse d'un corps uniformément dense, comme est, dans le cas actuel, le volume de fluide que le Vaisseau déplace, il ne faut que multiplier l'espace différenciel compris entre deux plans paralleles au plan primitif, par la distance perpendiculaire de ce plan audit espace différenciel, intégrer ce produit, & diviser ensuite l'intégrale trouvée par l'espace que le corps occupe; & que le quotient exprimera la distance perpendiculaire du plan primitif au centre de masse ou, de volume. Ainsi, ayant divisé tout le corps du Vaisseau en prismes par des plans horisontaux & verticaux; & supposant qu'un de ces prismes soit compris, comme nous l'avons dit *Art.* 107, entre deux rectangles paralleles dont les côtés soient a & b, e & f, l'espace différenciel de ce prisme sera, comme nous l'avons dit au même endroit, $= aedx + \frac{a}{d}(f-e)\,xdx + \frac{e}{d}(b-a)\,xdx + \frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a)$, x exprimant la distance perpendiculaire du plan primitif à l'espace différenciel. En suivant donc la regle que nous venons d'énoncer, la distance du même plan au centre de gravité de prisme sera $= \frac{\int\left(aexdx + \frac{a}{d}(f-e)x^2dx + \frac{e}{d}(b-a)x^2dx + \frac{x^3dx}{d^2}(f-e)(b-a)\right)}{\int\left(aedx + \frac{a}{d}(f-e)xdx + \frac{e}{d}(b-a)\,xdx + \frac{x^2dx}{d^2}(f-e)(b-a)\right)}$.
Intégrant effectivement, après avoir substitué d pour x, & après avoir réduit, on aura cette distance $= \frac{\frac{1}{2}d(ae+af+eb+3bf)}{2ae+af+eb+2bf} = \frac{1}{2}d \pm \frac{d(bf-ae)}{2(2ae+af+eb+2bf)}$; le signe + ayant lieu lorsque le plan primitif est le plus petit plan ae, & le signe — lorsque c'est le plus grand bf. Supposant maintenant $e=f$, comme nous l'avons fait dans le même *Article* 107, supposition d'après laquelle on ne commet aucune erreur

sensible, la distance se réduira à $\frac{1}{2} d \pm \frac{d(bf-ae)}{6(bf+ae)}$; c'est-à-dire que cette distance sera égale à la moitié $\frac{1}{2} d$ de la hauteur du prisme, plus ou moins le produit de la même hauteur, par la différence des deux plans, divisé par six fois la somme des mêmes plans. PLANC. VII.

(135.) Supposons maintenant que chacun des solides compris entre deux des sections horisontales par lesquelles on a divisé le corps du Navire, soit un de ces prismes; que A exprime l'aire, ou la superficie de la premiere de ces sections; c'est-à-dire, de celle qui correspond à la premiere ligne d'eau; B celle de la seconde, C celle de la troisieme, & ainsi de suite jusqu'à la quille qui est la derniere, & que nous appellerons R. Cela posé, la distance du premier plan de flottaison au centre de gravité du premier solide, sera $\frac{1}{2}d - \frac{d(A-B)}{6(A+B)}$, en exprimant par d la distance d'un plan de flottaison à l'autre. Pareillement la distance du même plan de flottaison au centre de gravité du second solide, sera $= \frac{3}{2}d - \frac{d(B-C)}{6(B+C)}$. Sa distance au centre de gravité du troisieme sera $= \frac{5}{2}d - \frac{d(C-D)}{6(C+D)}$, & ainsi de suite. Considérons maintenant chaque solide comme un corps dont la masse est réunie à son centre de gravité, comme nous l'avons dit dans le *Tome I*, *Art.* 80 *& suiv.*, la distance du premier plan de flottaison au centre de toutes les masses, ou au centre du volume, sera égale à la somme de tous les produits de chaque corps, par la distance du plan de flottaison à son centre de gravité, divisée par la somme des masses, ou par le volume total. Le premier produit est $\frac{1}{4}d^2(A+B) - \frac{1}{12}d^2(A-B)$: le second $\frac{3}{4}d^2(B+C) - \frac{1}{12}d^2(B-C)$: le troisieme $\frac{5}{4}d^2(C+D) - \frac{1}{12}d^2(C-D)$, & ainsi des autres. La somme de tous ces produits sera, par conséquent, $= \frac{1}{4}d^2(A+4B+8C+12D+\&c.\ldots+(n-1)4R) - \frac{1}{12}d^2(A-R)$, A exprimant le premier terme, ou le premier plan de flottaison, R le dernier, & n leur nombre: donc la distance du premier plan de flottaison au centre de tout le volume, sera $= \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{1}{4}d^2((A+4B+8C+12D+\&c.\ldots+(n-1)4R) - \frac{d^2}{12}(A-R)}{d.(\frac{1}{2}+AB+C+D+\&c.\ldots+\frac{1}{2}R)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{d(\frac{1}{4}A+B+2C+3D+\&c.\ldots+(n-1)R) - \frac{1}{12}d(A-R)}{\frac{1}{2}A+B+C+D+\&c.\ldots+\frac{1}{2}R}.$$ Dans l'exemple que nous avons donné du Vaisseau de 42 pieds de largeur (108.), on a trouvé $A=5312$, $B=4972$, $C=4344$, $D=3492$, $E=2314$, $R=200$, $d=3\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}A+B+C+D+E+\frac{1}{2}R=17878$: donc la distance du premier plan de flottaison au centre de volume, sera $= \ldots\ldots$

$$\frac{3\frac{1}{2}(1328+4972+8688+10476+9256+1000) - \frac{3\frac{1}{2}}{12}(5312-200)}{17878} = 7 \text{ pieds moins}$$

$\frac{10}{9}$ de pouce; ou, en négligeant la petite fraction, on aura 6 pieds 11 pouces pour la quantité dont le centre de volume est abaissé au-dessous de la superficie du fluide.

(136.) On voit que, dans ce calcul, on a négligé d'avoir égard au volume qu'occupent les bordages, la quille, l'étrave, l'étambot, le taille-mer & le gouvernail, parce que l'altération que ces objets pourroient produire dans le résultat, seroit très-petite; mais, comme la quille peut faire baisser de quelque chose le centre de gravité, on peut prendre 7 pieds pour la distance ci-dessus.

(137.) Pour trouver ensuite ce dont le même centre de volume est éloigné de l'étrave, ou de l'étambot, ou ce qui convient mieux, pour trouver combien il est éloigné du maître couple, la même formule servira encore, en observant que chaque solide, ou prisme, sera présentement l'espace compris entre deux couples, & les aires, ou surfaces, seront les sections faites par ces mêmes couples; de sorte que A exprimera l'aire que le maître couple a de submergée dans le fluide, B celle qu'a le couple III, ou 3, C celle qu'a le couple VI, ou 6, & ainsi des autres. Mais il est nécessaire de faire attention qu'après les derniers couples XXVII, & 33, il y a un autre petit solide, ou prisme, compris entre ces couples & l'étrave, ou l'étambot. Pour introduire ce solide dans la formule, on supposera que δ exprime la distance de ces couples à l'étrave, ou à l'étambot, ou bien une distance moyenne, & l'on aura $\frac{1}{2}\delta - \frac{\delta(R-0)}{6(R+0)} = \frac{1}{3}\delta$ pour la distance des mêmes couples au centre de gravité du prisme, & $(n-1)d+\frac{1}{3}\delta$ pour la distance du même centre au maître couple. Le moment du petit prisme sera donc $=((n-1)\,d+\frac{1}{3}\delta)\frac{1}{2}\delta R$. Faisant maintenant $\delta=\frac{d}{k}$, k exprimant le rapport entre les distances d & δ, on réduira l'expression de ce moment à $((n-1)d+\frac{d}{3k})\frac{dR}{2k}$; quantité qui, divisée par d, donnera au quotient $(n-1+\frac{1}{3k})\frac{dR}{2k}$: c'est ce qu'on doit ajouter au numérateur, pour y introduire l'action des prismes extrêmes. Ajoutant donc cette quantité, la formule deviendra . . . .

$$\frac{d\left(\frac{1}{4}A+B+2C+3D+\&c.\ldots+\frac{(2k+1)(n-1)R}{2k}\right)-\frac{1}{12}d\left(A-\frac{2k^2+1}{2k^2}R\right)}{\frac{1}{2}A+B+C+D+\&c.\ldots+\frac{1}{2}R}$$

, en observant d'introduire pareillement dans le dénominateur le volume des prismes extrêmes, ou de prendre pour dénominateur le volume entier de la partie du corps du Navire qui est submergée dans le fluide, divisé par la distance d d'un couple à l'autre.

(138.) Il n'y a rien maintenant de plus facile que de trouver les

valeurs de A, B, C, D, *&c.*: car, suivant ce qui a été dit, *Art.* 106, pour avoir la valeur de chacune de ces aires, il faut faire une somme de la moitié de la largeur AB de chaque couple, prise sur le premier plan de flottaison, de deux fois la droite ED, ou la largeur du même couple au second plan de flottaison, de deux fois la droite HG, ou sa largeur au troisieme plan; & ainsi de suite jusqu'à prendre la moitié de la largeur de la quille, & multiplier cette somme par la distance d'une section, ou d'un plan de flottaison, à l'autre. Ainsi, dans l'exemple que nous avons donné dans l'*Art.* 108, les nombres des cinq cases qui correspondent au couple 0, sont les quatriemes parties de ces différentes largeurs: multipliant donc les nombres de la premiere case par 2, ceux des autres par 4, & y ajoutant la moitié de la largeur de la quille, la somme sera $= 21P.\ 0p. + 41P.\ 8p. + 39P.\ 8p. + 36P.\ 0p. + 29P.\ 4p. + 0P.\ 8p. = 168P.\ \frac{1}{3}$: donc $A = (168\frac{1}{3})3\frac{1}{2} = 589$, à cause que $3\frac{1}{2}$ marque la distance entre les sections horisontales, ou entre les lignes d'eau. Pareillement les nombres des cinq cases qui correspondent au couple 3, expriment les largeurs des couples prises sur le plan des différentes lignes d'eau, c'est-à-dire, les demi-largeurs des plans de flottaison qui répondent au couple 3. Donc en prenant le premier nombre & le double des autres, avec la moitié de la largeur de la quille, nous aurons la somme qui sera $20P.\ 11p. + 41P.\ 8p. + 39P.\ 8p. + 35P.\ 10p. + 29P.\ 4p. + 00P.\ 8p. = 168\frac{1}{12}$; donc $B = (168\frac{1}{12})\ 3\frac{1}{2} = 588$. On doit faire la même chose avec les nombres des cinq cases correspondantes aux couples 6, 9, 12, *&c.*, pour avoir les valeurs de C, D, E, *&c.*: on observera seulement pour le couple 33 de prendre deux fois le nombre de la premiere case, & quatre fois ceux des autres, parce que, dans cet exemple, on n'a pris pour ce couple, de même que pour le maître couple, que la moitié des demi-largeurs correspondantes aux différentes lignes d'eau. Ces opérations faites, on trouvera $C=580$, $D=565$, $E=541$, $F=515$, $G=473$, $H=417$, $I=355$, $K=284$, $L=193$, & $R=62$. En outre, en prenant les mesures sur le plan, on trouvera $k=\frac{1}{3}$: donc en mettant toutes ces valeurs dans le numérateur de la formule, on aura pour les moments de la partie de la poupe, depuis le maître couple,

$$7\tfrac{1}{6}(147+588+1160+1695+2164+2575+2838+2916+2840+2556+1930)$$
$$+7\tfrac{1}{6}\left(\left(\frac{(\frac{14}{3}+1)11.62}{\frac{14}{3}}\right)-\tfrac{1}{12}\left(589-\frac{(\frac{14.7}{9}+1)62}{\frac{14.7}{9}}\right)\right)=159387-313=159074.$$

(139.) Pour la partie de la proue A est, comme ci-dessus, $=589$, & l'on trouvera $B=588$, $C=575$, $D=557$, $E=529$, $F=492$,

Planc. VII. Projection transversale.

Planc. VII. $G=422$, $H=310$, $I=127$, $R=18$; & en outre $k=\frac{14}{3}$. Substituant ces valeurs dans le numérateur de la formule, il deviendra $7\frac{1}{6}(147+588+1150+1671+2116+2460+2532+2170+1016+180^{*})$ $-\frac{1}{12}\cdot 7\frac{1}{6}(589-18)=100204$. Comme cette quantité marque les moments de la partie de la proue, à compter aussi du maître couple, lesquels sont opposés à ceux de la poupe, elle sera négative: par conséquent, la distance horisontale du maître couple au centre de masse, ou du volume, sera $=\dfrac{159074-100204}{\frac{62578}{7\frac{1}{6}}}$, en prenant, pour le dénominateur, le volume du corps du Navire, tel qu'on l'a trouvé dans l'*Art.* 108, divisé par $7\frac{1}{6}$, distance d'un couple à l'autre. Réduisant cette expression, on aura 5 pieds 7 pouces $\frac{1}{2}$, ou 5 pieds $\frac{5}{8}$, parce que pour abréger davantage le calcul, nous omettons de faire attention à l'inclinaison de la quille avec l'horison, à cause que la différence que cette considération de plus pourroit produire dans les résultats, est très-légere. Il en est de même de la hauteur de 3 pieds $\frac{1}{2}$, que nous avons employée, quoiqu'elle soit un peu plus petite dans les couples de proue, & pour les lignes d'eau les plus basses.

(140.) Comme la longueur qu'on donne au Vaisseau de 60 canons, est de 152 pieds, & que le maître couple est à 82 pieds de distance de la poupe, il s'ensuit que le maître couple ne sera éloigné du milieu du Vaisseau que de 6 pieds: ainsi le centre de volume & celui de gravité, sont seulement éloignés du milieu du Vaisseau de $\frac{1}{5}$ de pied vers la proue **.

---

* On verra facilement que ce dernier nombre 180 qui est compris entre les deux premieres parentheses, est celui qui répond à $\frac{(2k+1)(n-1)R}{2k}=\frac{(\frac{28}{3}+1)(10-1)18}{\frac{28}{3}}=179\frac{5}{14}$. Comme il n'est pas ici question d'une précision rigoureuse, l'Auteur a négligé plusieurs fois de petites fractions, c'est ce qui fait qu'il a mis 180; cependant il a compensé à peu près ces petites négligences: car en mettant le nombre 180, le résultat est 100207; mais en employant le véritable, on trouve à peu-près 100204, comme il le donne. Au reste, ces légeres différences ne peuvent être d'aucune conséquence sur la position du centre de gravité.

** La méthode de M. *Chapman*, pour trouver le déplacement, que nous avons exposée dans la Note de l'*Article* 108, *pag.* 59, 60 & 62, s'applique aussi à la recherche de son centre de gravité; nous allons l'exposer succinctement, en conservant les dénominations établies à l'endroit cité.

Trouver le Centre de gravité d'un Plan terminé par une ligne courbe quelconque.

Projection horisontale. Le centre de gravité du segment parabolique $bdfr$, est évidemment sur la ligne dr, ainsi il est éloigné de la ligne ab de la quantité $ac=n$. Le centre de gravité du trapese rectiligne $abfe$, est éloigné de la même ligne ab de $\left(\frac{a+2c}{a+c}\right)\frac{2}{3}n$. Car le centre de gravité du rectangle $abye$ est éloigné de ab, de la quantité n, celui du triangle bfy en est éloigné de $\frac{2}{3}ac=\frac{4}{3}n$: or (*Tome I, Art.*

(141.) Ayant trouvé le centre de volume du Vaisseau pour un plan de flottaison déterminé, il est utile maintenant de chercher l'altéra- Planc. VII.

---

96 & 103.) la somme des moments du rectangle & du triangle pris par rapport à ab, étant divisée par la surface du trapese, qui est $(a+c)n$, donnera la distance du centre de gravité du trapese à la même ligne ab; donc cette distance $= \frac{a.2n.n+(c-a)n.\frac{4}{3}n}{(a+c)n} = \left(\frac{a+2c}{a+c}\right)\frac{2}{3}n$: & par conséquent le moment du trapese par rapport à ab, $= \left(\frac{a+2c}{a+c}\right)\frac{2}{3}n \times (a+c)\, n = (a+2c)\frac{2}{3}n^2$.

Cela posé, la surface du segment parabolique $bdfr$ étant (108. *Note*, *p.* 69.) $=(2b-a-c)\frac{2}{3}n$. Son moment par rapport à ab, sera $=(2b-a-c)\frac{2}{3}n^2$: ainsi, par la même raison que ci-dessus, ce moment étant ajouté à celui du trapese $abef$, & la somme étant divisée par l'espace total $abdfe$, qui est $=(a+4b+c)\frac{1}{3}n$, le quotient exprimera la distance du centre de gravité de cet espace à la ligne ab: donc cette distance $= \frac{(a+2c)\frac{2}{3}n^2+(2b-a-c)\frac{2}{3}n^2}{(a+4b+c)\frac{1}{3}n} = \left(\frac{4b+2c}{a+4b+c}\right)n$, & son moment par rapport à cette ligne $=(4b+2c)\frac{1}{3}n^2$. De même la distance du centre de gravité de l'espace $efhki$ à la ligne $ef = \left(\frac{4d+2e}{c+4d+e}\right)n$, & sa distance à la ligne $ab = \left(\frac{4d+2e}{c+4d+e}\right)n+2n = \left(\frac{2c+12d+4e}{c+4d+e}\right)n$, & son moment $=(2c+12d+4e)\frac{1}{3}n^2$. Pareillement la distance du centre de gravité de l'espace $ikmon$ à la ligne $ik = \left(\frac{4f+2g}{e+4f+g}\right)n$, & en ajoutant $ai=4n$, sa distance à ab sera $= \left(\frac{4e+20f+6g}{e+4f+g}\right)n$, & son moment $=(4e+20f+6g)\frac{1}{3}n^2$; & ainsi des autres.

Prenant donc la somme des moments de ces trois espaces, & la divisant par l'espace total $abhon$ qui est (108, *Note*, *page* 59.) $=(a+4b+2c+4d+2e+4f+g)\frac{1}{3}n$, on aura la distance du centre de gravité de cet espace à la ligne $ab = \frac{(4b+2c)\frac{1}{3}n^2+(2c+12d+4e)\frac{1}{3}n^2+(4e+20f+6g)\frac{1}{3}n^2}{(a+4b+2c+4d+2e+4f+g)\frac{1}{3}n} = \left(\frac{4b+4c+12d+8e+20f+6g}{a+4b+2c+4d+2e+4f+g}\right)n = \left(\frac{0.a+1.4b+2.2c+3.4d+4.2\cdot+5.4f+6.g}{a+4b+2c+4d+2e+4f+g}\right)n$.

On voit que le numérateur de cette expression contient les mêmes fonctions des ordonnées que le dénominateur, c'est-à-dire, les mêmes que celles qu'on emploie pour avoir la surface du plan (108. *Note*, *p.* 59.); mais qu'elles sont multipliées par la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c.; ainsi, pour trouver la distance du centre de gravité d'un plan à la ligne qui le termine, il faudra 1°. écrire dans une même colonne toutes les ordonnées & fonctions d'ordonnées qui entrent dans l'expression de sa surface, & en faire une somme; 2°. écrire dans une colonne, à côté, la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c.; 3°. multiplier chaque nombre de la premiere colonne par celui qui lui répond dans la seconde, ce qui donnera une troisieme colonne; 4°. multiplier la somme de la troisieme colonne par l'intervalle d'une ordonnée à l'autre, & diviser le produit par la totalité de la premiere colonne. Le quotient marquera la distance du centre de gravité du plan à sa premiere ordonnée. On remarquera en passant que cette premiere ordonnée ne doit point se trouver dans la troisieme colonne, puisqu'elle a été multipliée par zéro.

Application à la recherche du Centre de gravité des solides.

On a vu (108, *Note*, *p.* 60.) que la solidité du corps $MPRV=(c^2+4b^2+a^2)p.\frac{1}{3}NH$, & que celle du corps $SRV=(0+4c^2+a^2)p.\frac{1}{6}m$: ainsi, conformément à ce qu'on vient de dire, la distance du centre de gravité du corps $MPRV$ au plan $MP = \frac{(0.c^2+1.4b^2+2.a^2)NH}{c^2+4b^2+a^2} = \frac{(4b^2+2a^2)NH}{c^2+4b^2+a^2}$: & celle du solide SRV au plan SK qui passe par $S = \frac{(0.0+1.4c^2+2.a^2)\frac{1}{2}m}{(0+4c^2+a^2)} = \frac{(4c^2+2a^2)\frac{1}{2}m}{4c^2+a^2}$. S'il s'agit du cône $a^2=4c^2$, & cette distance est $=\frac{1}{4}m$. Pour le paraboloïde, $a^2=2c^2$, & cette distance devient $=\frac{2}{3}m$. Pour la demi-sphere & le demi-ellipsoïde, $4c^2=3a^2$, & cette distance devient $=\frac{5}{8}m$ (*Tome I*, *Article* 124 & 125.). Fig. 8.

S'il s'agit du cylindre, on peut faire, comme le dit M. *Chapman*, $4c^2=5a^2$; mais il faut bien

tion qu'éprouvera ce centre, le Vaisseau étant supposé dans un autre plan de flottaison quelconque. Supposons donc que le Vaisseau,

---

observer de ne faire cette substitution que dans le dénominateur, parce que c'est seulement ce terme qui est relatif à la solidité du corps, & non dans le numérateur qui est toujours dans son état naturel; car quelque valeur qu'ait la premiere ordonnée, ou la premiere section circulaire, elle s'évanouit toujours, comme on l'a dit ci-dessus. Faisant donc $4c^2 = 5a^2$, la distance du centre de gravité du cylindre au plan *SK* deviendra $= \frac{1}{2}m$, comme cela doit être.

Au reste, on a déjà fait remarquer (108. *Note, p.* 60) que cette supposition de $4c^2 = 5a^2$, étoit tout-à-fait indirecte; ce n'est qu'en tourmentant, pour ainsi dire, la formule qu'on peut l'appliquer au cylindre: celle qui appartient à ce corps, & à tous ceux dont la ligne génératrice ne prend pas naissance sur l'axe, & dont par conséquent la premiere ordonnée n'est pas $= 0$, est $\left(\frac{4c^2 + 2a^2}{f^2 + 4c^2 + a^2}\right)\frac{1}{2}m$. Car, comme nous l'avons vu, les fonctions des ordonnées qui entrent dans l'expression de leur solidité, est $f^2 + 4c^2 + a^2$, les multipliant par 0, 1, 2, on aura $\left(\frac{4c^2 + 2a^2}{f^2 + 4c^2 + a^2}\right)\frac{1}{2}m$, pour la distance cherchée: dans le cylindre, toutes les sections, ou ordonnées étant égales, on a $c^2 = f^2 = a^2$, & $4c^2 = 4a^2$; donc cette expression devient $= \frac{1}{2}m$.

Application à la recherche du Centre de gravité du déplacement du Vaisseau.

PLANC. VII. Ayant trouvé le volume déplacé, comme on l'a prescrit dans la Note de l'*Article* 108, on trouvera la distance du centre de gravité de la partie comprise entre les couples extrêmes, à l'un de ces couples, par exemple, à celui de l'arriere, qui est le couple 33, en opérant comme il suit: 1°. on écrira dans une même colonne verticale, la somme de tous les couples & fonctions de couples qui entrent dans l'expression de la solidité, en commençant par le couple de l'arriere. 2°. On écrira dans une colonne à côté, la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, *&c.*, jusqu'au couple de l'avant. 3°. On multipliera chacun des nombres de la premiere colonne par celui qui lui répond dans la seconde, & on fera une somme de tous ces produits. 4°. On multipliera cette somme par la distance d'un couple à l'autre, & on divisera le produit par la somme de la premiere colonne, le quotient de la division indiquera la distance du centre de gravité de la partie comprise entre les couples extrêmes 33 & *XXVII*, au couple 33 qui est le plus en arriere.

On cherchera ensuite le centre de gravité du solide compris entre le couple 33 & l'étambot, & celle du solide compris entre le couple *XXVII* & l'étrave, & pour cela on suivra une méthode analogue à celle qu'on vient d'exposer, ou à celle de l'*Article* 137. On prendra ensuite la somme des moments des parties comprises entre le couple 33 & *XXVII*, & entre le couple *XXVII* & l'étrave, par rapport au couple 33, & on en soustraira le moment de la partie comprise entre le couple 33 & l'étambot; divisant le reste par la somme des volumes de ces trois parties, ou par le déplacement total, le quotient de la division sera la distance du centre de gravité du déplacement au couple 33 (*Tome I, Article* 96 & 103.), d'où l'on déduira sa distance au milieu du Vaisseau, ou bien au maître couple, selon qu'on le jugera convenable.

On peut aussi chercher séparément le centre de gravité du volume compris entre le maître couple & l'étrave, & ensuite celle du volume compris entre le maître couple & l'étambot, comme l'a fait notre Auteur, & ensuite en conclure la distance du centre commun de gravité de ces deux parties au maître couple. Nous conseillons même d'en agir ainsi, parce que dans plusieurs recherches on a besoin de connoître la position du centre de gravité de chaque partie prise séparément.

On emploira la même méthode pour trouver la distance du centre de gravité du déplacement au plan de flottaison supérieur; mais au lieu de l'aire des couples, on fera usage de l'aire des plans de flottaison; & au lieu de la distance d'un couple à l'autre, on emploira celle d'un plan de flottaison à l'autre. Les mêmes ordonnées qui servent pour trouver l'aire des couples, servent aussi pour trouver l'aire des plans de flottaison, mais en les employant dans un ordre contraire; ce calcul est trop facile pour que nous y insistions davantage. Après avoir trouvé le centre de gravité de la partie comprise entre les plans de flottaison supérieur & inférieur, on ajoute le moment de cette partie avec celui du volume compris entre le plan de flottaison inférieur & la quille, & l'on divise la somme par le déplacement total, ce qui donne la distance cherchée du centre de gravité du déplacement au plan de flottaison supérieur. Remarquons en passant que l'avantage de la méthode de M. *Chapman*, sur celle de notre Auteur, se fait sentir principalement dans la détermination du déplacement: quant à ce qui regarde le centre de gravité, l'avantage est bien peu considérable.

au lieu

au lieu d'être submergé dans le fluide, comme dans le calcul de l'*Article* 108, soit calé plus ou moins d'un nombre n de pouces, ou qu'il aït une autre ligne d'eau parallele à la premiere, mais plus ou moins haute d'un nombre n de pouces. Suivant les regles établies pour trouver le centre des masses, on peut supposer que par le centre de volume déjà trouvé, on fasse passer un plan horisontal, & que celui-ci soit le plan primitif. Ensuite, on peut considérer le volume entier actuellement submergé, comme composé de deux corps, chacun réuni à son centre de gravité, l'un qui est le volume total que le Vaisseau occupoit d'abord dans le fluide, que nous appellerons v, & l'autre la nouvelle portion qu'on submerge de plus ou de moins, & qu'on peut exprimer par $\frac{1}{12}na$; produit de la surface a du plan de flottaison le plus élevé par la hauteur $\frac{1}{12}n$ *, qui doit être submergée de plus, ou qui doit l'être de moins. On voit d'après cela que le moment du premier corps sera zéro, parce que son centre de gravité se trouve dans le plan primitif, & que le moment du second sera $\frac{1}{12}na(d \pm \frac{n}{24})$, d étant la distance du premier plan de flottaison au centre de volume du premier corps, & $\frac{n}{24}$ celle du centre du nouveau corps submergé au même plan. Donc $\frac{\frac{1}{12}na(d \pm \frac{n}{24})}{v \pm \frac{1}{12}na}$ sera ce dont le nouveau centre de volume est éloigné du premier, & par conséquent $d \pm \frac{1}{12}n \mp \frac{\frac{1}{12}na(d \pm \frac{n}{24})}{v \pm \frac{1}{12}na} = \frac{v(d \pm \frac{1}{12}n) + \frac{an^2}{2.144}}{v \pm \frac{1}{12}na}$ sera la quantité dont le même nouveau centre de volume sera éloigné de la superficie de l'eau. Mais la quantité $\frac{an^2}{(v \pm \frac{1}{12}na)2.144}$ est susceptible d'être négligée; ainsi nous pouvons assigner pour l'expression de la même distance $\frac{v(d \pm \frac{1}{12}n)}{v \pm \frac{1}{12}na}$: & puisqu'à une très-petite différence près, & qu'on peut négliger, on a $\frac{v.\frac{1}{12}n}{v \pm \frac{1}{12}na} = \frac{1}{12}n$, il s'ensuit que la distance du nouveau centre de volume à la superficie du fluide, sera encore = ... $\frac{vd}{v \pm \frac{1}{12}na} \pm \frac{1}{12}n$: le signe positif ayant lieu lorsqu'on augmente le volume submergé, & le signe négatif lorsqu'on le diminue. Si nous substituons, dans l'une quelconque de ces formules, les valeurs que nous avons trouvées (*Art.* 108 & 135) pour le Vaisseau qui nous

* On voit aisément que cette hauteur est exprimée en pieds, pour conserver l'uniformité du calcul, à cause que les surfaces des plans de flottaison sont évaluées en pieds quarrés (108.).

fert d'exemple, d'après la fuppofition qu'il doive fe fubmerger jufqu'à une autre ligne d'eau parallele à la premiere, & qui en foit diftante de 6 pouces, de façon qu'on ait $n=6$, nous aurons $v=62573$, $a=5312$, & $d=6$ pieds 11 pouces: par conféquent la diftance verticale du nouveau centre de volume à la fuperficie du fluide fera $=\frac{62573(6\frac{11}{12})}{62573+(5312)\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=7$ pieds 1 pouce $\frac{3}{5}$; ou, pour compenfer les quantités négligées $=7$ pieds $\frac{1}{6}$.

(142.) On peut parvenir à cette folution plus facilement & plus généralement, non feulement dans le cas où l'on fubmergeroit plus ou moins le Vaiffeau, mais encore dans celui où l'on feroit quelque changement à fon corps, en donnant plus ou moins de capacité à fes couples, ou, ce qui eft la même chofe, en augmentant, ou en diminuant fon volume en quelque partie. Suppofons, par exemple, que w foit le volume qu'on doit ajouter, & f la diftance du centre de ce volume au centre du volume du Vaiffeau: on aura (*Tom. I, Art.* 81 *jufqu'à* 98) $v+w:w::f:\frac{fw}{v+w}$, diftance du centre du volume primitivement fubmergé au nouveau centre cherché. La diftance f peut être pofitive, ou négative, felon que le centre du volume ajouté eft plus bas, ou plus haut que le centre du volume du Vaiffeau; & pareillement la quantité w fera pofitive, ou négative, felon qu'on ajoutera, ou qu'on retranchera le volume. De cette forte, fi on rend le vaiffeau plus plein dans fes fonds, ou, comme difent les Marins, fi on augmente le plat de fes varangues, il s'élevera fur l'eau d'un volume égal au volume ajouté, & l'on aura deux quantités égales w, l'une pofitive, & l'autre négative, & pareillement deux diftances f, l'une pofitive & l'autre négative. Comme le produit de deux quantités pofitives, de même que celui de deux quantités négatives, eft toujours pofitif, il s'enfuit que les deux produits feront pofitifs, & leur fomme fera le produit du volume ajouté w par la diftance entre les centres du volume ajouté & du volume retranché.

(143.) Pour ce qui concerne la quantité dont le même centre peut s'éloigner, ou s'approcher du maître couple, comme la jufteffe du calcul exige que le nouveau corps qu'on fubmerge foit peu confidérable, il en réfultera toujours une quantité négligeable pour le déplacement horifontal du centre du volume.

(144.) Puifqu'en ajoutant le nouveau volume $(5312)\frac{1}{2}=2656$ pieds cubiques dont on fuppofe que le vaiffeau fe fubmerge davantage, aux 66064^{ppp} du volume total trouvé ci-deffus par le calcul (108.), on a 68720^{ppp}, qui eft, à très-peu-près, le volume qu'on a trouvé, par l'expérience (117.), que devroit occuper un Vaiffeau de cette grandeur

nous sçaurons, par conséquent, que le centre du volume de ce Vaisseau sera aussi abaissé au-dessous de la superficie de l'eau de 7 pieds $\frac{1}{6}$.

(145.) Ayant trouvé le centre de volume d'un Vaisseau, il seroit facile de trouver le même centre pour les autres, si leurs fonds étoient entiérement semblables. Soit nommé n le Vaisseau dont le centre de volume est connu, & N celui pour lequel il est question de le trouver.

Soit m la largeur,
v le volume submergé,
a l'aire, ou la section du Vaisseau faite à la superficie du fluide,
d la distance de la superficie du fluide au centre de volume } du premier Vaisseau.

M la largeur,
V le volume submergé,
X la distance de la superficie du fluide au centre du volume, } du second Vaisseau.

Puisqu'on suppose les deux Vaisseaux semblables dans leurs fonds, on aura $M^3 : m^3 :: V : \frac{m^3V}{M^3}$, volume que devroit déplacer le Vaisseau n, pour être dans la même disposition que l'autre Vaisseau N. Ainsi l'on aura $v - \frac{m^3V}{M^3}$ pour l'expression du volume qu'il devroit déplacer de moins, ou de plus qu'il ne le fait; & $\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{a}$ pour celle de la hauteur dont il devroit caler de plus, ou de moins, pour être dans la même disposition que le Vaisseau N. Par conséquent $\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a}$ sera la distance de la superficie du fluide au centre du volume $v - \frac{m^3V}{M^3}$; & le moment de celui-ci sera $= \left(v - \frac{m^3V}{M^3}\right)\left(d - \frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a}\right)$. Donc la distance du centre du volume total v au nouveau centre du volume $\frac{m^3V}{M^3}$ que devroit déplacer le Vaisseau n, pour être dans la même disposition que le Vaisseau N, sera $= \frac{\left(v-\frac{m^3V}{M^3}\right)\left(d-\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a}\right)}{v-\left(v-\frac{m^3V}{M^3}\right)}$: ainsi, la distance de la superficie du fluide au nouveau centre de volume, sera $= \ldots$

$$d - \frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{a} + \frac{\left(v-\frac{m^3V}{M^3}\right)\left(d-\frac{v-\frac{m^3V}{M^3}}{2a}\right)}{v-\left(v-\frac{m^3V}{M^3}\right)};$$ expression qui se réduit à

$\frac{mV^3}{2aM^3}+\frac{v.(2ad-v)}{2a.\frac{m^3V}{M^3}}$. Or le Vaiſſeau n étant, d'après cela, dans la même diſpoſition que le Vaiſſeau N, les diſtances de leur centre de volume à la ſuperficie du fluide, doivent être proportionnelles à leurs largeurs : donc $m : M :: \frac{m^3V}{2aM^3}+\frac{v(2ad-v)}{2a.\frac{m^3V}{M^3}} : X = ..$

$\frac{M}{2a.m}\left(\frac{m^3V}{M^3}+\frac{v(2ad-v)}{\frac{m^3V}{M^3}}\right)$.

(146.) Si nous voulions trouver, pour le Vaiſſeau de 70 canons, par exemple, la profondeur à laquelle ſon centre de volume eſt ſubmergé dans le fluide, on auroit $V=96500$; $M=48$. De même, pour le vaiſſeau de 60 canons, dont le centre de volume eſt ſubmergé de 7 pieds $\frac{1}{6}$, on a trouvé que $v=68650$, $m=42$, & $a=5312+188=5500$; on ajoute 188 à la ſurface 5312 qu'on a trouvée (108.) pour le premier plan de flottaiſon, pour tenir compte de l'épaiſſeur des bordages, afin d'avoir la véritable aire de la ſection faite à la ſuperficie du fluide. Ces valeurs étant ſubſtituées dans la formule, il en réſulte $X=\frac{8}{7.11000}\left(\frac{(7)^3 96500}{8^3}+\frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{\frac{(7)^3 96500}{8^3}}\right)$: ou $X=7$ pieds 10 pouces; telle eſt, pour le Vaiſſeau de 70 canons, la profondeur à laquelle le centre de volume eſt ſubmergé au-deſſous de la ſuperficie de l'eau.

(147.) Pour la Frégate de 22 canons, on aura $V=25170$, & $M=32$: donc $X=\frac{16}{21.11000}\left(\frac{(21)^3 25170}{(16)^3}+\frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{\frac{(21)^3 25170}{(16)^3}}\right)=$ 4 pieds 9 pouces ; c'eſt la hauteur dont cette Frégate aura ſon centre de volume au-deſſous de la ſuperficie de l'eau.

(148.) Pour le Vaiſſeau à trois ponts, qui a 51 pieds de largeur, on a $V=128293$, & $M=51$: donc X ſera = ... $\frac{17}{14.11000}\left((\frac{14}{17})^3 128293+\frac{68650((7\frac{1}{6})11000-68650)}{(\frac{14}{17})^3 128293}\right)=9$ pieds ; c'eſt la profondeur à laquelle le centre du volume du Vaiſſeau à trois ponts ſera ſubmergé au-deſſous de la ſuperficie du fluide.

(149.) On trouvera de la même maniere le centre de volume pour les autres Vaiſſeaux & Frégates, lorſque leurs fonds ſeront ſemblables ; mais lorſque cette condition n'aura pas lieu, il ſera néceſſaire de le chercher directement par le calcul, comme nous l'avons fait pour le vaiſſeau de 60 canons.

PLANC. I.

CHAPITRE III.

Du Métacentre.

(150.) LE centre de volume varie lorsque le Vaisseau s'incline, & de cette variation dépend, comme nous l'avons vu dans le Traité des Fluides, la grandeur, ou la petitesse du moment, & de ce moment dépend la stabilité dans le cas du repos. Que ABD soit le corps du Vaisseau, AD sa ligne d'eau quand il est droit, & GL la même ligne quand il est incliné, de maniere que $LED = AEG$, soit l'angle de l'inclinaison. Ceci posé, & supposant de plus que cet angle est infiniment petit, on se rappellera que nous avons trouvé (*Tome I, Art.* 842.), que les moments verticaux qui résistent à l'inclinaison sont exprimés par $(HP + \frac{m}{12}\int e^3c) \sin \Delta$, Δ exprimant l'angle de l'inclinaison, H la distance du centre de gravité au centre de volume qu'on a trouvé, P le poids total du Vaisseau, m le poids d'un pied cubique du fluide, e la largeur AD, & c une différencielle de la longueur du Vaisseau. Divisant maintenant cette formule par P, poids du Vaisseau, on aura $(H + \frac{m}{12P}\int e^3c) \sin \Delta$ pour la distance horisontale du centre de gravité au nouveau centre de volume; mais $H \sin \Delta$ est la distance horisontale du centre de gravité au centre primitif C du volume; donc $\frac{m \sin \Delta}{12P}\int e^3c$ est la distance horisontale CN du même centre primitif C au nouveau centre de volume N. Si l'on éleve maintenant du point N la verticale NE, le point E sera celui que M. **Bouguer** a nommé *Métacentre*; & puisque CN est à CE, comme $\sin \Delta$ est à 1, on aura CE, c'est-à-dire, la distance du centre de volume au Métacentre $= \frac{m}{12P}\int e^3c$; ou, parce que $\frac{m}{P} = \frac{1}{v}$, v exprimant le volume total, on aura enfin $CE = \frac{1}{12v}\int e^3c$. Fig. 31.

(151.) Toute la difficulté consiste maintenant à trouver la valeur de $\int e^3c$. Pour cela, supposons que la distance d'un couple à l'autre soit $= d$, & que la largeur du plus grand de deux couples consécutifs quelconques, prise dans le plan de flottaison, soit $= a$, & celle du plus petit, $= b$: d'après cela, il est clair que la largeur d'un autre couple distant de la quantité x du couple dont la largeur est $= b$, sera $= b + \frac{x}{d}(a-b)$; par conséquent nous aurons $e = b + \frac{x}{d}(a-b)$, &

$e^3 = b^3 + \frac{3b^2x}{d}(a-b) + \frac{3bx^2}{d^2}(a-b)^2 + \frac{x^3}{d^3}(a-b)^3$, & $e^3c = b^3dx + \frac{3b^2xdx}{d}(a-b) + \frac{3bx^2dx}{d^2}(a-b)^2 + \frac{x^3dx}{d^3}(a-b)^3$: donc la valeur de l'intégrale $\int e^3c$, pour tout l'espace compris entre les deux couples dont les largeurs sont b & $b + \frac{x}{d}(a-b)$, sera $= b^3x + \frac{3b^2x^2}{2d}(a-b) + \frac{bx^3}{d^2}(a-b)^2 + \frac{x^4}{4d^3}(a-b)^3$; & celle qui correspond à l'espace compris entre les couples dont les largeurs sont a & b, est $= \ldots\ldots$ $d\left(b^3 + \frac{3}{2}b^2(a-b) + b(a-b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^3\right) = \frac{1}{4}d(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. Soit maintenant la largeur du maître couple $= A$, celle du couple *III*, ou 3, $= B$, celle du couple *VI*, ou 6, $= C$, & ainsi des autres; l'on aura pour tous les couples depuis le maître couple jusqu'à la proue, ou jusqu'à la poupe $\int e^3c = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\tfrac{1}{4}d(A^3 + A^2B + AB^2 + 2B^3 + B^2C + BC^2 + 2C^3 + C^2D + CD^2 + 2D^3 + D^2E + E^2D + \&c) =$$

$$\tfrac{1}{4}d\left(A^2(A+B) + B^2(A+2B+C) + C^2(B+2C+D) + \&c.... + S^2\left(R + \left(\tfrac{k+1}{k}\right)S\right)\right),$$

S exprimant la largeur du dernier couple, R celle de l'avant-dernier, & $\frac{k}{1}$ la raison de la distance d d'un couple à l'autre, à la distance du dernier S à l'extrêmité de la proue, ou de la poupe*; & par conséquent

---

* Car si l'on met deux termes consécutifs de la formule, par exemple le second & le troisieme, sous cette forme $\frac{d}{4}B^2(A+B) + \frac{d}{4}B^2(B+C)$ & $\frac{d}{4}C^2(B+C) + \frac{d}{4}C^2(C+D)$, on verra, en suivant l'esprit de ce calcul, que la seconde partie de chaque terme avec la premiere partie du terme suivant, appartiennent à un même solide. Ainsi les parties $\frac{d}{4}B^2(B+C)$ & $\frac{d}{4}C^2(B+C)$ proviennent du solide compris entre les couples dont les largeurs sont B & C, tandis que la partie $\frac{d}{4}C^2(C+D)$ appartient au solide suivant. Appliquant donc cette remarque au dernier terme de la formule, on verra, qu'en appellant Z la plus petite largeur du dernier solide, ce dernier terme sera exprimé généralement par $\frac{d}{4}S^2(R+S) + \frac{d}{4}S^2(S+Z)$, dont la premiere partie appartient à l'avant-dernier solide; ainsi, il n'y a que $\frac{d}{4}S^2(S+Z)$ qui appartienne au dernier.

Supposons maintenant que la derniere largeur Z diminue jusqu'à être infiniment petite ou $= 0$, cette seconde partie deviendra $\frac{d}{4}S^2(S)$. De plus, si l'on suppose avec l'Auteur que la hauteur de ce dernier solide, au lieu d'être $= d$, comme celle des précédents, soit $= \frac{d}{k}$, on aura $\frac{d}{4}S^2(\frac{1}{k}S)$. Substituant cette derniere expression dans le dernier terme de la formule, en place de la seconde partie, ce terme deviendra $\frac{d}{4}S^2(R + S + \frac{1}{k}S) = \frac{d}{4}S^2(R + \frac{k+1}{k}S)$; c'est l'expression même de l'Auteur.

Nous n'avons entré dans ce détail qu'en faveur des commençants, qui sont toujours un peu embarrassés dans ces sortes de calculs. Remarquons encore dans les mêmes vues, que l'expression $\frac{d}{4}S^2(\frac{1}{k}S)$, ou $\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{k}\cdot S^3$ que nous venons de trouver pour le dernier solide, fait voir qu'il faut multiplier le cube de sa base, par le quart de sa hauteur. C'est la regle qu'on trouve pour ces solides extrêmes dans l'excellent Ouvrage de M. *Chapman*.

$\frac{1}{12v}\int e^3c = \frac{d}{48v}(A^2(A+B)+B^2(A+2B+C)+C^2(B+2C+D)+\&c.\ldots+S^2(R+(\frac{k+1}{k})S))$, pour la distance du centre de volume au Métacentre.

(152.) Si l'on substitue dans cette formule les valeurs qu'on a trouvées dans l'exemple de l'*Art.* 108, où l'on a calculé le déplacement du Vaisseau de 42 pieds de largeur, $\frac{1}{12v}\int e^3c$ sera pour la poupe $=$ $\frac{7\frac{1}{6}}{48.68650}((42)^2(42+41\frac{1}{6})+(41\frac{1}{6})^2(42+83\frac{2}{3}+41\frac{1}{3})+(41\frac{1}{3})^2(41\frac{1}{6}+83\frac{1}{3}+41\frac{1}{3})+\&c.$ $\ldots+(17\frac{2}{3})^2(27\frac{2}{3}+28))$, & pour la proue $=$ . . . . $\frac{7\frac{1}{6}}{48.68650}((42)^2(42+41\frac{1}{6})+(41\frac{1}{6})^2(42+83\frac{1}{3}+41\frac{1}{6})+(41\frac{1}{6})^2(41\frac{1}{6}+83\frac{2}{3}+41\frac{2}{3})+\&c.$ $\ldots+(9\frac{2}{3})^2(25\frac{1}{3}+13))$* ; & en faisant réellement tous les produits & toutes les sommes, tant pour la partie de la poupe que pour celle de la proue, on aura, pour le Vaisseau de 60 canons & de 24 pieds de largeur, $\frac{1}{12v}\int e^3c = 9$ pieds $\frac{1}{3}$; c'est la distance du centre de volume au Métacentre.

(153.) Pour ajouter maintenant au résultat ce qui correspond pour l'épaisseur du bordage des deux côtés du Vaisseau, qui est de 15 pouces, en tout; on remarquera que la quantité e^3 entrant dans l'ex-

---

Le même Auteur donne une méthode fort ingénieuse & fort commode pour trouver la valeur de $\int e^3c$, laquelle est fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons développée dans la Note de l'*Article* 108, pour trouver la surface d'un plan; en voici la pratique. Il faut 1°. mettre dans une même colonne les cubes de toutes les largeurs des couples, prises au plan de flottaison supérieur, y compris la largeur des couples extrêmes 33 & *XXVII*. 2°. Prendre le premier & le dernier cube tels qu'ils sont, & multiplier le second par 4, le troisieme par 2, le quatrieme par 4, le cinquieme par 2, & ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier, qui se trouvera multiplié par 4, attendu que le nombre des couples doit être impair (108. *Note*.). 3°. Faire la somme de tous ces produits, & la multiplier par le tiers de la distance d'un couple à l'autre. 4°. Multiplier le cube de la base de chacun des deux solides extrêmes par le quart de leur hauteur, & ajouter ces produits à la somme des précédents. 5°. Enfin, diviser cette derniere somme par 12 fois le volume submergé, le quotient exprimera la hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume.

On peut faire le calcul pour une des moitiés du Vaisseau, c'est-à-dire, en n'employant que les cubes des demi-largeurs; alors après avoir fait la quatrieme opération ci-dessus, il faudra doubler le résultat qu'elle aura donné, & diviser par le triple du volume submergé; ce qui revient absolument au même. Au reste, cette méthode n'est pas plus courte ni plus rigoureuse que celle de notre Auteur, elle deviendroit même plus longue si l'on étoit privé de la Table des cubes des nombres naturels, que M. *Chapman* a donnée à la fin de son Ouvrage. Cette Table est d'un usage commode, elle est calculée de centieme en centieme d'unité, depuis 0,01 jusqu'à 26,00, qui est, à peu près, la plus grande demi-largeur que puissent avoir les Vaisseaux; quant à la précision, nous donnons la préférence à la méthode de *D. Georges Juan*.

* L'Auteur donne $(\frac{k+1}{k})S = 28$ pour la poupe, & $= 13$ pour la proue. Ce résultat suppose k plus petit qu'à l'*Article* 138, & cela doit être ainsi, puisque cette quantité marque ici le rapport entre la distance d'un couple à l'autre, & la distance du dernier couple S à l'étrave ou à l'étambot, prise au plan de flottaison; au lieu qu'à l'*Article* 138, cette derniere distance étoit plus petite (137.), ce qui devoit donner une plus grande valeur à k.

preſſion de la hauteur du Métacentre, elle indique que cette hauteur eſt comme les cubes des largeurs; on fera donc $(42)^3 : (43\frac{1}{3})^3 :: 9\frac{1}{2} : 10\frac{1}{3}$, vraie hauteur du Métacentre au-deſſus du centre de volume dans le Vaiſſeau de 60 canons.

(154.) En outre, on pourroit encore ajouter la quantité dont le même Métacentre s'éleve quand le Vaiſſeau s'incline d'une quantité conſidérable, parce que les côtés du Vaiſſeau, à meſure qu'ils s'élevent au-deſſus de l'eau, ayant plus de ſaillie en dehors, particuliérement dans les extrêmités du Vaiſſeau, il eſt clair que la quantité e^3 augmente à meſure que l'inclinaiſon eſt plus grande; & l'inclinaiſon peut être telle que la hauteur du Métacentre au-deſſus du centre de volume, aille juſqu'à 11 pieds $\frac{1}{2}$.

(155.) Ayant trouvé le Métacentre pour un Vaiſſeau, on peut, avec facilité, le trouver pour tous les Vaiſſeaux, dont les ſections à la ſuperficie de l'eau ſont entiérement ſemblables; car, dans ce cas, la quantité $\frac{1}{12}\int e^3 c$, eſt comme les quatriemes puiſſances des largeurs. Cette quantité pour le Vaiſſeau de 42 pieds de largeur, eſt $= 639819$: par conſéquent pour trouver la valeur correſpondante pour le Vaiſſeau de 70 canons, qui a 48 pieds de largeur, on fera $(42)^4 : (48)^4 :: 639819 : 1091502 = \frac{1}{12}\int e^3 c$, dans le Vaiſſeau de 70 canons. On aura donc pour ce Vaiſſeau la diſtance du centre de volume au Métacentre, $= \frac{1}{12v}\int e^3 c = \frac{1091502}{96500} = 11$ pieds 3 pouces $\frac{1}{4}$: auxquels ajoutant 1 pied, à raiſon du bordage, & quelque choſe de plus pour les rondeurs (154.); on aura dans le Vaiſſeau de 70 canons $\frac{1}{12v}\int e^3 c =$ 13 pieds $\frac{1}{2}$.

(156.) Pour la Frégate de 22 canons, qui a 31 pieds $\frac{2}{3}$ de largeur, nous aurons $(42)^4 : (31\frac{2}{3})^4 :: 639819 : 206761$: donc le Métacentre ſera au-deſſus du centre de volume de $\frac{206761}{25170} = 8$ pieds 2 pouces $\frac{1}{2}$; ou en ajoutant 8 pouces $\frac{1}{4}$ à cauſe du bordage, & 9 à cauſe des rondeurs, on aura $\frac{1}{12v}\int e^3 c = 9$ pieds $\frac{2}{3}$.

(157.) Pour le Vaiſſeau à trois ponts, avec 51 pieds de largeur, on a $(42)^4 : (51)^4 :: 639819 : 1391434$: donc le Métacentre ſera au-deſſus du centre de volume de $\frac{1391434}{133053} = 10$ pieds 5 pouces $\frac{1}{2}$; ou en ajoutant 13 pouces $\frac{1}{2}$, à raiſon du bordage, & 15 pouces à cauſe des rondeurs, on aura $\frac{1}{12v}\int e^3 c = 12$ pieds $\frac{4}{7}$. On procédera de la même maniere pour trouver le Métacentre dans les autres Vaiſſeaux.

(158.) Ayant trouvé le Métacentre relativement aux inclinaiſons latérales, il nous reſte maintenant à trouver ce point relativement

aux

aux inclinaiſons que peut prendre le Vaiſſeau de poupe à proue, & réciproquement, c'eſt-à-dire, par rapport aux inclinaiſons qui proviennent du mouvement ſur un axe horiſontal perpendiculaire à la quille, & paſſant par le centre de gravité. Soit Δ l'angle de ces inclinaiſons que nous ſuppoſons infiniment petites, y la largeur d'un couple priſe à la ſuperficie de l'eau, & z la diſtance horiſontale de ce couple au plan vertical, perpendiculaire à la quille, qui paſſe par le centre de tout le volume ſubmergé. Cela poſé, ydz ſera une différencielle de l'aire, ou de la ſection du Vaiſſeau faite à la ſuperficie du fluide ; $yzdz \sin\Delta$ ſera celle du petit volume qui ſe ſubmergera dans l'inclinaiſon ; $yz^2dz \sin\Delta$ ſera le moment de cette différencielle ; par conſéquent $\sin\Delta \int yz^2dz$ ſera l'expreſſion du moment total de la nouvelle partie ſubmergée ; $\frac{\sin\Delta}{v}\int yz^2dz$, celle de la diſtance horiſontale du centre de volume à la verticale qui paſſe par le Métacentre, & $\frac{1}{v}\int yz^2dz$ celle du centre de volume au Métacentre (150, & *Tome I, Art.* 842.).

Pour trouver maintenant la valeur de $\int yz^2dz$, ſuppoſons que a ſoit la largeur d'un couple priſe à la ſuperficie du fluide, b celle d'un autre couple immédiatement plus petit, d la diſtance d'un couple à l'autre, n celle qu'il y a du couple dont la largeur eſt a au plan vertical qui paſſe par le centre de volume, & x celle du couple dont la largeur eſt b à un autre couple intermédiaire entre b & a. Cela poſé, il eſt clair que $\frac{ax+b(d-x)}{d} = y$ ſera la largeur de ce couple intermédiaire (150.), & $z = n + d - x$: ainſi, nous aurons $yz^2dz = -dx(n+d-x)^2\left(\frac{ax+b(d-x)}{d}\right) = \ldots\ldots$

$$-\frac{dx}{d}\left(\begin{array}{c} bd(n+d)^2+(a-b)(n+d)^2x-2(a-b)(n+d)x^2+(a-b)x^3 \\ -2bd(n+d)x+bdx^2 \end{array}\right);$$

quantité dont l'intégrale complette * eſt $= \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{c} bd(n+d)^2+\tfrac{1}{2}d(a-b)(n+d)^2-\tfrac{2}{3}d^2(a-b)(n+d)+\tfrac{1}{4}d^3(a-b) \\ -bd^2(n+d)+\tfrac{1}{3}bd^3 \end{array}\right\}$$

$= \frac{1}{2}n^2d(a+b)+\frac{1}{3}nd^2(a+2b)+\frac{1}{12}d^3(a+3b)$. Cette valeur de $\int yz^2dz$ ſera donc celle qui correſpond au volume compris entre les couples dont les largeurs ſont a & b. Suppoſons maintenant que A ſoit la largeur du maître couple à la ſuperficie de l'eau, B celle du couple *III*, C celle du couple *VI*, & ainſi de ſuite ; que q ſoit de même la diſtance du maître couple au centre de volume. Subſtituant, dans la formule, q pour n, A pour a, & B pour b, la valeur de $\int yz^2dz$ correſpon-

* On obtient cette intégrale en faiſant $x = d$, après avoir intégré.

dante au volume compris entre les couples o & *III*, sera $=$ $\frac{1}{2}q^2d(A+B)+\frac{1}{3}qd^2(A+2B)+\frac{1}{12}d^3(A+3B)$. La distance du centre de volume au couple *III*, est $=q+d$; substituant donc, dans la même formule, $q+d$ pour n, B pour a, & C pour b, la valeur de $\int yz^2dz$, correspondante au volume compris entre les couples *III* & *VI*, sera $=\frac{1}{2}q^2d(B+C)+\frac{1}{3}qd^2(4B+5C)+\frac{1}{12}d^3(11B+17C)$. On trouvera de la même maniere les autres valeurs de $\int yz^2dz$ correspondantes au volume compris entre les autres couples, jusqu'au dernier de la proue; & en sommant ces quantités, on trouvera que la valeur de l'intégrale qui correspond au volume compris entre le maître couple & le dernier couple de proue, est $=$ . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} q^2d(\frac{1}{2}A+B+C+D+E+F+G+H+\&c.) \\ qd^2(\frac{1}{3}A+2B+4C+6D+8E+10F+12G+14H+\&c.) \\ \frac{1}{12}d^3(A+8B+20C+32D+44E+56F+68G+80H+\&c.) \\ \frac{1}{2}d^3(0+B+5C+13D+25E+41F+61G+85H+\&c.) \end{array}\right\}$$

On apperçoit clairement l'ordre de ces séries. Les coëfficients des trois premieres sont en progression arithmétique; & ceux de la quatrieme sont la somme des quarrés des nombres qui expriment le rang des deux termes précédents; par exemple, le coëfficient 13 est la somme de 9 & de 4, quarrés des nombres 3 & 2, qui indiquent le rang des termes C & B. Pareillement 25 est la somme de 16 & de 9, quarrés des nombres 4 & 3, qui indiquent le rang des termes D & C, & ainsi des autres.

Pour trouver maintenant la valeur de $\int yz^2dz$, correspondante au volume compris entre le maître couple & le plan vertical, qui passe par le centre de volume, nous n'avons qu'à substituer, dans la formule, o pour n, q pour d, A pour b, & la largeur du Vaisseau, dans le même plan vertical, pour a: mais, attendu que, dans cet endroit, la différence entre les largeurs du Vaisseau, prises au maître couple & au susdit plan vertical, est très petite, ou nulle, nous pouvons substituer de même A pour a, & nous aurons $\frac{1}{3}q^3A$ pour cette valeur. Enfin, pour trouver la valeur de $\int yz^2dz$, correspondante au volume compris entre le dernier couple de proue & l'étrave, supposons que S soit la largeur de ce dernier couple, k sa distance à l'étrave, r le nombre des couples, le maître couple excepté; ce qui donnera $n=q+(r-1)d$, pour ce qui appartient à l'espace compris entre les couples dont les largeurs sont R & S (R étant celle de l'avant-dernier); & pour celui compris entre S & l'étrave, $n=q+rd$. Ces deux valeurs étant substituées dans la formule, il en résulte les derniers termes des séries $=$ . . . . .

$\frac{1}{4}q^2(d+k)S + q((rd)(d+k) - \frac{1}{3}d^2 + \frac{1}{3}k^2))S + \frac{1}{12}(6r^2d^2(d+k) - 4rd(d^2-k^2) + d^3 + k^3))S$*, d'où l'on conclura que la distance du centre de volume au Métacentre, dans les inclinaisons de poupe à proue, est = ...

$$\frac{1}{v}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}q^3A \\ q^2d(\frac{1}{2}A+B+C+D+E+\&c.)+\frac{1}{4}q^2(d+k)S \\ qd^2(\frac{1}{3}A+2B+4C+6D+8E+\&c.)+q((rd)(d+k)-\frac{1}{3}d^2+\frac{1}{3}k^2))S \\ \frac{1}{12}d^3(A+8B+20C+32D+44E+\&c.)+\frac{1}{12}((6r^2d^2)(d+k)+d^3+k^3)) \\ \frac{1}{4}d^3(0+B+5C+13D+25E+\&c.)-\frac{1}{3}rd(d^2-k^2)S \end{array}\right\},$$

bien entendu que cette expression convient également pour la proue & pour la poupe, & que pour celle-ci q est négatif.

(159.) Si nous substituons dans cette formule les quantités $A = 42P$: $B = 41P\ 10p$, $C = 41P\ 10p$: $D = 41P\ 8p$: $E = 41P\ 6p$: &c. $d = 7\frac{1}{8}$: $k = 4P\ 9p$: $q = 5$: $r = 9$, que nous avons trouvées pour la proue dans l'exemple du Vaisseau de 60 canons, & de 42 pieds de largeur que nous avons donné, *Art.* 108, on aura $\frac{1}{3}q^3A = 1750$: la premiere série sera = 59912 : la seconde = 702690 : la troisieme & la quatrieme réunies = 2808127 : ainsi la somme de ces quantités est = 3572469. Pour la poupe, $A = 42$: $B = 41P\ 10p$: $C = 41P\ 8p$: $D = 41P\ 4p$: $E = 40P\ 10p$: &c. $d = 7\frac{1}{8}$: $k = 41$ $q = -5$: $r = 11$; & il en résulte $\frac{1}{3}q^3A = -1750$: la premiere série = 78125 : la seconde = − 1094671 : la troisieme & la quatrieme réunies, = 5200707 : la somme de toutes ces quantités est = 4182411, laquelle jointe avec celle trouvée ci-dessus 3572469, donne au total 7754880. Divisant cette quantité par 65850 = 68650 − 2800 = v, volume qu'occupe le Vaisseau de 60 canons, moins 2800, volume du bordage qui n'est point entré dans le calcul, il vient au quotient

---

* Si l'on considére, avec quelque attention, les suites précédentes, on verra qu'on a eu pour objet de réunir dans une même suite, tous les termes multipliés par la largeur d'un même couple, du moins autant que le permettoit l'ordre de série qu'il étoit essentiel d'observer, pour rendre les applications numériques plus faciles. C'est pour remplir ce dernier objet qu'on n'a pas réuni la troisieme & la quatrieme suite, pour n'en faire qu'une seule, ce qui étoit même indiqué par le multiplicateur d^3, commun à ces deux suites; & ce que le calcul direct fournissoit d'ailleurs. Mais l'Auteur a séparé, d'une maniere fort élégante, cette suite unique en deux autres, qui observent, comme on vient de le voir, une loi facile à retenir, & d'une application commode.

C'est encore en considérant l'esprit de la méthode de l'Auteur, qu'on verra la raison pour laquelle il prescrit de faire dans la formule générale les substitutions relatives à l'espace compris entre le dernier couple, dont la largeur est S, & l'avant-dernier, dont la largeur est R : car en se contentant de faire le calcul relatif à l'espace compris entre le couple S & l'étrave, on auroit bien eu des termes affectés de la largeur S de ce couple, mais on n'auroit eu qu'une partie de ceux qui doivent l'être ; puisque le volume compris entre R & S doit aussi donner des termes affectés de S. Quant aux termes affectés de R, on les a rejettés, parce qu'ils sont censés compris dans les termes précédents des séries.

Nous observerons encore, en faveur des commençants, que dans la substitution relative à l'espace compris entre le dernier couple & l'étrave, il faut avoir attention de ne pas confondre la lettre d qui est dans la formule générale, avec celle de la valeur de n. Celle de la formule générale n'exprime que la distance entre le couple dont la largeur est S & l'étrave, c'est-à-dire, qu'elle est = k;

117 pieds $\frac{3}{4}$ pour la hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume dans les inclinaisons de poupe à proue *.

Ayant trouvé cette hauteur pour un Vaisseau, il est facile de la trouver pour les autres, si l'on a calculé auparavant celles qui correspondent aux inclinaisons latérales, & si l'on suppose les sections faites par un plan coïncidant avec la superficie de l'eau entiérement semblables : car, comme les deux hauteurs du Métacentre sont, dans l'un & l'autre Vaisseau, comme les quatriemes puissances de leurs dimensions linéaires, tant pour les inclinaisons latérales, que pour celles de poupe à proue, elles seront entre elles dans la même raison. Pour le Vaisseau de 60 canons (152.), on a trouvé la hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume dans les inclinaisons latérales, $=9$ pieds $\frac{1}{3}$; & dans celles de poupe à proue, nous venons de trouver que la hauteur du Métacentre $=117$ pieds $\frac{3}{4}$. De plus, on a trouvé, (155.) pour le Vaisseau de 70 canons, la hauteur du Métacentre dans les inclinaisons latérales $=11$ pieds 3 pouces $\frac{1}{2}$: on aura donc $9\frac{1}{3} : 117\frac{3}{4} :: 11\frac{7}{24} : 142$ pieds 5 pouces, hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume, pour le Vaisseau de 70 canons, dans les inclinaisons de poupe à proue. Pour la Frégate de 22 canons, on a

mais celle de la valeur de $n=q+rd$, exprime la distance d'un couple à l'autre, & doit être conservée sous cette forme. Ainsi, pour éviter toute équivoque, on fera bien de faire $d=k$, dans la formule générale; & ensuite de faire $n=q+rd$, $a=S$, & $b=0$. Ces opérations faites, on aura les expressions mêmes de l'Auteur. Nous avons corrigé quelques négligences typographiques, qui se sont glissées dans cet article, & qui pourroient arrêter les commençants, en jettant de l'incertitude dans leurs opérations.

* L'Auteur fait dans ce calcul la distance k du couple *XXVII*, à l'étrave *plus grande* qu'elle ne résulte de l'*Article* 152, & il fait, au contraire, la distance du couple 33 à l'étambot *plus petite*; car d'après cet *Article* la premiere distance $=2^p\,6p$, & la seconde $=4^p\,2p$. Mais on remarquera que ces distances devant être prises à la superficie de l'eau, la premiere est augmentée, & la seconde est diminuée par l'inclinaison de poupe à proue; & c'est, sans doute, pour tenir compte de cet effet, que l'Auteur a fait les changements dont nous parlons. C'est aussi dans les mêmes vues qu'il a fait $q=\pm 5p$, au lieu de $\pm 5p\frac{2}{3}$ qu'on a trouvé, *Article* 139; parce que l'inclinaison de poupe à proue, porte le centre de volume plus vers la proue, & diminue la distance du maître couple au plan vertical qui passe par ce centre. Au reste, en employant les nombres que l'Auteur indique, les résultats numériques qu'on trouve dans le texte, ne sont pas rigoureusement exacts, nous avons refait ces calculs, & nous avons trouvé pour la proue $\frac{1}{3}q^3A=1750$; la premiere série $=59908$; la seconde $=703610$; la troisieme $=679212$; & la quatrieme $=2128653$; ainsi la somme de ces quantités pour la proue est $=3573133$. Pour la poupe, nous avons trouvé $\frac{1}{3}q^3A=-1750$, la premiere série $=74342$; la seconde $=-1096840$; la troisieme $=1296804$; & la quatrieme $=4210684$; ainsi, la somme de toutes ces quantités pour la poupe $=4486740$; joignant ce résultat avec celui qu'on vient de trouver pour la proue, on aura au total 8059873. Divisant donc cette somme par 65850; il vient au quotient 122 pieds $\frac{2}{5}$, pour la hauteur du Métacentre au-dessus du centre de volume dans les inclinaisons de poupe à proue. Nous nous contentons d'indiquer ces différences pour justifier les essais de commençants, sans réformer le texte de l'Auteur, parce qu'il ne nous est pas possible de faire la même chose par-tout (*Voyez* ci-après la *Note* de l'*Article* 179). Ces résultats numériques ne sont d'ailleurs d'aucune importance pour la pratique, il suffit que les formules analytiques, qui sont censées les avoir fournis, soient exactes.

trouvé la hauteur du Métacentre au-dessus du centre do volume dans les inclinaisons latérales = 8 pieds 2 pouces $\frac{1}{2}$: donc on aura $9\frac{1}{3}$: $117\frac{1}{4}$ :: $8\frac{5}{24}$: $103\frac{1}{8}$, qui est la hauteur du Métacentre, pour cette Frégate, dans les inclinaisons de poupe à proue. Enfin, on a trouvé, pour le Vaisseau à trois ponts, que la hauteur du Métacentre dans les inclinaisons latérales = 10 pieds $\frac{11}{24}$: donc on aura $9\frac{1}{3}$: $117\frac{1}{4}$ :: $10\frac{11}{24}$: $131\frac{2}{5}$, qui est la hauteur du Métacentre dans les inclinaisons de poupe à proue. Si les sections horisontales des Vaisseaux, faites à la superficie de l'eau n'étoient pas semblables, il seroit nécessaire de calculer la hauteur du Métacentre pour chaque Vaisseau séparément, en procédant comme on l'a fait dans l'exemple relatif au Vaisseau de 60 canons.

CHAPITRE IV.

Du Centre de Gravité.

(161.) EN suivant les regles que nous avons déjà données, & que nous avons tant de fois répétées pour trouver le Centre de gravité d'un corps, on voit comment il faut s'y prendre pour déterminer celui d'un Vaisseau. La connoissance de ce centre est absolument nécessaire pour parvenir à celle de sa stabilité qui en dépend, & de tous ses mouvements de rotation. Si donc on multiplie le poids de chacune des pieces qui entrent dans la composition du Vaisseau, & de celles qu'il renferme, c'est-à-dire, de sa charge, par la distance de son Centre de gravité au plan horisontal qui coïncide avec la quille ; & si ensuite on divise la somme de tous ces produits par le poids total, le quotient exprimera la distance dudit plan au Centre de gravité de tout le Vaisseau. Ce calcul est long & pénible, par le grand nombre de parties & de poids de différentes formes qu'il faut examiner; mais cependant on peut le faire par parties ; c'est-à-dire qu'on peut trouver premiérement le Centre de gravité d'un certain nombre de parties, & opérer sur celles-ci pour trouver le Centre de gravité de leur assemblage, comme on a opéré sur chacune séparément. On voit cette maniere de procéder suffisamment développée dans les deux Tables suivantes, & comment on parvient à trouver le Centre de gravité du Vaisseau.

Premiere Table, & Calcul pour trouver le Centre de Gravité de la coque du Vaisseau.

Nom des Parties.	Leur Poids.	Haut. de leur centre.	Produit
Couples.	8850	$6\frac{1}{2}$	57525
Bordage & Vaigrage. .	8100	7	56700
Premier Pont. . . .	2640	20	52800
Second Pont. . . .	2100	27	56700
Faux Pont.	2570	13	33410
Gaillard d'arriere & d'avant. . . .	860	34	29240
Dunette.	250	40	10000
Quille, Contre-Quille, & Fausse Quille. . .	455	−1	−455
Guirlandes & Porques *.	650	5	3250
Carlingue.	50	2	100
Cloisons de brique & de bois.	300	7	2100
Gouvernail.	100	12	1200
Taillemer.	160	18	2880
Ouvrages de Poupe. . .	40	27	1080
Sommes. . .	27125		306985
A déduire			455
Somme des moments.			306530

Divisant la somme des moments 306530, par celles des poids 27125, le quotient 11 pieds $\frac{3}{5}$. exprimera la hauteur du centre de gravité de la coque du vaisseau du dessus de la face supérieure de la quille.

Seconde Table, & calcul pour trouver le Centre de Gravité de tout le Vaisseau.

Nom des Parties.	Leur Poids.	Haut. de leur centre.	Produit.
Artillerie.	2400	24	57600
Boulets.	800	5	4000
Poudre.	280	7	1960
Mâture.	670	55	36850
Agrès, Voilure, Poulies & Caliornes en Place.	670	60	40200
Cables, Agrès, Voilure & Poulies de rechange.	1000	15	15000
Ancres.	320	34	10880
Vivres pour trois mois. .	2850	13	37050
Provision d'eau pour deux mois. . . .	1600	7	11200
Chaloupe, Canot, & Yole.	300	32	9600
Hommes de l'Equipage avec leurs effets. . .	800	27	21600
Lest.	4935	3	14805
Sommes. . .	16625		260745
Som. de la premiere Table.	27125		306530
Sommes totales. . . -	43750		567275

Les 567275 étant divisés par 43750, donnent au quotient 13 pieds $\frac{1}{54}$ **, à très-peu près, pour la hauteur du centre de gravité de tout le Vaisseau, au-dessus de la face supérieure de la quille.

(162.) Ce calcul devient extrêmement long, si on le fait avec l'étendue qu'il exige, c'est-à-dire, si l'on en rassemble tous les éléments dans le détail nécessaire. Pour la pratique des constructeurs, il seroit encore mieux de trouver le Centre de gravité du Navire par la situation déjà trouvée de ce centre pour un autre Navire, en tenant

* En Espagnol, *Bularcamas y Busardas.*

** Le quotient n'est que de 13 pieds, mais nous conservons les résultats numériques tels qu'ils se trouvent dans l'original, quoiqu'ils ne soient pas très-exacts: car, outre que la différence est très-petite, nous n'aurions rien gagné à corriger ceux-ci, ne pouvant faire la même chose pour tous les autres (*Voyez* ci-après la *Note* de l'*Article* 179.). Dans le cas présent, la somme des moments de la premiere Table est certainement 306530, & non 316533, ce qui donne 11 *p.* $\frac{1}{3}$ pour le premier quotient. L'Auteur a ajouté la somme des moments de la premiere Table, avec celle de la deuxieme, mais avant d'en avoir soustrait le moment 455 qui est négatif, ce qui est évidemment fautif, (*Tome I*, *Article* 120.): c'est en grande partie de là que vient la différence dont il est ici question.

compte ensuite des différences qu'il peut y avoir d'un Navire à l'autre, ou des altérations qu'on auroit pratiquées dans la construction de l'autre. Les principes que nous avons exposés précédemment nous facilitent le moyen d'exécuter ce calcul à l'aide d'une seule expérience, que les gens de mer pratiquent très-souvent, & qu'ils appellent *mettre à la bande* *. Le procédé consiste à incliner le Vaisseau, en passant d'un côté toute l'artillerie, les boulets qui sont sur les ponts, les coffres & les caisses de l'équipage, & en suspendant des pieces remplies d'eau à l'extrêmité des vergues, & en faisant encore monter des hommes dessus. Par cette manœuvre on découvre, du côté où le Vaisseau s'éleve, 2 ou 3 pieds de ses parties submergés, & on les nettoie. On pourroit de même, en continuant de faire incliner le Vaisseau, nettoyer tout le reste de sa carene jusqu'à la quille, avec des balais, ou autres choses propres à cet effet. Cette opération est en elle-même facile, & elle le sera encore beaucoup plus, si on l'exécute pour l'objet que nous allons expliquer. On connoît le poids des canons, des affûts & des boulets, celui des caisses, des pieces d'eau, & des hommes; on connoît aussi l'endroit d'où on les a enlevés, & celui où on les a placés; par conséquent il est facile de calculer leur moment. Dans l'équation $\int \pi (p + \Pi) = (HP + \frac{1}{12} m \int e^3 c) \sin \Delta$ (*Tome I. Art.* 900.), π exprime un poids qu'on transporte à la distance horisontale $p + \Pi$; ou $\int \pi (p + \Pi)$ exprime la somme des produits de tous les poids qu'on transporte, par les distances horisontales auxquelles ils ont été transportés. Supposons donc que p exprime cette distance, & l'on aura $\int p\pi = (HP + \frac{1}{12} m \int e^3 c) \sin \Delta$, d'où l'on tire la distance H du centre de volume à celui de gravité $= \frac{1}{P \sin \Delta} \int p\pi - \frac{1}{12 v} \int e^3 c$. Or la quantité $\frac{1}{12 v} \int e^3 c$ est (150.) la distance du Centre de volume au Métacentre: donc $\frac{1}{P \sin \Delta} \int p\pi$ sera la distance du Métacentre au Centre de gravité.

(163.) Pour trouver cette quantité, nous n'avons besoin que de mesurer avec exactitude, dans l'expérience, l'angle de l'inclinaison Δ; ou, ce qui est la même chose, de mesurer exactement au maître couple la partie du côté qui est sortie hors de l'eau par l'inclinaison. De cette façon, supposant que cette partie soit $= g$, & que A soit la largeur du Vaisseau, on aura $\frac{g}{\frac{1}{2} A} = \sin \Delta$, ou $\sin \Delta = \frac{2g}{A}$. Mesurant aussi les distances auxquelles on a transporté les poids π, on trouvera facilement la valeur de l'expression $\frac{1}{P \sin \Delta} \int p\pi$.

---

* En Espagnol, *Dar Pendoles.*

(164.) Dans le Vaisseau de 60 canons qui nous a servi d'exemple, le poids de toute l'artillerie d'un côté de la premiere batterie, avec les affûts & les boulets, est de 720 quintaux, qui multipliés par 27, distance à laquelle on les a transportés, font 19440 de moment. Le poids de l'artillerie de la seconde batterie est de 611 quintaux, qui multipliés par 29, donnent un moment de 17719; celui qui correspond à trois canons du gaillard d'arriere, est de 99 quintaux, qui multipliés par 29, donnent 2871 de moment; le poids des coffres & des caisses est de 300 quintaux, qui multipliés par 18, donnent 5400 de moment; le poids des pieces pleines d'eau suspendues aux vergues, avec les cordages qui les soutiennent, est de 20 quintaux, qui multipliés par 40, donnent 800 de moment: enfin le poids de 20 hommes placés sur chacune des basses vergues, donne un moment de 2440. Toutes ces quantités réunies font un moment de 48670 $= \int p\pi$. Si nous supposons maintenant $\sin\Delta = \frac{1}{8}$, ou, ce qui est la même chose, $g = 2$ pieds $\frac{11}{16}$, le poids total du Vaisseau étant de 43750 quintaux, on aura la distance du Métacentre au Centre de gravité $= \frac{1}{P \sin\Delta} \int p\pi = \frac{8 \cdot 48670}{43750} = 8$ pieds $\frac{11}{12}$. Ainsi, dans le cas de $\sin\Delta = \frac{1}{8}$, le Centre de gravité sera de $11\frac{1}{2} - 8\frac{11}{12} = 2$ pieds $\frac{7}{12}$ plus haut que le centre de volume (154.).

(165.) On a trouvé (144.) que le centre de volume étoit de 7 pieds $\frac{5}{6}$ plus bas que la superficie de l'eau, & celle-ci est distante de la quille (108 & 144) de 18 pieds: donc le Centre de volume est élevé au-dessus de la quille de 10 pieds $\frac{1}{6}$, & celui de gravité de $10\frac{1}{6} + 2\frac{7}{12} = 13$ pieds $\frac{1}{12}$; c'est-à-dire, de 2 pouces $\frac{1}{2}$ plus haut qu'on ne l'a trouvé par le calcul. Si l'on supposoit $\sin\Delta$ plus petit, on trouveroit ce centre plus bas: au reste, il n'y a que l'expérience qui puisse donner une détermination exacte.

(166.) Si l'on vouloit trouver, au moyen des données précédentes, la vraie inclinaison que doit prendre le Vaisseau, on le pourroit aisément; car puisque le centre de volume est élevé au-dessus de la quille de 10 pieds $\frac{1}{6}$, & celui de gravité de 13 pieds $\frac{5}{24}$ (161.), ces deux centres seront donc éloignés de 2 pieds $\frac{9}{24}$. Soustrayant cette distance de 11 pieds $\frac{1}{2}$, dont (154.) le Métacentre est élevé au-dessus du centre de volume, il restera $9\frac{3}{24}$ pour la hauteur du Métacentre au-dessus du Centre de gravité: donc $\frac{1}{P \sin\Delta} \int p\pi = 9\frac{3}{24}$, ce qui donne $\sin\Delta = \frac{\int p\pi}{P \cdot 9\frac{3}{24}}$; ou en substituant la valeur de $\int p\pi = 48670$, & celle de $P = 43750$, on aura $\sin\Delta = \frac{48670}{43750 \cdot 9\frac{3}{24}} = \frac{1219}{10000}$: d'où l'on voit que cette inclinaison doit être un peu moindre que celle de $\frac{1}{8}$ qu'on avoit ci-devant supposée.

(167.)

(167.) Pour trouver le changement qui arrive à la quantité H, ou à la distance entre les Centres de gravité & de volume, lorsqu'on augmente le volume submergé dans le fluide, soit en donnant plus de capacité aux couples, soit en submergeant davantage le Vaisseau; on supposera que p exprime le poids du nouveau lest qu'on ajoute, f la distance du Centre de volume du Navire à celui du volume ajouté, & g la distance du même Centre au centre du lest qu'on ajoute. Cela posé, on aura $P+p : p :: f : \frac{pf}{P+p}$, distance du Centre primitif au nouveau Centre de volume; & par conséquent $H+\frac{pf}{P+p}$ sera la distance du Centre primitif de gravité au nouveau Centre de volume. Pareillement, on aura $P+p : p :: f+H+g : \frac{(f+H+g)p}{P+p}$, distance du Centre primitif au nouveau Centre de gravité : par conséquent la distance entre les deux nouveaux Centres, de gravité & de volume, sera $H+\frac{pf}{P+p}-\frac{(f+H+g)p}{P+p}=\frac{PH-pg}{P+p}$; ou parce qu'on suppose p très-petit à l'égard de P, cette distance entre les deux nouveaux Centres, sera $=H-\frac{pg}{P}$; ou en substituant à la place de P & de p les volumes v & w, elle sera $=H-\frac{wg}{v}$. Toutes les fois que le centre de gravité du lest qu'on ajoute, est plus bas que celui du volume pareillement ajouté, la quantité g est positive, & elle est négative dans le cas contraire : de même les quantités p ou w sont positives, si l'on augmente le poids ou le volume; & elles sont négatives, si on le diminue. Si l'on donne plus de capacité aux fonds du Vaisseau, en le chargeant en même temps d'une quantité de lest correspondante au volume d'augmentation, mais à une profondeur plus grande, H sera moindre, & par conséquent la distance du Centre de gravité au Métacentre, sera plus grande, & l'inclinaison Δ sera moindre. La même chose doit arriver, quand on augmentera le lest, encore qu'on n'ajoute aucun autre volume que celui dont le Navire se submerge davantage, à cause du lest ajouté. Mais si l'on augmentoit la capacité des fonds du Navire, sans augmenter sa charge, on auroit, en ce cas, deux valeurs de wg, l'une positive pour le volume augmenté, & l'autre négative pour le volume qui sort du fluide. La somme des deux sera le produit du volume ajouté w, par la distance de son centre au centre du volume qui sort de l'eau, lequel produit est négatif : or f exprimant cette distance, H sera plus grande de la quantité $\frac{fw}{v}$. Le contraire arriveroit, si l'on diminuoit la capacité de la carene : ainsi, à volumes égaux, & les valeurs f &c étant aussi supposées

égales, le Vaiſſeau dont la carene aura moins de capacité, ou qui tirera moins d'eau, aura la quantité H moindre, & prendra une moindre inclinaiſon Δ.

(168.) Le Vaiſſeau de 70 canons a la hauteur de l'entrepont, moindre de 8 pouces que celle qui lui correſpondroit, pour être en tout proportionné au Vaiſſeau de 60 canons ; ainſi le ſecond pont, toute la batterie & les œuvres qui ſont au-deſſus, ſont plus baſſes de cette même quantité. La différence entre le volume que la coque déplace & celui qu'elle devroit déplacer, ſi ce Vaiſſeau étoit proportionné en tout ſur celui de 60 canons, eſt de 5524 pieds cubiques (126.), leſquels équivalent à 3520 quintaux de poids, dont ſa coque peſoit moins. Le poids total que le Vaiſſeau devoit avoir d'après la même ſuppoſition d'une ſimilitude parfaite, eſt de 65306 quintaux; donc, en retranchant les 3520 quintaux ci-deſſus, il reſtera 61786 quintaux, pour le poids qu'il devoit réellement avoir : mais par l'expérience, on a trouvé ce poids ſeulement de 61499 quintaux; donc ce Vaiſſeau avoit moins en leſt, la différence 287 quintaux. La portion du côté du Vaiſſeau de 8 pouces de hauteur qui a été retranchée, peſe 280 quintaux, leſquels multipliés par 30 pieds, hauteur qu'elle auroit eue au-deſſus de la face ſupérieure de la quille, produiſent 8400 de moment ; tout le ſecond pont avec ſa batterie & les œuvres ſupérieures, peſent 6900 quintaux, qui, multipliés par $\frac{2}{3}$ de pieds, ou par les 8 pouces dont il eſt plus bas qu'il n'auroit été, produiſent 4600 de moment. Enfin, les 287 quintaux de leſt, dont le vaiſſeau eſt moins chargé, multipliés par 3 pieds $\frac{1}{2}$, donnent un moment de 1004 $\frac{1}{2}$. Soit ſuppoſé maintenant que les 3520 quintaux dont la coque peſe moins, ſoient diminués proportionnellement ſur toutes les parties qui la compoſent, leur centre de gravité concourra avec celui de la coque même, laquelle étant reglée ſur les proportions de celle du Vaiſſeau de 60 canons, ſon Centre (161.) doit être élevé au-deſſus de la face ſupérieure de la quille de $\frac{11\frac{2}{3}\cdot 49\frac{1}{2}}{43} = 13$ pieds $\frac{3}{7}$; &, par conſéquent, en multipliant par cette quantité les 3520 quintaux, il en réſulte 47269 de moment : enſorte que tous les quatre réunis, produiſent le moment 61273 $\frac{1}{2}$. Le poids total du Vaiſſeau, comme nous l'avons déjà dit, auroit dû être de 65306, &, proportion gardée, avec le Vaiſſeau de 60 canons, ſon Centre de gravité auroit dû être élevé au-deſſus de la quille, de $\frac{13\frac{1}{14}\cdot 49\frac{1}{2}}{43} = 15$ pieds $\frac{1}{28}$; par conſéquent ſon moment ſeroit de 981933$\frac{1}{2}$. Souſtrayant de celui-ci les 61273$\frac{1}{2}$, il reſtera 920660 pour le moment

véritable du Vaiſſeau ; lequel diviſé par ſon poids 61499 quintaux, donne au quotient 15 pieds moins $\frac{3}{7}$ de pouce, à peu près ; c'eſt la hauteur du Centre de gravité du Vaiſſeau, au-deſſus de la face ſupérieure de la quille : enſorte que cette hauteur ne différe que de 3 pouces $\frac{1}{4}$ de celle à laquelle on eſt parvenu, en ſuppoſant le Vaiſſeau de 70 canons proportionné en tout à celui de 60 canons. Si on vouloit en outre que le Vaiſſeau portât des pieces de 36 à ſa premiere batterie, ſa charge ſe trouveroit augmentée de 550 quintaux, leſquels multipliés par 26, produiſent 14300 de moment. Ce moment étant ajouté à celui ci-deſſus 920660, font 934960, qui, diviſés par 61499 + 550 = 62049 donnent au quotient à peu près 15 pieds & $\frac{4}{5}$ de pouce ; c'eſt la hauteur du Centre de gravité, au-deſſus de la face ſupérieure de la quille : enſorte que l'artillerie de 36, éleve le Centre ſeulement de la quantité $\frac{3}{7} + \frac{4}{5}$ de pouce = 1 pouce $\frac{3}{13}$, quantités qui ſont toutes véritablement ſuſceptibles d'être négligées, ſans crainte d'erreur ſenſible.

(169.) La Frégate de 22 canons, comme nous l'avons déja dit, (120.) a de moins que le Vaiſſeau de 70, le faux pont, la dunette, 16 couples, & 880 quintaux, en artillerie, munitions & uſtenſiles : &, (127.) conſidérée relativement au Vaiſſeau de 60 canons, elle porte 608 quintaux de moins de leſt, & 1920 quintaux d'excédant, pour l'épaiſſeur trop conſidérable des bois. Le faux pont auroit été élevé au-deſſus de la quille de 9 pieds $\frac{3}{4}$, & ſon poids étant de 1140 quintaux, ſon moment eſt par conſéquent de 11115. La dunette auroit été élevée de 30 pieds $\frac{4}{17}$ au-deſſus de la quille, & ſon poids étant de 170 quintaux, ſon moment eſt = 5140. Les 16 couples auroient eu leur centre élevé de 5 pieds : donc leur moment auroit été de 3700 (120.). L'artillerie auroit eu ſon centre élevé de 20 pieds, ſon moment auroit donc été de 17600 : & enfin, les 608 quintaux de leſt ayant eu leur centre élevé de 2 pieds $\frac{1}{4}$ leur moment ſeroit de 1368. Le Centre de gravité de toute la Frégate, proportionnée en tout ſur le Vaiſſeau, devroit être élevé au-deſſus de la quille de $\frac{15 \cdot 31\frac{2}{3}}{48}$ = 9 pieds 10 pouces $\frac{3}{4}$: & en ſuppoſant que l'excès qui provient du trop d'épaiſſeur des bois, ait le même centre, ſon moment ſera de 19000. La ſomme des 5 premiers moments monte à 38923, en ſouſtrayant de cette ſomme les 19000, il reſtera 19923. La Frégate ſuppoſée toujours parfaitement ſemblable au Vaiſſeau, devroit avoir 27708 pieds cubes de volume ſubmergé dans le fluide, ce qui répond à un poids de 17658 quintaux, leſquels multipliés par 9 pieds 10 pouces $\frac{3}{4}$, produiſent un moment de 174741 ; retranchant de cette quantité les 19923 que nous venons de trouver, il reſtera 154818 ; & ce nombre étant diviſé par

16040 quintaux, poids réel de la Frégate, il vient au quotient, 9 pouces $\frac{6}{7}$ pour la hauteur de son Centre de gravité, au-dessus de la face supérieure de la quille. On voit par-là que la situation du Centre de gravité, la Frégate supposée entiérement semblable au Vaisseau, ne différe de sa vraie situation que de 2 pouces $\frac{1}{4}$.

(170.) Le Vaisseau de 80 canons aura son Centre de gravité semblablement situé que celui de 70 : c'est-à-dire, à la hauteur de 15 pieds $\frac{11}{16}$ au-dessus de la quille, ou à celle de 15 pieds $\frac{5}{6}$, pour tenir compte de la petite quantité dont il est en effet plus bas relativement aux Vaisseaux de 60 & 70 canons : mais le volume qu'il doit avoir submergé dans le fluide est (117) de 115500 pieds ; donc son poids sera de 71058 quintaux, lesquels multipliés par les 15 pieds $\frac{5}{6}$, produisent un moment de 1125095. Le Vaisseau à trois ponts a un pont de plus que celui de 80 canons, & le poids de ce troisieme pont est de 4200 quintaux, en comprenant le poids du bois & du fer, qui entrent dans sa composition. Ce poids multiplié par 43 pieds $\frac{1}{2}$, quantité dont son centre est élevé au-dessus de la quille, produit un moment de 182700. L'artillerie qui doit être sur le même pont, étant supposée composée de pieces de 12 livres de balles, pese 1200 quintaux, avec les autres armes & ustensiles, & ce poids étant multiplié par 41 pieds $\frac{1}{2}$, hauteur du centre de cet assemblage, produit 49800 de moment. Toute l'œuvre qui s'éleve depuis le troisieme pont, pese 2700 quintaux ; en les multipliant par 7 pieds, qui est la hauteur dont elle s'éleve, le moment de cette partie sera = 18900. Deux cents hommes de plus pour l'équipage, avec leurs coffres & effets, pesent 400 quintaux : multipliant ce poids par 40, hauteur à laquelle montera leur centre, on aura 16000 de moment. Trois mois de vivres pour ces 200 hommes pesent 1125 quintaux, lesquels étant multipliés par 14 pieds, produisent un moment de 15750. Deux mois d'eau pour les mêmes 200 hommes pesent 750 quintaux, lesquels multipliés par 8, produisent 6000 de moment. Enfin, 3000 quintaux de lest d'augmentation, étant multipliés par 4, produisent un moment de 12000. Ces moments étant joints ensemble, font une somme de 301150, laquelle ajoutée à 1125095, forme un total de 1426245 ; & divisant cette derniere somme par le poids du Vaisseau qui est 81733, on trouve au quotient 17 *p.* 5 *p.* $\frac{3}{7}$; c'est la hauteur du Centre de gravité au-dessus de la face supérieure de la quille dans le Vaisseau à trois ponts ; c'est-à-dire que ce Vaisseau aura son Centre de gravité plus élevé que celui du Vaisseau de 80 canons de 1 pied $\frac{37}{60}$.

(171.) Pour trouver maintenant, pour ces Vaisseaux, la hauteur du Métacentre au-dessus du Centre de gravité, il est nécessaire de dé-

terminer premiérement la quantité qu'ils ont de submergée dans le fluide, c'est-à-dire, la hauteur de la superficie de l'eau au-dessus de la quille, pour en déduire celle du Centre de volume au-dessus de la même quille. On a trouvé, dans l'*Art.* 144, l'expression $\frac{v - \frac{m^3 V}{M^3}}{a}$, qui marque la profondeur dont le Vaisseau de 60 canons doit être plus ou moins calé pour être dans une disposition semblable à celle d'un autre Vaisseau; $m = 42$, exprimant la largeur de ce Vaisseau; $v = 68650$, son volume; $a = 5500$, l'aire ou la section faite à la superficie du fluide; M la largeur; & V le volume d'un autre Vaisseau quelconque. Cette expression se réduit donc à $\frac{68650 - \frac{74088 V}{M^3}}{5500}$. Pour le Vaisseau de 70 canons, on a $V = 96500$, & $M = 48$: notre expression deviendra donc $= \frac{68650 - \frac{74088 . 96500}{110592}}{5500} = \frac{8}{11}$. On voit par-là que, pour que le Vaisseau de 60 canons demeure dans une disposition semblable à celle du Vaisseau de 70, il doit seulement caler de $18 - \frac{8}{11} = 17$ pieds $\frac{3}{11}$. Faisant donc cette proportion $42 : 48 :: 17\frac{3}{11} : 20$, le quatrieme terme 20 exprimera le nombre de pieds d'eau que calera le Vaisseau de 70 canons, ou la hauteur à laquelle la superficie de l'eau s'élevera au-dessus de la quille. Soustrayant de cette hauteur les 7 pieds $\frac{1}{6}$ (146.) dont le Centre de volume est abaissé au-dessous de la superficie de l'eau, il restera 12 pieds $\frac{5}{6}$, pour la hauteur de ce Centre au-dessus de la quille. Mais le Centre de gravité est élevé de 15 pieds au-dessus de la quille (168.) : donc les deux Centres, de volume & de gravité, sont éloignés l'un de l'autre de 2 pieds $\frac{1}{6}$, qui soustraits de 13 pieds $\frac{1}{4}$; quantité dont le Métacentre est élevé au-dessus du Centre de volume (155.), il restera 10 pieds $\frac{1}{12}$ pour la hauteur du Métacentre au-dessus du Centre de gravité.

(172.) Pour la Frégate de 22 canons, nous avons $V = 25170$, & $M = 31\frac{2}{3}$; ainsi nous aurons $\frac{68650 - \frac{74088 . 25170}{31754}}{5500} = 1\frac{4}{5}$: par conséquent, pour que le Vaisseau de 60 canons fût dans une disposition semblable à celle de cette Frégate, il devroit caler seulement de $18 - 1\frac{4}{5} = 16$ pieds $\frac{1}{5}$, & en faisant la proportion $42 : 31\frac{2}{3} :: 16\frac{1}{5} : 12$ pieds $\frac{3}{14}$, on aura 12 pieds $\frac{3}{14}$ pour la profondeur dont calera la Frégate. En soustrayant de ce nombre les 4 pieds $\frac{19}{24}$ dont (147.) le Centre de volume est au-dessous de la superficie de l'eau, il restera 7 pieds $\frac{9}{21}$ pour la hauteur de ce Centre au-dessus de la quille, laquelle étant

retranchée de 9 pieds $\frac{14}{21}$, qui eſt (169.) celle du Centre de gravité, il reſtera 2 pieds $\frac{1}{21}$ pour la quantité dont ce dernier Centre eſt élevé au-deſſus de l'autre. Enfin, retranchant cette quantité de 9 pieds $\frac{14}{21}$ (156.), hauteur du Métacentre au-deſſus du Centre de volume, il reſtera 7 pieds $\frac{3}{7}$ pour la hauteur du Métacentre au-deſſus du Centre de gravité.

(173.) Pour le Vaiſſeau à trois ponts, nous avons (148.), $V = 128293$, & $M = 51$: ainſi, nous aurons $\frac{68650 - \frac{77088 \cdot 128293}{132651}}{5500} = \frac{6}{11}$; donc, pour que le Vaiſſeau de 60 canons ſoit dans une diſpoſition ſemblable à celle du Navire à trois ponts, il doit caler de 18 pieds $\frac{6}{11}$: & par la proportion $42 : 51 :: 18\frac{6}{11} : 22\frac{11}{21}$, on trouve $22\frac{11}{21}$, qui feront la profondeur dont calera le Vaiſſeau à trois ponts. Souſtrayant 9 pieds de cette profondeur, leſquels (148.) ſont la quantité dont le Centre de volume eſt au-deſſous de la ſuperficie du fluide, il reſte 13 pieds $\frac{11}{21}$ pour la hauteur de ce Centre au-deſſus de la quille, laquelle étant retranchée de 17 pieds $\frac{9}{20}$, qui eſt (170.) la hauteur du Centre de gravité, il reſtera 3 pieds $\frac{13}{14}$ pour la quantité dont ce Centre eſt élevé deſſus de celui du volume. Enfin, retranchant cette quantité de 12 pieds $\frac{4}{7}$ hauteur du Métacentre au-deſſus du Centre de volume, (157.), il reſtera 8 pieds $\frac{5}{7}$ pour la hauteur du Métacentre au-deſſus du Centre de gravité.

(174.) Cette hauteur du Métacentre au-deſſus du Centre de gravité, dans le Vaiſſeau à trois ponts, paroîtra exceſſive, ſi on la compare à celle que nous indique M. *Bouguer* dans ſon *Traité du Navire*, *page* 284; car il limite ſeulement cette hauteur à 1 ou 2 pieds. Nous ne pouvons nous diſpenſer de faire obſerver qu'une différence auſſi conſidérable doit néceſſairement venir de quelque erreur. Pour le faire voir plus clairement, retournons à l'uſage de la formule $\frac{1}{P \sin \Delta} \int p\pi$, qui exprime la diſtance du Centre de gravité au Métacentre, & l'on aura, ſelon M. *Bouguer* $\frac{1}{P \sin \Delta} \int p\pi = 2$. Suppoſons maintenant que dans le Vaiſſeau on faſſe ſeulement paſſer l'artillerie d'un côté à l'autre, ſans déplacer les coffres, les caiſſes, les pieces à l'eau, & ſans placer des hommes ſur les vergues, &c. : l'artillerie, avec ſes affûts, peſe 2510 quintaux, & la diſtance moyenne dont on la tranſporte, eſt $= 38$ pieds : donc $\int p\pi = 2510 \cdot 38 = 95380$. On a de plus $P = 81733$ quintaux (170.), on aura donc $\frac{95380}{81733 \sin \Delta} = 2$, & par conſéquent $\sin \Delta = \frac{95380}{163460}$, qui eſt le ſinus de 35° 42'; inclinaiſon effrayante, & qui ne peut manquer de paroître très-extraor-

dinaire à tout homme de mer : par cette inclinaiſon, le Vaiſſeau auroit ſa ſeconde batterie toute noyée. Suivant notre ſolution, on aura $\frac{95380}{81733 \, \mathit{ſin}\, \Delta} = 8\frac{6}{7}$, ce qui donne $\mathit{ſin}\, \Delta = \frac{95380}{723921}$, ou à peu près $\mathit{ſin}\, \Delta = \frac{10}{76}$; inclinaiſon qui n'indique rien que de conforme à l'expérience, & qui eſt très-peu ſupérieure à celle qu'on a trouvée pour le Vaiſſeau de 60 canons, & par elle le Vaiſſeau ne ſubmergera ſon côté que de 3 pieds $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE V.

Des Réſiſtances horiſontales qu'éprouve le Vaiſſeau.

(175.) QUoique les réſiſtances horiſontales qu'éprouve le Vaiſſeau puiſſent varier d'une infinité de manieres, ſuivant les différentes diſpoſitions qu'on peut donner aux voiles, nous pouvons cependant les réduire ſeulement à deux : une perpendiculaire à la quille, qui nous ſervira non-ſeulement pour calculer la vraie ſtabilité, & le vrai moment dans le mouvement de rotation appellé *Roulis*; mais encore pour déduire, dans la route oblique, les forces effectives d'où provient la réſiſtance; & l'autre ſuivant la direction même de la quille, que nous conſidérerons dans les mêmes vues. Comme le Vaiſſeau n'a pas la figure d'un corps régulier, nous ne pouvons parvenir à connoitre les réſiſtances qu'en les calculant par parties, c'eſt-à-dire, qu'en cherchant celles qu'éprouvent tous les petits quadrilateres, ſenſiblement plans, dans leſquels on conçoit que la ſurface de la partie ſubmergée dans le fluide eſt diviſée, par des plans horiſontaux & verticaux.

(176.) La force qu'éprouve un de ces petits quadrilateres dans la partie qui pouſſe le fluide, a été trouvée, (*Tome I, Art. 666.*) $= mc\left(Da + \frac{1}{6}u \, \mathit{ſin}\, \theta \left(\left(D + \frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D - \frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \, \mathit{ſin}\, \theta^2\right)$, & pour la partie qui eſt pouſſée par le fluide, elle eſt $= \ldots\ldots$ $mc\left(Da - \frac{1}{6}u \, \mathit{ſin}\, \Theta \left(\left(D + \frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(D - \frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \, \mathit{ſin}\, \Theta\right)$; m exprimant la denſité du fluide; c la diſtance entre les deux paralleles à la direction du mouvement, qui paſſent par les extrêmités du petit quadrilatere; a la hauteur de ce même petit quadrilatere; D la diſtance du centre du quadrilatere juſqu'à la ſuperficie du fluide; θ & Θ les angles que forme la direction horiſontale du mouvement avec le quadrilatere; & enfin u la vîteſſe. Pour avoir l'expreſſion de

la résistance, il est nécessaire de soustraire la derniere force de la premiere, comme on l'a fait dans le même *Article*, & il en résultera $\frac{1}{6}mcu(\sin\theta+\sin\Theta)((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})+\frac{1}{64}mcu^2(\sin\theta^2-\sin\Theta^2)$, pour l'expression de la résistance qui provient de l'action du fluide sur les petits quadrilateres correspondants opposés, ou qui sont dans la même ligne horisontale parallele à la direction du mouvement; θ exprimant l'angle que forme cette direction avec un de ces petits quadrilateres, & Θ celui qu'elle forme avec l'autre : & comme les sinus de ces angles varient suivant les différentes inclinaisons que peut prendre le Vaisseau, il s'ensuit qu'il est indispensable de faire le calcul séparément pour chaque inclinaison particuliere; mais cependant nous pouvons nous borner au cas unique d'une inclinaison infiniment petite, parce que de ce cas on peut conclure pour presque tous les autres : & ceux qui voudront avoir une plus grande exactitude, pourront calculer un ou deux cas de plus.

Nous supposerons donc le Vaisseau parfaitement droit, c'est-à-dire, sans inclinaison, & par conséquent nous aurons dans les résistances latérales $\theta=\Theta$, ce qui réduit l'expression des résistances latérales pour les petits quadrilateres pris des deux côtés à .... $\frac{1}{3}mcu\sin\theta((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})=\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\theta(1-\frac{a^2}{96D^2}-\ldots\frac{a^4}{2048D^4}-$ &c.) (*Tome I*, 669.); mais comme a est petite à l'égard de D, on peut négliger tous les termes de la série, excepté le premier, & elle se réduira à $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\theta$ (*Tome I*, 670.) Dans les résistances de poupe à proue, nous ne pouvons supposer précisément $\sin\theta=\sin\Theta$, parce que la figure de la proue n'est pas entiérement semblable à celle de la poupe; mais comme la quantité $\sin\theta^2-\sin\Theta^2$ est extrêmement petite, on peut la négliger : ainsi, nous pouvons réduire l'expression de ces résistances à $\frac{1}{6}mcu(\sin\theta+\sin\Theta)((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}})$: c'est-à-dire, à ... $\frac{1}{4}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\theta$ pour la partie de la proue, & à $\frac{1}{4}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\Theta$, pour celle de la poupe. Nous avons vu, *Tome I*, *Article* 584., que $\sin\theta=\sin\lambda.\sin n$; λ exprimant l'angle que forme la direction du mouvement avec la base du petit quadrilatere, & n l'angle que forme le même petit quadrilatere avec l'horison : donc la résistance latérale ainsi que les forces qui agissent à la poupe & à la proue, seront encore exprimées par $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\lambda.\sin n$, les deux côtés étant compris dans cette expression.

(177.) Pour trouver maintenant les valeurs des quantités que renferme

ferme cette formule, soit AB, CD, la projection de deux couples sur le plan horisontal du Vaisseau, & AC, BD, celle des deux lignes d'eau, ou sections horisontales qui terminent le petit quadrilatere $ABCD$: par le centre E de celui-ci soit imaginé une autre section horisontale FEG: soit abaissé la ligne FH perpendiculaire à CD, & HI perpendiculaire à FEG; de plus, par E soit mené la ligne KL aussi perpendiculaire à FEG, & soit élevé sur KL la perpendiculaire LM, qu'on fera $= a$, hauteur du petit quadrilatere, ou distance comprise entre les deux lignes d'eau: tirant ensuite la ligne MK, on lui abaissera la perpendiculaire LN. Ceci posé, puisque pour les Résistances latérales $FH = c$, & le sinus de $BFG = HGI = \sin\lambda$, on aura $1 : \sin\lambda :: c : FI$, que nous supposerons $= f$, ce qui donnera $f = c \sin\lambda$. Pour les Résistances de poupe à proue, on a $HG = c$, & le sinus de $HFG = IHG = \sin\lambda$; ainsi, on aura $1 : \sin\lambda :: c : IG = f = c \sin\lambda$. Pour les deux Résistances, l'angle MKL étant l'inclinaison du petit quadrilatere avec l'horison, on aura $MKL = MLN =$ l'angle ν; & par conséquent $1 : \sin\nu :: a = ML : MN = a \sin\nu$, que nous appellerons g. Substituant ces valeurs dans les formules, la Résistance latérale, de même que les forces qui agissent à la proue, ou à la poupe, sera $= \frac{1}{2} mfg D^{\frac{1}{2}} u$; avec cette seule différence que, pour la Résistance latérale, on a $f = FI$, tandis que pour les Résistances de la poupe à la proue, on a $f = IG$. Tirant donc un même assemblage de lignes dans chacun des petits quadrilateres du plan horisontal du Navire, on aura les valeurs de f & de g, lesquelles étant multipliées l'une par l'autre, donneront les valeurs du produit fg, d'où l'on conclura celle de la quantité $fgD^{\frac{1}{2}}$. Prenant ensuite la somme de toutes ces dernieres quantités, on la multipliera par $\frac{1}{2} mu$, & le produit exprimera la Résistance totale, à l'exception de celle qui provient de la dénivellation du fluide. PLANC. I. FIG. 32.

(178.) C'est en suivant cette méthode qu'on a dressé, pour plus d'ordre, la premiere des deux Tables suivantes, qui est déduite du plan du Vaisseau de 60 canons, qui nous sert d'exemple, avec cette seule distinction, cependant, qu'on a désigné par F la quantité qui correspond à la Résistance latérale. Chacun des petits quadrilateres de la Table, correspond à celui du plan qui est désigné par les titres écrits à la tête des colonnes & au côté gauche de la Table.

(179.) Ayant fait ensuite tous les produits Fg & fg, il en résulte la seconde Table. La somme de chaque colonne verticale de celle-ci est écrite au pied, & exprime la somme des produits Fg & fg, com-

pris entre les lignes d'eau indiquées à la tête de chaque colonne de la même Table *.

(180.) Chacune de ces dernieres sommes doit se multiplier par sa quantité correspondante $D^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, par la racine quarrée de la distance du centre des petits quadrilateres à la superficie de l'eau ; & comme la distance entre les lignes d'eau est de 3 pieds ½, nous aurons pour les quadrilateres compris entre la première & la seconde ligne d'eau, $D^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$; pour ceux compris entre la seconde & la troisieme, $D^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3\cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{23}{10}$; pour ceux compris entre la troisieme & la quatrieme, $D^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{5\cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{71}{24}$; pour ceux compris entre la quatrieme & la cinquieme, $D^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{7\cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{2}$; enfin, pour ceux compris entre la cinquieme & la quille, $D^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{9\cdot 3\frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{127}{32}$: ainsi ces produits seront comme il suit :

Valeur des produits $FgD^{\frac{1}{2}}$	*Valeur des produits* $fgD^{\frac{1}{2}}$
$433\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} = 578$	$67\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = 90$
$400\frac{11}{12}\cdot\frac{23}{10} = 921$	$61\frac{5}{6}\cdot\frac{23}{10} = 142$
$361\frac{11}{12}\cdot\frac{71}{24} = 1071$	$42\frac{2}{3}\cdot\frac{71}{24} = 126$
$295\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2} = 1035$	$25\frac{15}{32}\cdot\frac{7}{2} = 89$
$223\frac{24}{28}\cdot\frac{127}{32} = 889$	$7\frac{1}{6}\cdot\frac{127}{32} = 29$
Somme 4494	Somme 479

* Tous les produits *Fg*, *fg*, qui composent la seconde Table, ne correspondent pas avec précision à leurs facteurs *F*, *f*, *g*. Nous nous serions portés à faire les corrections convenables, malgré la longueur & la sécheresse d'un pareil travail, si nous avions pu distinguer, dans tous les cas, si l'erreur dépend des facteurs, ou des produits. Pour vérifier les facteurs, il auroit fallu tracer en grand le plan du Vaisseau de 60 canons, & faire les figures correspondantes à chacun des petits quadrilateres de sa carene (177.) ; car la *Figure* de la *Planche VII* est trop petite pour donner une précision suffisante, & n'est pas accompagnée d'une échelle. Il est vrai que rien n'eût été plus facile que de la rétablir, & de copier plus en grand le plan de ce Vaisseau ; mais outre que ce genre de réduction ne comporte pas une grande précision, il est à présumer que ce travail ne nous auroit pas réussi au point qui est nécessaire, pour rencontrer absolument les résultats de l'Auteur, attendu l'extrême difficulté, pour ne pas dire l'impossibilité absolue, de retrouver les dimensions primordiales sur lesquelles il doit avoir fait son calcul. Au reste, eussions-nous eu le succès le plus complet, nous n'eussions gagné autre chose que de favoriser les essais des commençants qui sont toujours charmés de s'assurer de l'exactitude de leurs opérations ; car tous ces résultats numériques ne peuvent point servir en rigueur pour d'autres Vaisseaux, & les exemples que l'Auteur donne ne peuvent que guider dans les applications qu'on voudra faire de sa théorie à d'autres Vaisseaux.

Au surplus, l'erreur que nous avons apperçue est fort peu considérable ; ainsi, ces résultats représentent assez bien l'état des choses pour les Vaisseaux que l'Auteur a soumis au calcul, d'après sa théorie : toutes ces raisons réunies nous autorisent donc complettement à laisser les choses dans l'état où nous les avons trouvées.

I. TABLE des Valeurs de F, f & g.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau.														
	1e. & 2e.			2e. & 3e.			3e. & 4e.			4e. & 5e.			5e. & quille.		
	F	*f*	*g*	*F*	*f*	*g*	*F*	*f*	*g*	*F*	*f*	*g*	*F*	*f*	*g*
trave & XXVII	1 p 7	3 p 3	3 p 0												
XVII & XXIV	4. 9	5. 9	2. 11	5 p 0	6 p 2	2 p 8	3 p 3	2 p 3	2 p 10						
XIV & XXI	5. 11	3. 0	3. 1	5. 8	3. 7	2. 8	5. 10	2. 10	3. 0	7 p 1	2 p 3	2 p 6	4 p 10	0 p 6	3 p 2
XI & XVIII	6. 5	1. 2	3. 2	6. 4	1. 6	2. 9	6. 1	2. 2	2. 4	6. 2	1. 8	2. 0	6. 10	0. 6	2. 6
VIII & XV	7. 1	0. 6	3. 3	6. 10	0. 8	2. 11	6. 9	1. 0	2. 6	6. 8	1. 2	1. 9	7. 0	0. 6	1. 6
V & XII	7. 1	0. 3	3. 3	6. 11	0. 5	3. 0	6. 10	0. 6	2. 8	6. 10	0. 9	1. 9	7. 0	0. 6	1. 1
II & IX	7. 2	0. 2	3. 4	7. 0	0. 3	3. 1	6. 11	0. 2	2. 9	7. 0	0. 6	2. 0	7. 1	0. 5	1. 1
X & VI	7. 2	0. 1	3. 4	7. 1	0. 2	3. 1	7. 0	0. 1	2. 10	7. 1	0. 3	2. 2	7. 2	0. 3	1. 1
I & III	7. 2	0. 0	3. 4	7. 2	0. 1	3. 2	7. 1	0. 0	2. 10	7. 2	0. 1	2. 3	7. 2	0. 1	1. 0
I & o	7. 2	0. 0	3. 4	7. 2	0. 0	3. 2	7. 2	0. 0	2. 11	7. 2	0. 0	2. 4	7. 2	0. 0	1. 0
o & 3	6. 2	0. 0	2. 10	6. 2	0. 0	2. 9	6. 2	0. 0	2. 6	6. 2	0. 0	2. 0	6. 2	0. 0	0. 10
3 & 6	7. 2	0. 0	3. 4	7. 2	0. 1	3. 2	7. 2	0. 0	2. 10	7. 2	0. 1	2. 4	7. 2	0. 1	1. 0
6 & 9	7. 2	0. 0	3. 4	7. 1	0. 2	3. 1	7. 1	0. 1	2. 10	7. 1	0. 3	2. 3	7. 2	0. 1	1. 1
9 & 12	7. 2	0. 0	3. 4	7. 0	0. 3	3. 0	7. 0	0. 2	2. 9	7. 1	0. 4	2. 3	7. 1	0. 2	1. 2
12 & 15	7. 1	0. 1	3. 3	7. 0	0. 3	3. 0	6. 11	0. 3	2. 8	7. 0	0. 6	2. 2	7. 1	0. 2	1. 3
15 & 18	7. 1	0. 1	3. 3	6. 11	0. 4	3. 0	6. 10	0. 6	2. 7	6. 10	0. 8	1. 9	7. 0	0. 3	1. 5
18 & 21	7. 0	0. 2	3. 3	6. 10	0. 6	3. 0	6. 9	0. 10	2. 5	6. 8	1. 0	1. 6	7. 1	0. 3	1. 7
21 & 24	7. 0	0. 4	3. 2	6. 8	0. 9	2. 11	6. 8	1. 2	2. 4	6. 10	0. 10	2. 0	7. 2	0. 2	1. 10
24 & 27	6. 11	0. 8	3. 2	6. 6	1. 2	2. 11	6. 7	1. 2	2. 4	6. 10	0. 8	2. 6	7 2	0. 2	2. 7
27 & 30	6. 7	1. 4	2. 7	6. 2	2. 0	2. 6	6. 7	1. 2	2. 7	6. 10	0. 6	2. 10	7. 2	0. 1	3. 0
30 & 33	5. 10	3. 0	2. 5	6. 0	2. 8	2. 5	6. 10	1. 2	2. 11	7. 1	0. 4	3. 2	7. 2	0. 0	3. 4
3 & Etambot.	2. 6	5. 2	2. 10	3. 2	1. 10	3. 0	3. 4	0. 6	3. 3	2. 8	0. 1	3. 5	2. 8	0. 0	3. 5

II. TABLE des Valeurs des Produits Fg & fg.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau.									
	1e. & 2e.		2e. & 3e.		3e. & 4e.		4e. & 5e.		5e. & Quille.	
	Fg	*fg*	*Fg*	*fg*	*Fg*	*fg*	*Fg*	*fg*	*Fg*	*fg*
Étrave & XXVII	4. 9	5. 2								
XXVII & XXIV	13. 10	16. 5	13. 4	16. 5	19. 2	6. 4				
XXIV & XXI	18. 3	9. 3	15. 1	9. 7	17. 6	8. 6	17. 8	5. 7	15. 4	1. 7
XXI & XVIII	20. 4	3. 8	17. 5	4. 2	14. 2	5. 1	12. 4	3. 4	17. 1	1. 3
XVIII & XV	23. 0	1. 7	19. 3	2. 0	16. 10	2. 6	11. 8	2. 1	10. 6	0. 9
XV & XII	23. 0	0. 10	20. 9	1. 3	18. 3	1. 3	12. 0	1. 4	7. 7	0. 7
XII & IX	23. 11	0. 7	21. 7	0. 9	19. 0	0. 6	14. 0	1. 0	7. 7	0. 5
IX & VI	23. 11	0. 3	22. 6	0. 6	19. 10	0. 3	15. 4	0. 7	7. 4	0. 3
VI & III	23. 11	0. 0	22. 8	0. 3	20. 1	0. 6	16. 2	0. 2	7. 2	0. 1
III & o	23. 11	0. 0	22. 8	0. 0	20. 11	0. 0	16. 9	0. 0	7. 2	0. 0
o & 3	17. 6	0. 0	16. 11	0. 0	15. 5	0. 0	12. 4	0. 0	5. 2	0. 0
3 & 6	23. 11	0. 0	22. 8	0. 0	20. 4	0. 0	16. 9	0. 2	7. 2	0. 1
6 & 9	23. 11	0. 0	22. 6	0. 6	20. 1	0. 3	15. 11	0. 7	7. 9	0. 1
9 & 12	23. 4	0. 0	21. 0	0. 9	19. 3	0. 6	15. 11	0. 9	8. 3	0. 2
12 & 15	23. 0	0. 3	21. 0	0. 9	18. 5	0. 8	15. 2	1. 1	8. 10	0. 3
15 & 18	23. 0	0. 3	20. 9	1. 0	17. 8	1. 4	12. 0	1. 2	9. 11	0. 4
18 & 21	22. 9	0. 6	20. 6	1. 6	16. 4	2. 0	10. 0	1. 6	11. 3	0. 4
21 & 24	22. 2	1. 1	19. 5	2. 2	15. 7	2. 9	13. 8	1. 8	12. 10	0. 4
24 & 57	21. 11	2. 1	19. 0	3. 4	15. 4	2. 9	17. 1	1. 8	18. 6	0. 5
27 & 30	17. 0	3. 4	15. 5	5. 0	17. 0	3. 0	19. 4	1. 5	21. 6	0. 3
30 & 33	14. 1	7. 3	14. 6	6. 5	19. 11	3. 4	22. 5	1. 1	23. 11	0. 0
& l'Etambot.	7. 1	14. 7	0. 6	5. 6	20. 10	1. 8	6. 1	9. 3	9. 1	0. 0
mmes.	433. 6	07. 6	460. 5	61. 10	361. 11	42. 8	295. 8	25. 5	223. 11	7. 2

La somme 4494 est la valeur de $\int FgD^{\frac{1}{2}}$, & celle 476 est la valeur de $\int fgD^{\frac{1}{2}}$, par conséquent la Résistance latérale sera $= \frac{1}{2}mu\int FgD^{\frac{1}{2}} = 2247\,mu$, & la Résistance à la proue $= \frac{1}{2}mu\int fgD^{\frac{1}{2}} = 238\,mu$.

(181.) Il est nécessaire d'ajouter à ces Résistances celles qui sont produites par le bordage, la quille, l'étambot, l'étrave, le taille-mer & le gouvernail, que nous n'avons pas comprises dans le calcul. Les bordages augmentent la largeur du Vaisseau de toute leur épaisseur, le côté du Navire conservant la même inclinaison à l'égard des couples: donc, dans la formule de la Résistance de proue $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}a\sin\theta$, la quantité c augmente dans la même proportion que la largeur, & par conséquent le total de la Résistance 238 *mu* doit aussi augmenter dans la même proportion. Or, la largeur du Vaisseau que nous avons pris pour exemple est de 42 pieds; & nous pouvons mettre un pied pour l'augmentation qui provient du bordage, attendu que les bordages les plus épais sont de 8 pouces, & les plus minces de 4; ainsi l'épaisseur moyenne est de 6 pouces, ce qui donne 12 pouces pour les deux côtés: donc l'augmentation de la Résistance de la proue sera de $\frac{1}{42}$, ou de $5\frac{2}{3}$. La quantité $D^{\frac{1}{2}}a$ augmentera aussi, parce que les bordages les plus proches de la quille, dont l'épaisseur est de 4 pouces, augmentent la profondeur du Navire de cette quantité: la premiere profondeur étoit de $5.3\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$; donc à la place de $\frac{35}{2}$, que nous avions auparavant, nous aurons, à cause du bordage, $\frac{35}{2} + \frac{1}{3}$, & $D^{\frac{1}{2}}a$ variera dans la raison de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ à $\left(\frac{35}{2} + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ *, ou dans celle de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ à $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}$: c'est-à-dire, dans la raison de 35 à 36; par conséquent l'augmentation sera de $\frac{1}{35}$, ou de $6\frac{4}{5}$. La quille, l'étambot, & l'étrave, ne donnent pas d'augmentation dans la Résistance de la proue. Nous pouvons considérer l'extrémité vers l'arriere du gouvernail, comme un rectangle vertical, dont la largeur soit de un pied, épaisseur moyenne du gouvernail, & dont la hauteur soit les 21 pieds dont le gouvernail est submergé dans l'eau; & prenant ensuite une quantité analogue à la proue pour le taille-mer, la Résistance produite par ces deux causes, sera (*Tome I*, 642.) exprimée par $\frac{2}{3}mba^{\frac{3}{2}}u$, en supposant que b exprime la largeur, & a la profondeur du rec-

* Car a est considéré ici comme une différencielle de D, ainsi $D^{\frac{1}{2}}a$ peut s'écrire sous cette forme $D^{\frac{1}{2}}dD$, dont l'intégrale $= \frac{2}{3}D^{\frac{3}{2}}$; or cette quantité varie dans la raison de $D^{\frac{3}{2}}$.

tangle; ce qui revient à $\frac{1}{3} mu\,(21)^{\frac{3}{2}} = 32\ mu$, à très-peu près. PLANC. 31
Les trois nouvelles Résistances sont à peu près $44\,mu$; donc en les ajoutant à celle $238\,mu$, on aura la Résistance totale à la proue $= 282\ mu$.

(182.) Les bordages, dont le corps du Navire est revêtu, n'augmentent pas sensiblement la valeur de c, dans la formule $\frac{1}{2} mcu\,D^{\frac{1}{2}} a \sin\theta$, pour ce qui concerne la résistance latérale; on peut même dire que l'angle θ diminue, à cause que les bordages des parties supérieures ont plus d'épaisseur que ceux des parties inférieures; mais les deux altérations qui peuvent résulter de cette cause, sont absolument négligeables. La quantité $D^{\frac{1}{2}} a$ augmente ici dans la même raison que ci-dessus, c'est-à-dire, de $\frac{1}{35}$: donc l'augmentation sera de $\frac{2247}{35} = 64\frac{1}{5}$. La quille, la contre-quille, & la fausse quille, peuvent se considérer comme un rectangle vertical dont les côtés horisontaux sont également distants de la superficie de l'eau; sa hauteur est de 2 pieds, sa longueur de 130, & la distance de son centre à la superficie de l'eau de 18 pieds $\frac{1}{2} = \frac{37}{2}$ pieds : sa Résistance sera donc $= \frac{1}{2} mubaD^{\frac{1}{2}}$ (*Tome I*, 670.) $= \frac{1}{2} mu \,.\, 130 \,.\, 2\,\left(\frac{37}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 560\frac{1}{6}\,mu$. L'étambot & le gouvernail joints ensemble, peuvent être considérés comme un trapese vertical tel que $ACEB$: supposant donc $AC = BF = a$, $AB = CF = e$, $FE = f$, & $AG = x$, on aura $GH = e + \frac{fx}{a}$: substituant cette quantité à la place de c, x à la place de D, & dx à la place de a, dans la formule $\frac{1}{2} mucD^{\frac{1}{2}} a$, la Résistance qu'éprouvera une différencielle du trapese sera $= \frac{1}{2} mu \left(e + \frac{fx}{a}\right) x^{\frac{1}{2}} dx$; quantité dont l'intégrale est $= \frac{1}{2} mu \left(\frac{2}{3} ex^{\frac{3}{2}} + \frac{2fx^{\frac{5}{2}}}{5a}\right)$; laquelle, en faisant $x = a$, deviendra $= \frac{1}{2} mua^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} e + \frac{2}{5} f\right)$, & exprimera la Résistance totale. Faisons maintenant $e = 3$, & $f = 5$ qui sont les valeurs que peuvent avoir ces quantités dans le Vaisseau qui nous sert d'exemple, la Résistance latérale qui provient de l'étambot & du gouvernail, sera $= 2mua^{\frac{3}{2}}$, ou $= 194\,mu$, en faisant $a = 21$. Le taille-mer & l'étrave peuvent être considérés comme un trapese, dont la largeur à la ligne de flottaison est de 6 pieds, & de 4 pieds dans l'endroit le plus bas; ce qui donne $e = 6$, & $f = -2$, quantité négative : & la profondeur étant de 19 pieds, en substituant ces quantités dans la formule, la Résistance du taille-mer & de l'étrave sera $= \ldots$

FIG. 38

Planc. I. $\frac{1}{4}mu\left(\frac{2.6}{3}-\frac{2.2}{5}\right)(19)^{\frac{3}{2}} = 132\frac{1}{6}mu$. Les quatre nouvelles Réſiſtances ſont enſemble $951\frac{1}{7}mu$, ou ſimplement $951\,mu$; donc en les ajoutant à $2247\,mu$, la ſomme des Réſiſtances latérales ſera $= 3198\,mu$.

(183.) Ces Réſiſtances ſont celles qu'éprouve le Vaiſſeau, la vîteſſe u étant très-petite, mais ce n'eſt pas la même choſe toutes les fois qu'elle devient un peu conſidérable; car, dans ce cas, il faut auſſi conſidérer la Réſiſtance qui réſulte de la dénivellation du fluide, comme nous l'avons dit (*Tome I*, *Liv. II*, *Chap. V*, *Art.* 638, & *ſuiv.*). Cette Réſiſtance ſur un des petits quadrilateres eſt (*Tome I*, 672.) $= \frac{mu^4 c \text{ ſin } \theta^4}{6(64)^2} =$ (*Tome I*, 584.) $\frac{mu^4 c \text{ ſin } \lambda^4 . \text{ ſin } n^4}{6(64)^2}$: & pour la ſomme des petits quadrilateres $= \frac{mu^4}{6(64)^2} \int c \text{ ſin} \lambda^4 . \text{ ſin } n^4$. Donc, pour avoir cette Réſiſtance, nous n'avons qu'à calculer la ſomme de toutes les quantités $c \text{ ſin } \lambda^4 . \text{ ſin } n^4$. Pour y parvenir, il eſt néceſſaire d'obſerver que les petits quadrilateres auxquels parvient la dénivellation à la proue, ſont au-deſſus de la ſuperficie de l'eau, & à la hauteur de un, deux, ou même de trois pieds, lorſqu'elle eſt la plus conſidérable; & qu'à la poupe ils ſont au-deſſous de la même ſuperficie, à l'endroit où ſe forme la cavité, ou le creux de la dénivellation. Ceci poſé, ſoit tracé dans le plan horiſontal du Navire, une ligne d'eau qui s'éleve à la proue d'un pied au-deſſus de la ſurface de l'eau, & qui s'abaiſſe à la poupe de la même quantité, au-deſſous de la même ſurface; & ſuppoſons que cette ligne paſſe par le centre des petits quadrilateres choqués; ce qui ne conduit à aucune erreur, quoique dans la réalité cette ſuppoſition ne ſoit pas rigoureuſement exacte, parce que nous n'en ferons uſage que pour calculer les valeurs de λ & n, leſquelles ne varient pas ſenſiblement par la ſuppoſition d'un pied de plus, ou de moins, dans
Fig. 34. la hauteur de cette ligne d'eau. Que DB ſoit cette ligne, AB, HD deux couples, & AC la premiere ligne d'eau; ſoit mené BH parallele à la quille, & ſoit abaiſſé les perpendiculaires HF, FG, GI, IK, FL, LM, & MN: cela fait, pour ce qui concerne la Réſiſtance de la proue $HD = c$, & l'angle $HBD = FHD = \lambda$; ainſi, l'on aura $FD = c \text{ ſin } \lambda$; par la même raiſon $GD = c \text{ ſin } \lambda^2$, $ID = c \text{ ſin } \lambda^3$, & $KD = c \text{ ſin } \lambda^4$, que nous appellerons f. Pareillement, pour ce qui concerne la Réſiſtance latérale, puiſque $BH = c$, & l'angle $BDH = BHF = \lambda$, on aura $FB = c \text{ ſin } \lambda$, $BL = c \text{ ſin} \lambda^2$, $BM = c \text{ ſin } \lambda^3$, $BN = c \text{ ſin } \lambda^4$, que nous appellerons F. Du point E qui diviſe la ligne BD en deux parties égales, ſoit élevé la perpendiculaire ET; ſoit fait $EO = 1$ pied, ſoit mené OT, & ſoit

abaiſſé les perpendiculaires *EP*, *PQ*, *QR* & *RS* : par cette conſtruction, on voit que l'angle *OTE* étant $= OEP = n$, on aura $OP = \mathit{ſin}\ n$, $QO = \mathit{ſin}\ n^2$, $OR = \mathit{ſin}\ n^3$, & $OS = \mathit{ſin}\ n^4$, que nous appellerons *g* : ſubſtituant ces valeurs de $c\ \mathit{ſin}\ \lambda^4$, & de $\mathit{ſin}\ n^4$ dans la formule $\frac{mu^4 c\ \mathit{ſin}\ \lambda^4 . \mathit{ſin}\ n^4}{6(64)^2}$, elle deviendra $\frac{mu^4 fg}{6(64)^2}$, pour ce qui concerne la Réſiſtance de proue, & $\frac{mu^4 Fg}{6(64)^2}$ pour la Réſiſtance latérale. Traçant donc un ſemblable ſyſtême de lignes dans chacun des petits quadrilateres qui éprouvent l'effet de la dénivellation, on trouvera toutes les valeurs de *F*, *f* & *g*, ainſi que les produits *fg* & *Fg*, dont la ſomme ſera $\int fg = \int c\ \mathit{ſin}\ \lambda^4 . \mathit{ſin}\ n^4$, & $\int Fg = \int c\ \mathit{ſin}\ \lambda^4 . \mathit{ſin}\ n^4$; & ces ſommes étant multipliées par $\frac{mu^4}{6(64)^2}$, donneront les Réſiſtances qui proviennent de la dénivellation.

(184.) La Table ſuivante exprime les valeurs des quantités ci-deſſus, pour le Vaiſſeau de 60 canons, qui a 42 pieds de largeur, lequel nous a toujours ſervi d'exemple.

Entre les Couples.	Valeurs de			Produits.	
	F	*f*	*g*	*Fg*	*fg*
	P. p	P. p	P. p		
Etrave & XXVII	0. 2	4. 3	0.10	$\frac{5}{36}$	$\frac{85}{24}$
XXVII & XXIV	1. 8	1. 0	0. 8	$\frac{10}{9}$	$\frac{2}{3}$
XXIV & XXI	4. 8	0. 8	0. 9	$\frac{42}{12}$	$\frac{1}{2}$
XXI & XVIII	6. 2	0. 1	0.10	$\frac{185}{36}$	$\frac{5}{72}$
XVIII & XV	7. 0	0. 0	1. 0	$\frac{7}{1}$	0
21 & 24	7. 0	0. 1	1. 0	$\frac{7}{1}$	$\frac{1}{12}$
24 & 27	6. 2	0. 3	0.11	$\frac{407}{72}$	$\frac{11}{48}$
27 & 30	5. 2	0. 5	0. 7	$\frac{217}{72}$	$\frac{35}{144}$
30 & 33	2. 6	0. 7	0. 5	$\frac{25}{24}$	$\frac{35}{144}$
33 & Etambot.	0. 6	2 10	0.11	$\frac{11}{24}$	$\frac{187}{72}$
	Sommes . . .			$31\frac{1}{3}$ *	$8\frac{1}{6}$.

Ces ſommes n'appartiennent qu'à un ſeul côté du Vaiſſeau; ainſi il faut les doubler, & l'on aura $62\frac{2}{3}$ & $16\frac{1}{3}$, pour les ſommes

* Voyez la Note de l'*Article* 179.

correſpondantes aux petits quadrilateres de l'un & de l'autre côté du Navire, exprimés dans la Table. Tous ceux qui ſont compris depuis le couple *XV* de la proue juſqu'au couple 21 de la poupe, donnent tous les produits $fg = 0$, & ceux $Fg = 7\frac{1}{6}$, à l'exception de celui qui eſt voiſin du maître couple, qui donne $6\frac{5}{6}$; la ſomme de ceux-ci eſt $= 170$, laquelle ajoutée avec les $62\frac{2}{3}$ que la Table a fournis, donnera la ſomme complette de tous les produits $Fg = 232\frac{2}{3}$: la Réſiſtance latérale ſera donc $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 232\frac{2}{3} = 38\frac{7}{9} \cdot \frac{(mu^4)}{(64)^2}$: & celle de proue à poupe $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 16\frac{1}{3} = 2\frac{13}{18} \cdot \frac{mu^4}{(64)^2}$. Il eſt encore néceſſaire d'ajouter à ces Réſiſtances celles qui proviennent du gouvernail, de l'étambot, de l'étrave & du taille-mer; ces différents objets donnent enſemble, pour l'action latérale, $Fg = 11\frac{1}{3}$, & pour l'action directe $fg = 1\frac{2}{3}$: d'où nous tirerons $\frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 245 = 40\frac{5}{6} \cdot \frac{mu^4}{(64)^2}$, ou $= \frac{41 mu^4}{(64)^2}$, pour l'expreſſion complette des Réſiſtances latérales qui proviennent de la dénivellation, & $= \frac{mu^4}{6.(64)^2} \cdot 18 = \frac{3\,mu^4}{(64)^2}$, pour celle des Réſiſtances directes.

(185.) Ces Réſiſtances étant jointes avec les autres que nous avons trouvées précédemment, on aura la ſomme des Réſiſtances latérales qu'éprouve le Vaiſſeau $= \frac{41\,mu^4}{(64)^2} + 3198\,mu$, & la ſomme des Réſiſtances directes $= \frac{3mu^4}{(64)^2} + 282\,mu$.

(186.) Ayant trouvé les Réſiſtances pour une diſpoſition du Vaiſſeau, on peut les trouver pour toute autre, dans laquelle il feroit plus ou moins ſubmergé dans le fluide. Dans la formule $\frac{1}{4}mcuD^{\frac{1}{2}}\,a\,\text{ſin}\,\lambda . \text{ſin}\,\eta$ de la Réſiſtance qu'éprouvent les petits quadrilateres, il n'y a, dans ce cas, que le produit $D^{\frac{1}{2}}\,a$, qui augmente, ou diminue, les quantités $c\,\text{ſin}\,\lambda$, & $\text{ſin}\,\eta$, conſervant la même valeur : mais a ſuivant la même raiſon que D, on aura l'augmentation, ou la diminution, dans la raiſon de $D^{\frac{3}{2}}$ (*Voyez la Note de l'Art.* 181.); & comme cette loi eſt générale pour tous les quadrilateres, il s'enſuit que la ſomme des Réſiſtances ſera également comme $D^{\frac{3}{2}}$. On doit entendre la même choſe pour la Réſiſtance qui provient de l'étambot, du taille-mer & du gouvernail; mais, comme la hauteur de la quille, qui eſt repréſentée par a, n'augmente pas, l'augmentation, ou la diminution, de ſa Réſiſtance, ſera ſimplement comme $D^{\frac{1}{2}}$. Dans la formule $\frac{mu^4 c\,\text{ſin}\,\lambda^4 . \text{ſin}\,\eta^4}{6.(64)^2}$,

qui

qui exprime les résistances provenantes de la dénivellation, toutes les quantités demeurent sensiblement constantes, & par conséquent ne reçoivent aucune altération sensible de ce que la profondeur, à laquelle le Vaisseau est submergé, augmenteroit, ou diminiroit, d'une petite quantité : il s'ensuit donc qu'il n'y a que les valeurs $3198mu$ & $282mu$ qui éprouvent une variation; c'est-à-dire, que les quantités $2638mu$, & $273\frac{1}{2}mu$, augmentent, ou diminuent, dans la raison de $D^{\frac{3}{2}}$, & les quantités $560mu$, & $8\frac{1}{2}mu$, qui correspondent à la Résistance de la quille, varient seulement dans la raison de $D^{\frac{1}{2}}$.

(187.) Nous trouvons, pour le Vaisseau qui nous sert d'exemple, (181.), $D = \frac{35}{2} + \frac{1}{3} = \frac{107}{6}$; supposant que n soit la quantité dont il doit être plus ou moins submergé dans le fluide, les augmentations, ou diminutions, des résistances seront dans la raison de $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ à $\left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{3}{2}}$; & dans celle de $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$ à $\left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{1}{2}}$ ou, ce qui est la même chose, les augmentations, ou diminutions effectives seront $\frac{1}{12}n(2638)mu$; $\frac{1}{12}n(273\frac{1}{2})mu$; $\frac{1}{36}n(560)mu$; & $\frac{1}{36}n(8\frac{1}{2})mu$ *. Supposant donc, comme dans l'*Art.* 141, que le Vaisseau soit enfoncé de 6 pouces de plus, ou que n soit $= \frac{1}{2}$, la premiere augmentation sera $= 110\,mu$: la seconde $= 11\frac{1}{12}mu$: la troisieme $= 7\frac{7}{9}mu$: & la quatrieme $= \frac{17}{144}mu$; c'est-à-dire que l'augmentation de la Résistance latérale sera de $117\frac{7}{9}\,mu$, & celle de la proue de $11\,\frac{29}{144}mu$: donc la Résistance latérale, le Vaisseau étant calé de 6 pouces de plus, ou étant dans la disposition où il naviguoit, sera de $\frac{41mu^4}{(64)^2} + 3316mu$; & celle de la proue de $\frac{3mu^4}{(64)^2} + 294mu$.

(188.) Ayant une fois trouvé les Résistances qu'éprouve un Vaisseau, on peut trouver, avec facilité, celles qu'éprouve un autre Vaisseau dont les fonds sont semblables à ceux du premier. Dans la formule

---

* Car en nommant R les quantités qui répondent à l'état primitif du Vaisseau, & A l'augmentation, ou la diminution, qui résulte de ce qu'il est plus ou moins calé de la quantité n, alors $R \pm A$ sera l'expression des mêmes quantités pour le nouvel état du Vaisseau; & l'on aura, pour celles qui suivent la raison de $D^{\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{3}{2}} :: R . R \pm A$; ou, $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{3}{2}n\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{1}{2}} :: R : R \pm A$, ou enfin, $\frac{107}{6} : \frac{107}{6} \pm \frac{3}{2}n :: R : R \pm A$; d'où l'on tire, $\frac{107}{6} : \pm \frac{3}{2}n$, ou, $1 : \pm \frac{1}{12}n :: R : \pm A = \pm \frac{1}{12}nR$. Donc $A = \frac{1}{12}nR$.

Les secondes quantités, qui répondent à la quille, augmentant ou diminuant comme $D^{\frac{1}{2}}$, on aura $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{107}{6} \pm n\right)^{\frac{1}{2}} :: R : R \pm A$, d'où l'on tirera, en opérant d'une maniere analogue, $1 : \pm \frac{1}{36}n :: R : + A = \pm \frac{1}{12}n R$: donc $A = \frac{1}{36}nR$.

$\frac{1}{4}mcuD^{\frac{1}{2}}a \sin\lambda.\sin\nu$ des Résistances horisontales qu'éprouvent les petits quadrilateres, les angles λ & ν ne varient point, puisqu'on suppose que les fonds des Vaisseaux sont semblables ; il n'y a donc que les quantités c, a, & D qui varient, & ces quantités sont comme les dimensions linéaires des carenes, ou comme les largeurs. Les produits $caD^{\frac{1}{2}}$, seront donc comme les cinquiemes puissances des racines quarrées des largeurs *: & si nous nommons m la largeur du Vaisseau dont la Résistance est connue, M celle du Navire pour lequel on veut la trouver, & r la Résistance trouvée pour le premier, on aura $\frac{M^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}}}r$ pour la Résistance qu'éprouve le second: c'est-à-dire, pour celle qui ne dépend point de la dénivellation. Quant à la Résistance produite par la dénivellation, c'est de la formule $\frac{mu^4 c \sin\lambda.\sin\nu^4}{6(64)^2}$ qu'il faut se servir, & dans cette expression il n'y a que la valeur de c qui varie, & cette valeur est comme la largeur: donc cette Résistance sera $= \frac{M}{m}r$: en supposant maintenant que r exprime la Résistance que la dénivellation fait éprouver au premier Vaisseau.

(189.) Le calcul se borneroit à ces deux seules opérations, si les deux Vaisseaux devoient naviguer, étant calés proportionnellement, c'est-à-dire, s'ils étoient enfoncés dans le fluide à des profondeurs proportionnelles ; mais ces profondeurs peuvent s'éloigner de quelques pouces de cette proportion, par les raisons que nous avons déjà exposées dans *l'Art.* 144. On peut calculer le résultat de cette variation, comme nous l'avons fait ci-devant, quand nous avons supposé que le Vaisseau de 60 canons devoit naviguer étant calé de 6 pouces de plus ; mais comme on a déjà calculé les augmentations, ou diminutions, $\frac{1}{12}nmu\,(2638.)$, $\frac{1}{12}nmu\,(273\frac{1}{2})$, $\frac{1}{36}nmu\,(560)$, & $\frac{1}{12}nmu\,(8\frac{1}{2})$, qui ont lieu dans les Résistances qu'éprouve ce Vaisseau, pour être plus ou moins calé de la quantité n, il sera mieux de trouver d'abord la Résistance qu'éprouvera ce même Navire ; en le supposant calé en proportion de ce que doit l'être l'autre ; & appellant ensuite r cette nouvelle Résistance, celles du second Navire seront $= \frac{M^{\frac{5}{2}}r}{m^{\frac{5}{2}}}$, & $\frac{Mr}{m}$. Les deux quantités $\frac{1}{12}nmu\,(2638.)$, & $\frac{1}{36}nmu\,(560.)$, qui appartiennent à la Résistance latérale, peuvent être réunies en une seule, pour simplifier le calcul, & cette somme sera $= \frac{1}{12}nmu\,(4237.)$: il en est de même des deux autres $\frac{1}{12}nmu\,(273\frac{1}{2})$

* Car les quantités c, a & D étant comme la largeur qu'on suppose $= m$, le produit $aD^{\frac{1}{2}}$ sera comme $m^2 m^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}\cdot 5}$.

& $\frac{1}{36}nmu(8\frac{1}{4})$, qui appartiennent à la Résistance de proue, & dont la somme est $= \frac{1}{36}nmu(829.)$: la Résistance qui provient de la dénivellation ne reçoit aucune altération, comme nous l'avons déjà dit.

(190.) Nous avons trouvé, dans l'*Art.* 145, que m étant la largeur, v le volume submergé, & a l'aire, ou la section horisontale faite à la superficie du fluide, dans le premier Navire, c'est-à-dire, son plan de flottaison ; & M étant la largeur, & V le volume du second ; nous avons trouvé, dis-je, que la formule $\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}$ exprimoit la quantité dont le premier Navire doit être, plus ou moins, calé, pour qu'il soit dans une disposition semblable à celle du second ; quantité que nous avons tout-à-l'heure exprimée par n. Substituant donc cette expression à la place de n, dans celles des augmentations, ou des diminutions, des résistances, elles deviendront $\frac{1}{18}mu\,(4237)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, & .... $\frac{1}{36}mu\,(829)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: par conséquent la Résistance latérale pour le Vaisseau de 60 canons, supposé dans une disposition semblable à celle de l'autre, je veux dire celle qui ne provient pas de la dénivellation, sera $= 3316\,mu - \frac{1}{18}mu\,(4237)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, & celle de proue $= 294\,mu - \frac{1}{36}mu\,(829)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$. Ainsi la Résistance latérale totale qu'il éprouvera dans cette disposition, sera = ... $\frac{41mu^4}{(64)^2} + 3316\,mu - \frac{1}{18}mu\,(4237)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, & celle de proue = $\frac{3mu}{(64)^2} + 294\,mu - \frac{1}{36}mu\,(829)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: d'où il résulte que les Résistances qu'éprouvera le second Vaisseau, seront = ... $\frac{41\,mu^4M}{(64)^2m} + \frac{3316\,muM^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{muM^{\frac{1}{2}}}{18m^{\frac{1}{2}}}\,(4237)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$, & $= \frac{3mu^4M}{(64)^2m} + \frac{294\,muM^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{muM^{\frac{1}{2}}}{36\,m^{\frac{1}{2}}}\,(829.)\left(\frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)$: ou parce que, dans le Vaisseau de 60 canons, on a $m = 42$, $v = 68650$, & $a = 5500$, la Résistance latérale sera $= \frac{41mu^4M}{(64)^242} + \frac{3316muM^{\frac{1}{2}}}{(42)^{\frac{1}{2}}} - \frac{muM^{\frac{1}{2}}}{18(42)^{\frac{1}{2}}}(4237)\left(\frac{68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V}{5500}\right)$,

& celle de proue $= \frac{3mu^4 M}{(64)^2 42} + \frac{294\, mu M^{\frac{1}{2}}}{(42)^{\frac{1}{2}}} - \frac{mu M^{\frac{1}{2}}}{36(42)^{\frac{1}{2}}} (829) \left(\frac{68650 - \frac{(42)^3}{M^3} V}{5500} \right)$

(191.) Dans le Vaiſſeau de 70 canons, nous aurons $M = 48$, & $V = 96500$: donc en ſubſtituant ces valeurs dans les expreſſions que nous venons de déterminer, les Réſiſtances latérales qu'éprouvera ce Vaiſſeau ſeront $= \frac{47mu^4}{(64)^2} + 4631\, mu - 240 mu = \frac{47mu^4}{(64)^2} + 4391\, mu$; & celles de proue $= \frac{24mu^4}{7(64)^2} + 410 mu - 23 mu = \frac{24mu^4}{7(64)^2} + 387\, mu$.

(192.) Pour la Frégate de 22 canons, on a $M = 32$, & $V = 25170$, par conſéquent la Réſiſtance latérale ſera $= \frac{31\frac{1}{21} mu^4}{(64)^2} + 1680\, mu - 254\, mu = \frac{31\frac{1}{21} mu^4}{(64)^2} + 1426\, mu$; & celle de proue $= \frac{2\frac{2}{7} mu^4}{(64)^2} + 149 mu - 25\, mu = \frac{2\frac{2}{7} mu^4}{(64)^2} + 124 mu$.

(193.) Pour le Vaiſſeau à trois ponts, on a $M = 51$, & $V = 128293$: partant, la Réſiſtance latérale, ſera $= \frac{49\frac{11}{14} mu^4}{(64)^2} + 5388 mu + 209 mu = \frac{49\frac{11}{14} mu^4}{(64)^2} + 5597\, mu$; & celles de proue $= \frac{3\frac{9}{14} mu^4}{(64)^2} + 478\, mu + 20\frac{1}{2}\, mu = \frac{3\frac{9}{14} mu^4}{(64)^2} + 498\frac{1}{4}\, mu$.

(194) On peut encore faciliter beaucoup ces déterminations, en faiſant attention que la Réſiſtance qui naît de la dénivellation eſt négligeable, lorſque la vîteſſe u eſt petite, particuliérement dans les grands Navires, où elle n'arrive à avoir une valeur digne d'attention, que dans des vîteſſes tellement grandes qu'on ne les obſerve jamais dans la pratique. Car les Navires étant ſuppoſés calés dans le fluide proportionnellement à leurs dimenſions linéaires, la formule qui exprime la Réſiſtance de proue, eſt $= \frac{3mu^4 M}{(64)^2 42} + \ldots \frac{294 mu M^{\frac{1}{2}}}{(42)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3muM}{42} \left(\frac{u^3}{(16)^3} + \frac{98 M^{\frac{1}{2}}}{(42)^{\frac{1}{2}}} \right)$; attendu que la derniere partie de la formule s'évanouit; & dans cette expreſſion la quantité $\frac{u^3}{(16)^3}$ qui vient de la dénivellation, eſt négligeable à l'égard de $\frac{98 M^{\frac{1}{2}}}{(42)^{\frac{1}{2}}}$, principalement lorſque M eſt grande, & u petite. Dans le Vaiſſeau de 60 canons, M eſt $= 42$: & ſi l'on ſuppoſe $u = 16$, la premiere de ces quantités ſera $= 1$, & la ſeconde $= 98$: or, la vîteſſe 16 étant des plus grandes que puiſſe prendre ce Vaiſſeau, on voit que même dans le cas où la vîteſſe eſt auſſi grande qu'on

puisse raisonnablement la supposer, la quantité qui provient de la dénivellation est susceptible d'être négligée. Dans la Frégate de 22 canons, M est $= 32$, ce qui donne à peu près $\frac{98 M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 66$; d'où l'on voit que u étant $= 16$, la quantité $\frac{u^2}{16^2}$ est encore négligeable. Dans un Paquebot de 21 pieds de largeur, on a $\frac{98 M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 28$, à peu près; de sorte qu'on peut encore, comme on le verra, négliger entiérement la dénivellation dans les calculs dont l'objet est de déterminer la vitesse u; mais il n'en est pas de même pour un Canot, ou une petite Barque; car si nous supposons une petite embarcation de cette espece, ayant 7 pieds de largeur, ou $\frac{M}{42} = \frac{1}{6}$, on aura $\frac{98 M^{\frac{3}{2}}}{(42)^{\frac{3}{2}}} = 6\frac{2}{3}$; quantité qui, comme on le voit, n'est déjà pas excessive à l'égard de l'unité.

(195.) Si la dénivellation est susceptible d'être négligée dans les Résistances de proue, à bien plus forte raison peut-elle l'être dans les Résistances latérales, où la vitesse u est beaucoup plus petite: par conséquent, elles doivent se réduire aux seuls termes qui sont affectés de la simple vitesse u; à moins qu'il ne soit question de Barques très-petites, & de vitesses très-considérables.

CHAPITRE VI.

Des Moments qu'éprouve le Vaisseau dans son mouvement horisontal, à l'égard d'un axe aussi horisontal, & qui constituent ce que les Marins appellent la Qualité de porter la Voile *.

(196.) LES Moments qu'éprouve le Vaisseau, de même que les résistances horisontales, peuvent avoir différentes directions, suivant la disposition qu'on donnera aux voiles, & suivant l'axe sur lequel on suppose que se fait la rotation; mais nous pouvons, comme nous l'avons fait des résistances, les réduire à deux especes; la

---

* En Espagnol, *Aguante de Vela* (*Tome I, page* 33. *Note.*). Cela répond à la *Stabilité*, en étendant ce mot au cas où le Vaisseau est en mouvement; ce que la plus grande partie des Auteurs ont négligé de considérer. Nous nous servirons souvent de cette derniere expression.

PLANC. I. premiere, suivant un axe horisontal tiré de la proue à la poupe, & passant par le centre de gravité; ce sont les moments qui constituent ce que les Marins nomment, avec raison, *la Qualité de porter la Voile;* & la seconde espece, suivant un autre axe aussi horisontal & perpendiculaire au premier. Les premiers moments viennent de la résistance latérale, & les seconds de la résistance suivant la proue: les uns & les autres proviennent de la somme des moments qu'éprouvent les différents quadrilateres, dans lesquels nous avons divisé la surface du corps du Navire, attendu qu'il est si irrégulier, que nous ne pouvons faire usage d'aucune autre méthode pour le soumettre au calcul.

(197.) Les moments qu'éprouve un corps quelconque, qui se meut d'un mouvement horisontal, ont été trouvés (*Tome I*, 846.) $=$ $(PH + \frac{1}{12}m\int e^3c)\sin\Delta + \frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}ydy\sin\theta + \frac{1}{2}mu\int c(k-x)x^{\frac{1}{2}}dx\sin\theta$, on en substituant à la place de $\sin\theta$ sa valeur $\sin\lambda.\sin n$ (*Tome I*, 584.), ils deviendront $(PH + \frac{1}{12}m\int e^3c)\sin\Delta + \frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}ydy\sin\lambda.\sin n + \frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}dx(k-x)\sin\lambda.\sin n$, Δ exprimant l'angle de l'inclinaison du Vaisseau. La valeur de $(H + \frac{m}{12P}\int e^3c)\sin\Delta$, a déjà été trouvée (150.) pour l'expression de la distance du centre de gravité, au nouveau centre de volume; ainsi cette distance étant divisée par $\sin\Delta$, on aura $(H + \frac{m}{12P}\int e^3c) = (H + \frac{1}{12v}\int e^3c)$, distance du centre de gravité au métacentre: appellant K cette distance, on aura $(HP + \frac{1}{12}m\int e^3c)\sin\Delta = KP\sin\Delta = mKv\sin\Delta$, v étant le volume qu'occupe le Vaisseau dans le fluide.

Pour réduire la seconde quantité $\frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}ydy\sin\lambda.\sin n$, on observera que $CD = dy$, & l'angle $BFG = FGH = \lambda$; ainsi l'on aura
FIG. 32. $1 : \sin\lambda :: dy : KL = dy\sin\lambda$; & pareillement $1 : \sin n$, (sinus de NKL) $:: KL = dy\sin\lambda : NL = dy\sin\lambda.\sin n$; quantité que nous appellerons h. Cette dénomination étant substituée dans l'expression ci-dessus, elle se changera en $\frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y$.

La troisieme quantité est (177) $= \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}(k-x)$ *, ayant $f = FI$ pour les Résistances latérales, & $= IG$ pour celles de proue, & g étant $= NM$. Les moments se réduiront donc à $mKv\sin\Delta + \frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}(k-x)$; mais la derniere quantité de cette

* Car $f = c\sin\lambda$, $g = a\sin n = dx\sin n$, puisque $a = dx$: ainsi $fg = cdx\sin\lambda.\sin n$.

expreſſion peut encore avoir la forme ſuivante $\frac{1}{3} muk\int fgx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} mu\int fgx^{\frac{5}{2}}$, ce qui facilite le calcul : car (180.) la quantité $\frac{1}{3} mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$ étant l'expreſſion de toute la Réſiſtance horiſontale qu'éprouve le Vaiſſeau, expreſſion que nous avons déjà trouvée précédemment la quantité $\frac{1}{3} muk\int fgx^{\frac{3}{2}}$ ſera le produit de la même Réſiſtance, par la diſtance k du centre de gravité à la ſuperficie du fluide. Si nous ſuppoſons donc, $\frac{1}{3} mu\int fgx^{\frac{3}{2}} = mur$, les Moments ſeront $= mKv \sin \Delta + \frac{1}{2} mu\int chx^{\frac{1}{2}}y + mukr - \frac{1}{5} mu\int fgx^{\frac{5}{2}}$; $\frac{1}{2} muchx^{\frac{1}{2}}y$ exprimant le moment vertical qu'éprouve chaque paire des petits quadrilateres correſpondants, par rapport au plan vertical qui coïncide avec la quille; & $\frac{1}{5} mufgx^{\frac{5}{2}}$ exprimant le Moment horiſontal qu'ils éprouvent relativement à leur diſtance à la ſuperficie du fluide. Toute l'opération ſe réduit donc à trouver les moments $\frac{1}{2} mu\int chx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{5} mu\int fgx^{\frac{5}{2}}$, puiſque les quantités $mKv \sin \Delta + mukr$ ſont déjà connues.

La quantité $fgx^{\frac{5}{2}}$ eſt le produit $fgx^{\frac{3}{2}}$ que nous avons déjà trouvé (180.) par x, diſtance du centre des Réſiſtances des petits quadrilateres à la ſuperficie du fluide, lequel centre eſt aux $\frac{3}{5}$ de leur hauteur *. Dans le Vaiſſeau de 60 canons, la diſtance entre les lignes d'eau étant $= 3$ pieds $\frac{1}{2}$, les $\frac{3}{5}$ de cette diſtance ſeront $= \frac{21}{10}$: donc on aura pour les quadrilateres compris entre la premiere & la ſeconde, $x = \frac{21}{10}$: pour ceux entre la ſeconde & la troiſieme, $x = \frac{56}{10}$: pour ceux entre la troiſieme & la quatrieme, $x = \frac{91}{10}$; pour ceux entre la quatrieme & la cinquieme, $x = \frac{126}{10}$: enfin, pour ceux entre la cinquieme & la quille, $x = \frac{161}{10}$: par conſéquent, on aura (180.)..

* Cela ſe déduit de l'*Article* 850, *Tome I*, en négligeant le terme relatif à la dénivellation ; mais en voici la démonſtration directe appliquée à une ſurface plane quelconque.

La force qu'éprouve une différencielle horiſontale d'une ſurface plane quelconque, abſtraction faite de la dénivellation, eſt (*Tome I*, 594.) $= \frac{mbdx \sin \alpha}{\sin \alpha} (x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$, (c'eſt l'expreſſion même de l'*Article* cité en mettant dx pour $d\alpha$, afin de conſerver l'analogie avec le cas actuel) ; ainſi la Réſiſtance qu'éprouve cette différencielle $= \frac{mub \sin \alpha . \sin \theta}{2 \sin \alpha} (x^{\frac{1}{2}} dx)$, (*Tome I*, 652, 654, 655, 658 & 670) ; & le Moment de cette Réſiſtance par rapport à la ſuperficie du fluide $= \frac{mub \sin \alpha \sin \theta}{2 \sin \alpha} (x^{\frac{3}{2}} dx)$. Prenant l'intégrale, tant de l'expreſſion de la Réſiſtance que de celle de ſon moment, ces intégrales ſeront $\frac{mub \sin \alpha . \sin \theta}{3 \sin \alpha} x^{\frac{3}{2}}$, & $\frac{mub \sin \alpha . \sin \theta}{5 \sin \alpha} x^{\frac{5}{2}}$. Diviſant la ſomme des Moments par celle des Réſiſtances, on aura $\frac{3}{5} x$ pour la diſtance du centre des Réſiſtances de cette ſurface à la ſuperficie du fluide (*Tome I*, 120 & 850.).

Pour les Moments latéraux.	*Pour les Moments de Proue.*
$Fgx^{\frac{3}{2}}.x = 578 \cdot \frac{21}{10} = 1213,8$	$fgx^{\frac{1}{2}}.x = 90 \cdot \frac{21}{10} = 189,0$
$921 \cdot \frac{56}{10} = 5157,6$	$142 \cdot \frac{56}{10} = 775,2$
$1071 \cdot \frac{91}{10} = 9746,1$	$126 \cdot \frac{91}{10} = 1146,6$
$1035 \cdot \frac{126}{10} = 13041,0$	$89 \cdot \frac{126}{10} = 1121,4$
$889 \cdot \frac{161}{10} = 14312,9$	$29 \cdot \frac{161}{10} = 466,9$
$\int Fgx^{\frac{5}{2}} = \ldots\ldots\ 43471,4$	$\int\int fgx^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots\ 3719,1$

Donc $\frac{1}{2} mu \int Fgx^{\frac{5}{2}} = 21736mu$, & $\frac{1}{2}mu \int\int fgx^{\frac{3}{2}} = 1860mu$.

(198.) Il est nécessaire d'ajouter à ces valeurs l'augmentation qui provient de l'épaisseur des bordages, comme nous l'avons dit, *Art.* 181. Dans $\int\int fgx^{\frac{3}{2}}$ il y a deux quantités ; l'une provenant de c, ou de f, qui est, par *l'Art.* cité, $= \frac{1}{42}$ de $1860 = 44$; & l'autre provenant de $x^{\frac{1}{2}}dx$, ou de $x^{\frac{3}{2}}$, qui augmente dans la raison de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ à $\left(\frac{35}{2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, ou de 35 à $35+\frac{1}{3}$ *; ce qui donne l'augmentation de $\frac{1}{21}$ de $1860 = 89$. Les deux quantités réunies donnent 133. Donc, avec l'augmentation qui résulte de l'épaisseur des bordages, on aura $\frac{1}{2}mu \int\int fgx^{\frac{3}{2}} = 1993mu$. La quantité $\int Fgx^{\frac{5}{2}}$ augmente seulement dans la raison de $x^{\frac{5}{2}}$: donc l'augmentation est de $\frac{1}{21}$ de $21736 = 1035$: par conséquent avec l'augmentation qui résulte de l'épaisseur des bordages, on a $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{5}{2}} = 22771\ mu$.

(199.) On doit aussi ajouter les Moments qu'éprouvent la quille, l'étambot, le gouvernail, l'étrave & le taille-mer. Considérant la face la plus à poupe du gouvernail comme un rectangle vertical, de même que son correspondant dans le taille-mer, ainsi que nous l'avons fait (181.), l'expression de leur Moment de poupe à proue sera $\frac{1}{5}mbux^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}mu\,(21.)^{\frac{5}{2}} = 404mu$; la largeur b du rectangle étant $= 1$, & sa hauteur $x = 21$: par conséquent, en faisant attention à cette quantité, l'expression $\frac{1}{2}mu \int\int fgx^{\frac{3}{2}}$ sera $= 2397mu$. La quille, la contre-quille & la fausse-quille, ont été considérées, dans le même *Art.* 181, comme un rectangle vertical de 2 pieds de hauteur, & de 130 de longueur, submergé à 18 pieds $\frac{1}{2}$ de profondeur, qui maintenant sera

* La fraction $\frac{1}{3}$ est un peu trop forte.

à

à 19 pieds, à cause que le centre des résistances est plus bas que celui de gravité (197, & *Tome I*, 850.) : & ayant trouvé cette résistance $=560\frac{1}{6}mu$, le moment qu'éprouvera la quille sera $=560\frac{1}{6}.19mu = 10643mu$. L'étambot & le gouvernail réunis, ont été supposés former un trapese vertical, & la différencielle de sa résistance a été trouvée $=\frac{1}{2}mu(e+\frac{fx}{a})x^{\frac{1}{2}}dx$; par conséquent la différencielle du moment sera $=\frac{1}{2}mu(e+\frac{fx}{a})x^{\frac{3}{2}}dx$; quantité dont l'intégrale, en mettant a pour x, est $=\frac{1}{2}mu(\frac{2}{5}e+\frac{2}{7}f)a^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}mu(\frac{6}{5}+\frac{10}{7})(21)^{\frac{5}{2}}=2656mu$, en faisant $e=3$, $f=5$, & $a=21$. Le taille-mer & l'étrave, ont été pareillement supposés former un autre trapese qui donnoit la même formule que la précédente, avec la seule différence que la quantité e est ici $=6$, & $f=-2$, ce qui donne $\frac{1}{2}mu(\frac{2}{5}e+\frac{2}{7}f)a^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}mu(\frac{12}{5}-\frac{4}{7})(21)^{\frac{5}{2}}=1848\,mu$. Ces trois Moments latéraux étant réunis donnent une somme de $15147\,mu$, qui, ajoutée aux $22771mu$, somme des Moments qui proviennent du corps du Vaisseau, donnera les Moments totaux pour le Vaisseau de 60 canons, appartenants à la formule $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}}$; ainsi cette somme totale des Moments sera $=37918\,mu$.

(200.) Si on veut, en outre, que le Vaisseau soit calé de 6 pouces de plus, comme nous l'avons supposé dans les exemples précédents, on observera que l'augmentation qui correspond à $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$ est comme $x^{\frac{5}{2}}$, à cause que g est comme dx (177.) : ainsi, cette augmentation sera à la valeur primitive de cette quantité, comme $\frac{5}{2}n$ est à $\frac{107}{6}$ *, rapport qui est $=\frac{1}{7}n$; c'est-à-dire, qu'elle sera $=\frac{1}{7}n\,(2397)mu$; & celle qui correspond à $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}}$ sera $=\frac{1}{7}n\,(37918)mu=2708\,mu$; par conséquent, le Vaisseau étant calé de 6 pouces de plus, on aura $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}=2568mu$, & $\frac{1}{2}mu\int Fgx^{\frac{3}{2}}=40626\,mu$.

* Car le Vaisseau étant daus son état primitif, $x=\frac{107}{6}$, (181 & 187.), & étant plus calé de la quantité n, $x=\frac{107}{6}+n$; donc en nommant R la quantité $\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{3}{2}}$ qui répond à l'état primitif du Navire, & A l'augmentation quelle reçoit par l'augmentation du tirant d'ean ; $R+A$ sera la valeur actuelle de cette quantité, & l'on aura $(\frac{107}{6})^{\frac{5}{2}} : (\frac{107}{6}+n)^{\frac{5}{2}} :: R : R+A$, ou $(\frac{107}{6})^{\frac{5}{2}} : (\frac{107}{6})^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}n(\frac{107}{6})^{\frac{3}{2}} :: A : R+A$, ou $\frac{107}{6} : \frac{107}{6}+\frac{5}{2}n :: A : R+A$; d'où l'on tire $\frac{107}{6} : \frac{5}{2}n :: R : A$; ou, enfin, $1 : \frac{1}{7}n :: R : A = \frac{1}{7}nR$. Ce calcul est analogue à ceux qu'on a exposés dans la *Note* de l'*Article* 187.

(201.) Pour trouver $\int chx^{\frac{1}{2}}y$, on prendra, dans la figure correſpondante à chaque petit quadrilatere, la valeur de $h = NL$, & on la multipliera par y, diſtance de ſon centre de réſiſtance au plan vertical qui coïncide avec la quille : on multipliera enſuite chaque produit par c, diſtance d'un couple à l'autre ; ou, s'il eſt queſtion des quadrilateres extrêmes de l'avant, ou de l'arriere, par la diſtance du dernier couple à l'étrave, ou à l'étambot. Ayant fait la ſomme de tous les produits correſpondants aux petits quadrilateres compris entre deux lignes d'eau, on multipliera chacune de ces ſommes par la quantité $x^{\frac{1}{2}}$, leſquelles quantités ſont (197.), $\left(\frac{21}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{126}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, & $\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$; enfin, ajoutant tous ces produits enſemble, on aura la valeur de $\int chx^{\frac{1}{2}}y$ pour les Moments latéraux.

Pour avoir les Moments de proue, on multipliera h par y, diſtance du centre de réſiſtance du quadrilatere au plan vertical, perpendiculaire à la quille, qui paſſe par le centre de gravité ; on multipliera enſuite ce produit par c, différence entre les diſtances des points F & G au plan vertical qui paſſe par la quille. On trouvera dans les Tables ſuivantes les valeurs de h, c & y, ainſi que leurs produits pour le Vaiſſeau de 60 canons *.

Faiſant maintenant uſage de ces Tables, on multipliera $3320\frac{1}{4}$ par $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{1}{2}}$, le produit ſera $= 4812$: pareillement $4060\frac{4}{7}\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 9620$: $4104\frac{1}{4}\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 12381$: $3784\frac{11}{12}\left(\frac{126}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 13435$: enfin $1520\frac{1}{6}\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 6100$. La ſomme 46338 de tous ces produits exprimera le Moment latéral ; ainſi l'on aura $\int chx^{\frac{1}{2}}y = 46338$. Pour avoir les Moments de proue, on multipliera de même $4410\frac{1}{6}$ par $\left(\frac{21}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$, le produit ſera $= 6391$: de même $4851\frac{1}{6}\left(\frac{56}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 11480$: $3946\frac{1}{12}\left(\frac{91}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 11905$: $3593\frac{1}{3}\left(\frac{126}{10}\right) = 12755$; enfin, $1355\frac{1}{12}\left(\frac{161}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 5358$. La ſomme 47889 de tous ces produits exprimera le Moment de poupe à proue : ainſi, l'on aura $\int chx^{\frac{1}{2}}y = 47889$.

---

* Ces Calculs ſont dans le même cas que ceux des *Articles* 178 & 179 ; nous les laiſſons tels que l'Auteur les donne, pour les raiſons que nous avons expoſées dans la Note de l'*Art.* 179.

I. TABLE des Valeurs de *h*, *c*, *y* dans les Moments latéraux.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau. 1°. & 2°.			2°. & 3°.			3°. & 4°.			4°. & 5°.			5°. & Quille.		
	h	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*
rave & XXVII	1 p 9	9	1 p 0												
XVII & XXIV	1 11	7 2	7. 0	2 p 3	7 p 2	; p 9	1 p 11	4 p 4	1 p 8						
XIV & XXI	1 8	7. 2	13. 8	2. 2	7. 2	10. 2	1. 9	7. 2	6. 0	2 p 5	7 p 2	2 p 3	1 p 4	2 p 8	0 p 6
XI & XVIII	1. 5	7. 2	17. 5	2. 1	7. 2	15. 1	2. 7	7. 2	11. 4	2. 10	7. 2	5. 9	2. 5	7. 2	1. 5
VIII & XV	1. 3	7. 2	19. 4	1. 11	7. 2	17. 8	2. 5	7. 2	14. 9	2. 11	7. 2	9. 2	3. 2	7. 2	2. 6
V & XII	1. 2	7. 2	20. 4	1. 9	7. 2	18. 11	2. 3	7. 2	16. 6	2. 11	7. 2	11. 3	3. 4	7. 2	3. 6
II & IX	1. 1	7. 2	20. 8	1. 8	7. 2	19. 7	2. 1	7. 2	17. 5	2 10	7. 2	13. 6	3. 4	7. 2	4. 7
X & VI	1. 1	7. 2	20. 9	1. 8	7. 2	10. 0	2. 0	7. 2	18. 1	2. 9	7. 2	14. 9	3. 4	7. 2	5. 3
I & III	1. 1	7. 2	20. 10	1. 7	7. 2	20. 1	2. 0	7. 2	18. 6	2. 8	7. 2	15. 8	3. 4	7. 2	5. 9
II & o	1. 1	7. 2	20. 11	1. 7	7. 2	20. 2	1. 11	7. 2	18. 9	2. 7	7. 2	16. 1	3. 4	7. 2	5. 11
0 & 3	1. 1	6. 2	20. 11	1. 7	6. 2	20. 2	1. 11	6. 2	18. 9	2. 7	6. 2	16. 2	3. 4	6. 2	6. 0
3 & 6	1. 1	7. 2	20. 10	1. 7	7. 2	20. 1	1. 11	7. 2	18. 8	2. 7	7. 2	15. 10	3. 4	7. 2	5. 9
6 & 9	1. 1	7. 2	20. 8	1. 8	7. 2	19. 11	1. 11	7. 2	18. 3	2. 8	7. 2	15. 3	3. 4	7. 2	5. 7
9 & 12	1. 1	7. 2	20. 4	1. 8	7. 2	19. 6	2. 0	7. 2	17. 8	2. 8	7. 2	14. 5	3. 3	7. 2	5. 2
12 & 15	1. 2	7. 2	19. 11	1. 9	7. 2	19. 0	2. 2	7. 2	17. 0	2. 9	7. 2	13. 3	3. 3	7. 2	4. 7
15 & 18	1. 3	7. 2	19. 5	1. 9	7. 2	18. 4	2. 4	7. 2	15. 11	2. 11	7. 2	11. 2	3. 2	7. 2	3. 7
18 & 21	1. 4	7. 2	18. 11	1. 9	7. 2	17. 5	2. 6	7. 2	14. 2	3. 2	7. 2	8. 10	3. 1	7. 2	2. 8
21 & 24	1. 5	7. 2	17. 9	1. 10	7. 2	15. 10	2. 6	7. 2	11. 8	2. 10	7. 2	6. 7	3. 0	7. 2	1. 10
24 & 27	1. 7	7. 2	16. 2	1. 11	7. 2	13. 3	2. 5	7. 2	8. 9	2. 5	7. 2	4. 7	2. 5	7. 2	1. 4
27 & 30	2. 4	7. 2	13. 5	2. 5	7. 2	9. 6	2. 4	7. 2	5. 8	1. 11	7. 2	2. 10	1. 9	7. 2	0. 9
30 & 33	2. 6	7. 2	9. 5	2. 6	7 2	5. 5	1. 11	7. 2	2. 9	1. 4	7. 2	1. 3	1. 3	7. 2	0. 4
33 & l'Etambot.	2. 0	4. 1	3. 4	1. 0	3. 7	1. 10	1. 3	3. 0	1. 0	1. 1	2. 6	0. 4	1. 1	2. 1	0. 4

II. TABLE des Valeurs de *h*, *c*, *y* dans les Moments de poupe à proue.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau. 1°. & 2°.			2°. & 3°.			3°. & 4°.			4°. & 5°.			5°. & Quille.		
	h	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*	*h*	*c*	*y*
Etrave & XXVII	1 p 9	3 p 0	71 p 0												
XXVII & XXIV	1. 11	7. 9	66. 1	2 p 3	7 p 0	65 p [illegible]	1. p 11	3 p 3	65 p 5						
XXIV & XXI	1. 8	4. 6	58. 11	2. 2	6. 0	58. 11	1. 9	5. 6	58. 11	2 p 5	4 0	58 p 11	1 p 4	0 p 10	57 p 10
XXI & XVIII	1. 5	2. 3	51. 9	2. 1	3. 0	51. 9	2. 7	4. 3	51. 9	2. 10	3. 6	51. 9	2. 5	1. 1	51. 9
XVIII & XV	1. 3	1. 1	44. 7	1. 11	1. 5	44. 7	2. 5	2. 7	44. 7	2. 11	2. 10	44. 7	3. 2	1. 2	44. 7
XV & XII	1. 2	0. 6	37. 5	1. 9	0. 11	37. 5	2. 3	1. 4	37. 5	2. 11	2. 2	37. 5	3. 4	1. 1	37. 5
XII & IX	1. 1	0. 2	30. 3	1. 8	0. 6	30. 3	2. 1	0. 10	30. 3	2. 10	1. 9	30. 3	3. 4	0. 11	30. 3
IX & VI	1. 1	0. 1	23. 1	1. 8	0. 3	23. 1	2. 0	0. 8	23. 1	2. 9	1. 2	23. 1	3. 4	0. 9	23. 1
VI & III	1. 1	0. 0	15. 11	1. 7	0. 1	15. 11	2. 0	0. 4	15. 11	2. 8	0. 8	15. 11	3. 4	0. 4	15. 11
III & o	1. 1	0. 0	8. 9	1. 7	0. 0	8. 9	1. 11	0. 1	8. 9	2. 7	0. 1	8. 9	3. 4	0. 1	8. 9
0 & 3	1. 1	0. 0	2. 7	1. 7	0. 0	2. 7	1. 11	0. 1	2. 7	2. 7	0. 1	2. 7	3. 4	0. 1	2. 7
3 & 6	1. 1	0. 1	4. 9	1. 7	0. 1	4 9	1. 11	0. 2	4. 9	2. 7	0. 4	4. 9	3. 4	0. 2	4. 9
6 & 9	1. 1	0. 2	11. 11	1. 8	0. 5	11. 11	1. 11	0. 7	11. 11	2. 8	0. 9	11. 11	3. 4	0. 6	11. 11
9 & 12	1. 1	0. 5	19. 1	1. 8	0. 8	19. 1	2. 0	0. 9	19. 1	2. 8	1. 3	19. 1	3. 3	0. 8	19. 1
12 & 15	1. 2	0. 3	6. 3	1. 9	0. 9	26. 3	2. 2	1. 0	26. 3	2. 9	1. 6	26. 3	3. 3	0. 10	26. 3
15 & 18	1. 3	0. 6	33. 5	1. 9	0. 10	33. 5	2. 4	1. 4	33. 5	2. 11	2. 3	33. 5	3. 2	1. 2	33. 5
18 & 21	1. 4	0. 7	40. 7	1. 9	1. 3	40. 7	2. 6	2. 3	40. 7	3. 2	2. 5	40. 7	3. 1	0. 11	40. 7
21 & 24	1. 5	1. 1	47. 9	1. 10	2. 1	47. 9	2. 6	2. 9	47. 9	2. 10	2. 2	47. 9	3. 0	0. 8	47. 9
24 & 27	1. 7	1. 9	54. 11	1. 11	3. 2	54. 11	2. 5	3. 0	54. 11	2. 5	1. 10	54. 11	2. 5	0. 7	54. 11
27 & 30	2. 4	2. 7	62. 1	2. 5	4. 0	62. 1	2. 4	3. 1	62. 1	1. 11	1. 8	62. 1	1. 9	0. 6	62. 1
30 & 33	2. 6	4. 11	69. 3	2. 6	4. 4	69. 3	1. 11	1. 7	69. 3	1. 4	1. 6	69. 3	1. 3	0. 5	69. 3
33 & l'Etambot.	2. 0	6. 0	71. 3	1. 9	2. 10	70. 0	1 3	1. 2	69 10	1. 1	0. 4	69. 8	1. 1	0. 4	69. 6

I. TABLE des Produits hcy, dans les Moments latéraux.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau. 1e. & 2e.	2e. & 3e.	3e. & 4e.	4e. & 5e.	5e. & q.
..tr. & XXVII	4. 4				
.XVII & XXIV	96. 1	59. 1	11. 2		
.XIV & XXI	150. 0	157. 8	75. 2	38. 2	1. 9
.XI & XVIII	175. 6	225. 1	208. 5	112. 6	24. 6
.VIII & XV	172. 7	238. 7	253. 2	190. 5	56. 9
.V & XII	169. 6	232. 7	265. 2	233. 5	83. 7
XII & IX	160. 0	231. 4	259. 9	261. 0	109. 5
.X & VI	160. 7	238.10	259. 2	287. 0	125. 7
VI & III	161. 2	227. 5	265. 2	296. 2	137. 4
.II & o	161. 9	228. 0	254. 0	297. 5	141. 4
0 & 3	139. 2	196. 2	217. 8	256.10	123. 0
3 & 6	161. 2	227. 5	252.10	289. 9	137. 4
6 & 9	160. 0	233. 9	248.11	291. 4	133. 4
9 & 12	157. 8	230. 6	267. 6	275. 3	120. 0
12 & 15	165. 5	238. 3	263.10	258. 0	106.11
15 & 18	173. 2	228. 0	263.10	233. 6	81. 2
18 & 21	178. 7	216. 2	253. 2	200. 8	59. 9
21 & 24	177.10	203. 4	206. 6	133. 9	39. 5
24 & 27	182. 8	181. 4	149. 2	79. 5	23. 3
27 & 30	223. 4	162.11	93. 2	37. 7	9. 7
30 & 33	167. 2	95. 6	32. 9	11.11	3. 0
33 & Etambot.	27. 2	8.11	3. 9	0.10	0. 8
Sommes. . .	2220. [illegible]	4060. 10	4104. 3	3784. 11	1520.10

II. TABLE des Produits hcy, dans les Moments de poupe à proue.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau. 1e. & 2e.	2e. & 3e.	3e. & 4e.	4e. & 5e.	5e. & q.
Etr. & XXVII	372. 9				
XXVII & XXIV	981. 3	1040. 10	407. 5		
XXIV & XXI	441.10	766. 1	567. 1	608.10	64. 3
XXI & XVIII	163.10	371. 4	568. 2	513. 2	135. [illegible]
XVIII & XV	60. 4	149. 6	278. 4	368. 7	162.11
XV & XII	28. 1	60. 0	112. 3	236. 2	135. 1
XII & IX	5. 6	25. 3	52. 6	150. 0	92. [illegible]
IX & VI	2. 1	9. 7	30. 9	74. 1	57. [illegible]
VI & III	0. 0	2. 2	10. 7	28. 4	16. [illegible]
III & o	0. 0	0. 0	1. 5	1.11	2. 8
0 & 3	0. 0	0. 0	0. 5	0. 7	0. [illegible]
3 & 6	0. 5	0. 7	1. 6	4. 1	2. 8
6 & 9	2. 2	8. 3	13. 4	23.10	19.10
9 & 12	6.10	21. 2	28. 7	63. 7	41. 4
12 & 15	12. 9	34. 5	56.10	108. 3	71. 1
15 & 18	20.11	49. 2	104. 0	202.10	129. 6
18 & 21	31. 7	100. 6	228. 3	310. 7	114. 9
21 & 24	49. 7	182. 2	328. 3	293. 1	95. 6
24 & 27	125. 2	333. 8	398. 2	243. 4	77. 4
27 & 30	374. 3	600. 2	446. 8	198. 4	54. 4
30 & 33	875.10	750. 3	210. 2	138. 6	36. 1
33 & Etambot.	855. 0	347. 2	101. 9	25. 2	25. 1
Sommes. . .	4410. 2	4851.10	3946. 5	3593. 3	1335. [illegible]

(202.) Il n'y a rien a ajouter aux Moments latéraux, pour la quille, l'étrave, le taille-mer, l'étambot, & le gouvernail, parce qu'on a $h = 0$ pour ces différents objets. Le Moment augmente à raison du bordage, à cause que celui-ci fait augmenter les quantités y, $x^{\frac{1}{2}}$ & h, cette derniere quantité étant comme la distance entre les lignes d'eau, & cette distance comme la quantité x. Quant à la quantité y, l'augmentation qui en résulte est (181.) de $\frac{1}{42}$ de $46338 = 1103$: l'augmentation qui résulte de $x^{\frac{1}{2}}$ est (181.) de $\frac{1}{35}$ de $46338 = 1324$: ajoutant donc ces deux quantités, on aura, pour les Moments latéraux, $\int chx^{\frac{1}{2}}y = 48765$, & $\frac{1}{2} mu \int chx^{\frac{1}{2}}y = 24382\ mu$.

(203.) Les Moments de poupe à proue, n'augmentent nullement pour ce qui concerne la quille, l'étambot, le gouvernail, à cause qu'on a $h = 0$ pour ces différentes parties. Les Moments relatifs à l'étrave & au taille-mer sont exprimés par $chx^{\frac{1}{2}}y$, & alors on a $c = 1$, $h = 6$, $x^{\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}}$, & $y = 66$; par conséquent,

$chx^{\frac{1}{2}}y = 1386$. L'épaisseur du bordage fait augmenter les quantités c, h, & $x^{\frac{1}{2}}$; l'augmentation relative à la premiere, est de $\frac{1}{42}$ de $47889 = 1140$, & celle relative à $x^{\frac{1}{2}}$ est de $\frac{1}{35}$ de $47889 = 1368$: donc en ajoutant ces trois quantités, on aura, pour les Moments de poupe à proue, $\int chx^{\frac{1}{2}}y = 51783$, & $\frac{1}{2} mu \int chx^{\frac{1}{2}}y = 25891\, mu$.

(204.) Si on vouloit que le Vaisseau fut calé dans une autre ligne d'eau que celle sur laquelle on a fondé le calcul; si l'on vouloit, par exemple, que notre Vaisseau de 60 canons fut calé de 6 pouces de plus, dans ce cas, les deux Moments varieroient comme $hx^{\frac{1}{2}}$, ou comme $x^{\frac{3}{2}}$; c'est-à-dire (187 & *Note.*) de $\frac{1}{12} n = \frac{1}{24}$; ainsi on aura, pour les Moments latéraux, $\frac{1}{2} mu \int chx^{\frac{1}{2}}y = 25398\, mu$, & pour ceux de poupe à proue, $\frac{1}{2} mu \int chx^{\frac{1}{2}}y = 26970\, mu$.

(205.) La formule de la somme des Moments $mKv \sin\Delta + mkru + \frac{1}{2} mu \int chx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{3}{2}}$, se réduit donc, pour les moments latéraux du Vaisseau de 60 canons, à $9\frac{1}{8}.68650.m \sin\Delta + 4\frac{19}{24}.3316 mu + 25398\, mu - 40626\, mu$, attendu qu'on a trouvé (166.), $K = 9\frac{1}{8}$; (112.), $v = 68650$; (141 & 166.), $k = 7\frac{1}{6} - 2\frac{9}{24} = 4\frac{19}{24}$; & (187), $r = 3316$; c'est-à-dire, que les Moments seront $= 626431\, mu \sin\Delta + 15889\, mu + 25398\, mu - 40626\, mu = 626431\, mu \sin\Delta + 661\, mu$.

(206.) Les Moments de poupe à proue seront $= 68650\, mK \sin\Delta + 4\frac{19}{24} mru + 26970\, mu - 2568\, mu$, ou à cause qu'on a trouvé (159 & 166.), $K = 117\frac{1}{4} - 2\frac{9}{24} = 114\frac{9}{24}$, & (187.), $r = 294$, ils seront $7851843\, m \sin\Delta + 1409\, mu + 26970\, mu - 2568\, mu = 7851843\, m \sin\Delta + 25811\, mu$: bien attendu que dans les Moments latéraux u exprime la vitesse latérale que prend le Vaisseau, & que dans les Moments de poupe à proue, elle exprime celle qu'il prend par la proue, ou dans la direction de la quille.

(207.) Ayant trouvés les Moments qu'éprouve un Vaisseau, comme, par exemple, celui de 60 canons, on peut trouver, avec facilité, ceux qu'éprouveroit un autre Vaisseau quelconque, qui lui seroit semblable par ses fonds; parce que d'après ce qui a été dit on peut trouver ceux qu'éprouve le même Vaisseau de 60 canons, en le supposant calé plus ou moins, pour qu'il soit dans une disposition entiérement semblable à celle dans laquelle est le Vaisseau dont on cherche les Moments. Après cela, les quantités K, v, k, & r, étant connues, ou pouvant parvenir à les connoître, par ce qui a été dit dans les *Chapitres* précédents; on aura, par conséquent, les

valeurs de $mKv\,\mathit{ſin}\,\Delta$, & $mukr$. Quant aux valeurs de $\frac{1}{4}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y$, & de $\frac{1}{4}mu\int\int fgx^{\frac{1}{2}}$, on voit que ces deux quantités ſont comme les racines quarrées des ſeptiemes puiſſances des dimenſions linéaires des Vaiſſeaux *: ainſi elles ſe détermineront par une ſimple regle de trois.

Nous avons vu, dans l'*Article* 145, qu'ayant deux Vaiſſeaux n & N, dans leſquels on appelle

m la largeur, v le volume ſubmergé. a l'aire, ou la ſection à la ſuperficie du fluide, c'eſt à-dire, à la ligne de flottaiſon,	du premier.	M la largeur, V le volume ſubmergé,	du ſecond.

Nous avons vu, dis-je, qu'on avoit $\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$ pour l'expreſſion de la quantité dont il faut que le Vaiſſeau n ſoit plus ou moins calé, pour être dans la même diſpoſition que le Vaiſſeau N. Suppoſons maintenant que b exprime ce dont le Vaiſſeau n eſt calé; on aura $b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}$ pour la quantité dont il devroit l'être pour que ſa diſpoſition fût ſemblable à celle du Vaiſſeau N; & comme les Moments $\int chx^{\frac{1}{2}}y$ varient comme $x^{\frac{3}{2}}$, (204.), ou dans la raiſon de $b^{\frac{3}{2}}$ à $\left(b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$; & ceux exprimés par $\int\int fgx^{\frac{1}{2}}$, comme $x^{\frac{5}{2}}$, (200.), ou dans la raiſon de $b^{\frac{5}{2}}$ à $\left(b-\frac{v-\frac{m^3}{M^3}V}{a}\right)^{\frac{5}{2}}$; c'eſt-à-dire, les premiers dans la raiſon de 1 à $1-\frac{3}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$, & les ſeconds, dans celle de 1 à $1-\frac{5}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$ **: les premiers Moments, pour la nouvelle diſpoſition du Vaiſſeau n, ſeront donc $=\int chx^{\frac{1}{2}}y-\frac{3\int chx^{\frac{1}{2}}y}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$; & les ſeconds $=\int\int fgx^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}\int\frac{fgx^{\frac{1}{2}}}{ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)$. Or, ces Moments ſont à ceux qu'éprouve le Vaiſſeau N, comme $m^{\frac{7}{2}}$ eſt à $M^{\frac{7}{2}}$, (207.);

* Puiſque les quantités c, h, y, f, & g ſont comme x: il s'enſuit que les expreſſions $\int chx^{\frac{1}{2}}y$, & $\int\int fgx^{\frac{1}{2}}$ ſont comme $x^{\frac{7}{2}}$.

** On trouve ces rapports en opérant d'une maniere analogue à celles qu'on a développées dans les *Notes* des *Articles* 187 & 200.

donc les Moments qu'éprouve ce dernier Vaisseau, seront $=$ . . . $\frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}\int chx^{\frac{1}{2}}y\left(1-\frac{3}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)\right)$, & $\frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}\iint fgx^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{5}{2ba}\left(v-\frac{m^3}{M^3}V\right)\right)$; les quantités $\int chx^{\frac{1}{2}}$, & $\iint fgx^{\frac{3}{2}}$ exprimant les Moments déjà trouvés, pour le Vaisseau n. Nous avons, pour le Vaisseau de 60 canons, $m = 42$, $v = 68650$, $a = 5312$, $b = 5.3\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$.

$\int chx^{\frac{1}{2}}y = 50769$, (204.) ; $\iint fgx^{\frac{3}{2}} = 81252$, (200.) } pour les Moments latéraux. || $\int chx^{\frac{1}{2}}y = 53940$, (204.) ; $\iint fgx^{\frac{3}{2}} = 5136$, (200.) } pour les Moments de poupe à proue.

donc en substituant, ces expressions se réduiront à . . . . .

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right), \text{ \& à } \frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{p}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right)$$

pour les Moments latéraux : & pour ceux de poupe à proue, elles se réduiront à $\frac{M^{\frac{7}{2}}.53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right)$, & à . . . .

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right).$$

(208.) Pour trouver, d'après cela, les Moments latéraux qu'éprouve le Vaisseau de 70 canons, nous avons (171.), $K = 10\frac{2}{3}$; (112.), $V = 96500$; (146 & 171.), $k = 7\frac{1}{6} - 2\frac{1}{6} = 5$; (191.), $r = 4391$; (117.), $M = 48$: donc $mKV \sin\Delta = 10\frac{2}{3}.96500.m \sin\Delta = 1029333\, m \sin\Delta$: $mukr = 5.4391.mu = 21955\, mu$; & par conséquent

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right) = \frac{8^{\frac{7}{2}}.50796}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\left(\frac{7}{8}\right)^3.96500\right)}{35.5312}\right)$$

$$= 75822, \text{ \& } \frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots\ldots :$$

$\frac{8^{\frac{7}{2}}.81252}{7^{\frac{7}{9}}}\left(1-\frac{5\left(68650-\left(\frac{7}{8}\right)^3 96500\right)}{35.5312}\right) = 115695$: d'où s'ensuit que, pour le Vaisseau de 70 canons, les Moments latéraux seront $=$ . . . $1029333\, m \sin\Delta + 21955\, mu + \frac{1}{2} mu\,(75822) - \frac{1}{2} mu.115695 = 1029333\, m \sin\Delta + 2019\, mu$.

(209.) Pour les Moments de poupe à proue, on a (160 & 171.), $K = 142\frac{1}{12} - 2\frac{1}{2} = 139\frac{7}{12}$, & (191), $r = 387$: donc $mKV \sin\Delta = 139\frac{7}{12}.96500 m \sin\Delta = 13469951\, m \sin\Delta$: $mukr = 5.387\, mu = 1935\, mu$:

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\frac{(42)^3}{M^3}V\right)}{35.5312}\right) = \frac{8^{\frac{7}{2}}.53940}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1-\frac{3\left(68650-\left(\frac{7}{8}\right)^3 96500\right)}{35.5312}\right)$$

$= 83414$: & $\frac{M^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{8^{\frac{7}{2}}.5136}{7^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{7}{8})^3 96500}{35.5312}\right) = 7166$: donc les Moments de poupe à proue qu'éprouvera le Vaisseau de 70 canons, seront exprimés par $13469951\ m \sin\Delta + 1935\ mu + \frac{1}{2}mu.83414 - \frac{1}{2}mu.7166 = 13469951\ m \sin\Delta + 40059\ mu$.

(210.) Nous avons trouvé (172.), dans la Frégate de 22 canons, que le métacentre, considéré par rapport aux Moments latéraux, est élevé au-dessus du centre de gravité de 7 pieds $\frac{3}{7} = K$; on a, de plus (112.), $V = 21570$; (147 & 172.), $k = 4\frac{19}{24} - 2\frac{5}{21} = 2\frac{31}{16}$; (192.), $r = 1426$; & (112.), $M = 31\frac{2}{3}$: donc $mKV \sin\Delta = 7\frac{3}{7}.25170.m \sin\Delta = 186977\ m \sin\Delta$: $mukr = 2\frac{31}{16}.1426.mu = 3641\ mu$: $\frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - (\frac{42}{M})^3 V)}{35.3512}\right) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - (\frac{42}{31\frac{2}{3}})^3 25170)}{35.5312}\right) = 15877$: & enfin . . .

$\frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{42}{M})^3 V)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{42}{31\frac{2}{3}})^3 25170)}{35.5312}\right) = 22173$: partant les Moments latéraux qu'éprouvera la Frégate, seront $= 186977\ m \sin\Delta + 3641\ mu + \frac{1}{2}\ mu\ 15877 - \frac{1}{2}\ mu\ 22173 = 186977\ m \sin\Delta + 493\ mu$.

(211.) Pour les Moments de poupe à proue, on a (160 & 172.), $K = 103\frac{1}{4} - 2\frac{5}{21} = 101\frac{11}{42}$, & (192.), $r = 124$. Donc $mKV \sin\Delta = 101\frac{11}{24}.25170.m \sin\Delta = 2548762\ m \sin\Delta$: $mukr = 2\frac{31}{16}.124\ mu = 316\ mu$: $\frac{M^{\frac{7}{2}}.53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - (\frac{42}{M})^3 V}{35.5312}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}}.53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3(68650 - (\frac{42}{31\frac{2}{3}})^3 25170)}{35.5312}\right) = 16856$: & enfin . . . .

& $\frac{M^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{42}{M})^3 V)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{(31\frac{2}{3})^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5(68650 - (\frac{42}{31\frac{2}{3}})^3 25170)}{35.5312}\right) = 1401$: donc les Moments

de

de poupe à proue qu'éprouve la Frégate, sont exprimés par . . . $2548762\, m \sin\Delta + 316\, mu + \frac{1}{2}\, mu\, 16856 - \frac{1}{2}\, mu\, 1401 = \ldots$ $2548762\, m \sin\Delta + 8044\, mu$.

(212.) Dans le Vaisseau à trois ponts, nous avons trouvé (173.), $K = 8\frac{4}{7}$: (118.), $V = 128293$: (148 & 177.), $k = 9 - 3\frac{13}{14} = 5\frac{1}{14}$: (193.), $r = 5568$: & (118.), $M = 51$: donc $mKV \sin\Delta = \ldots$ $8\frac{4}{7} . 128293 . m \sin\Delta = 1136309\, m \sin\Delta$: $mukr = 5\frac{1}{14} . 5568 . mu =$

$$28238\, mu : \frac{M^{\frac{7}{2}}.50796}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}}.50796}{(14)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{14}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right) = 101625 : \text{\& enfin} \ldots$$

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.81252}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right) = \frac{(17)^{\frac{7}{2}}.81252}{(14)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{14}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right) =$$

203960. Partant, les Moments latéraux qu'éprouvera le Vaisseau à trois ponts, seront $= 1136309\, m \sin\Delta + 28238\, mu + \frac{1}{2} mu . 101625 - \frac{1}{2} mu . 203960 = 1136309\, m \sin\Delta - 22930\, mu$.

(213.) Pour les Moments de poupe à proue, on a (160 & 173.), $K = 131\frac{1}{2} - 3\frac{13}{14} = 127\frac{4}{7}$, & (193.), $r = 498$: donc $mKV \sin\Delta =$ $127\frac{4}{7} . 128293\, m \sin\Delta = 16366527\, m \sin\Delta$: $mukr = 5\frac{1}{14} . 496\, mu =$

$$2525\, mu : \frac{M^{\frac{7}{2}}.53940}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}}.53940}{(14)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{3\left(68650 - \left(\frac{14}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right) = 107666 : \text{\& enfin} \ldots$$

$$\frac{M^{\frac{7}{2}}.5136}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{42}{M}\right)^3 V\right)}{35.5312}\right) = \ldots\ldots$$

$$\frac{(17)^{\frac{7}{2}}.5136}{(14)^{\frac{7}{2}}}\left(1 - \frac{5\left(68650 - \left(\frac{14}{17}\right)^3 128293\right)}{35.5312}\right) = 12892 : \text{par conséquent}$$

les Moments de poupe à proue, qu'éprouve le Vaisseau à trois ponts, seront $= 16366527\, m \sin\Delta + 2525\, mu + \frac{1}{2}\, mu . 107666 - \frac{1}{2}\, mu\, 12892 = 16366527\, m \sin\Delta + 42794\, mu$.

(214.) Les détails dans lesquels on vient d'entrer, font déjà voir clairement que, pour obtenir que le Vaisseau porte bien la voile, il convient d'élever le plus qu'il est possible le centre des résistances horisontales ; car c'est de là que dépend le moment horisontal *mukr* —

$\frac{1}{2}mu\int fgx^{\frac{1}{2}}$, qui peut être plus, ou moins négatif, selon la position de ce centre. Divisant cette quantité par la résistance r, le quotient sera $mu(k - \frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{1}{2}})$: de sorte que $k - \frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{1}{2}}$ est la distance du centre de gravité à celui des résistances horisontales. Si $\frac{1}{2r}\int fgx^{\frac{1}{2}}$ est plus grand que k, ce centre sera au-dessous de celui de gravité, puisque k est la distance de ce dernier centre à la superficie du fluide; donc plus le centre des résistances sera bas, plus le Moment $mu(kr - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}})$ sera négatif, ce qui est préjudiciable pour la stabilité, ou pour la qualité de porter la voile. Cette qualité ne dépend en aucune maniere de la section horisontale du Navire à la ligne de flottaison, quoiqu'on ait cru généralement, avec M. *Bouguer*, que la stabilité en dépendoit uniquement; car, comme nous l'avons vu (*Chap. III & IV.*), cela ne peut avoir lieu que lorsque le Navire est dans l'état de repos Le Moment vertical $\frac{1}{2}mu\int chx^{\frac{1}{2}}y$ ne dépend pas davantage de cette section; ces deux Moments dépendent de la figure, ou disposition, des fonds du Vaisseau : plus ils seront verticaux, depuis l'horisontale du centre de gravité, en allant vers le haut, plus $\int fgx^{\frac{1}{2}}$ sera petit, & plus $\int chx^{\frac{1}{2}}y$ sera grand : d'où l'on voit que cette disposition des fonds est très convenable pour procurer une stabilité parfaite. Il convient aussi beaucoup, pour produire cet effet, que le centre de gravité soit placé bas; parce que plus ce centre sera bas, non seulement la quantité K, & par conséquent le Moment $mKV\sin\Delta$ en deviendra plus grand; mais aussi la quantité k augmentera en même temps, ce qui diminuera le Moment négatif $mu(kr - \frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}})$; mais cette précaution devient préjudiciable pour les roulis, comme nous le verrons par la suite.

(215.) Nous n'avons point fait entrer dans le calcul la résistance qui provient de la dénivellation, parce que, comme on l'a déjà vu, elle est extrêmement petite dans les vitesses que prennent réguliérement les Vaisseaux, principalement lorsqu'ils sont grands. On n'a pas non plus fait attention à la réduction qu'il faut faire pour avoir la force absolue des résistances, dont la valeur n'est (*Tome I*, 644.) que les deux tiers de celle qu'on obtient par le calcul : cependant, dans le cas où il seroit question de combiner des forces de résistance avec d'autres forces provenant de poids effectifs, alors on réduiroit les résistances aux deux tiers. Ainsi le moment latéral absolu du Vaisseau de 60 canons, sera seulement de $626431\,m\sin\Delta + 440\,mu$, & ainsi des autres.

CHAPITRE VII.

Des Moments qu'éprouve le Vaiſſeau dans ſon mouvement horiſontal, par rapport à un axe vertical qui paſſe par le centre de gravité.

(216.) LES Moments qu'éprouve le Vaiſſeau dans ſon mouvement horiſontal, par rapport à un axe vertical qui paſſe par ſon centre de gravité, peuvent être différents, ſuivant la direction dans laquelle ſe fait le mouvement; mais nous pouvons les réduire à deux comme nous l'avons fait dans le *Chapitre précédent*, l'un perpendiculaire à la quille, que nous avons appellé *Moment latéral*, & l'autre de poupe à proue; mais comme la conſidération de ce dernier moment n'eſt pas néceſſaire pour remplir l'objet que nous nous propoſons préſentement, il ſuffira de conſidérer les Moments latéraux.

(217.) L'expreſſion de ces Moments eſt (*Tome I*, *Art.* 827.) = $\frac{1}{2} mu \int c y x^{\frac{1}{2}} dx \sin \theta$, ou, en ſubſtituant (*Tome I*, *Art.* 584.) à la place de $\sin \theta$, ſa valeur $= \sin \lambda . \sin n$, elle eſt = ... $\frac{1}{2} mu \int c y x^{\frac{1}{2}} dx \sin \lambda . \sin n = \frac{1}{2} mu \int f g y x^{\frac{1}{2}}$, (177.). Les valeurs de fg, ou plutôt celles de Fg, puiſqu'il ne s'agit ici que des Moments latéraux, ſe trouvent déjà calculées pour le Vaiſſeau de 60 canons, dans la Table de l'*Article* 179: & on a pareillement les valeurs de $x^{\frac{1}{2}}$, leſquelles (180.) ſont $\frac{4}{3}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{78}{54}$, $\frac{7}{8}$ & $\frac{107}{38}$. Multipliant donc, la valeur de Fg pour chaque petit quadrilatere pris ſéparément, par la valeur correſpondante de $x^{\frac{1}{2}}$, il en réſultera les produits $Fgx^{\frac{1}{2}}$ tels qu'on les trouve dans la Table ſuivante. Prenant enſuite ſéparément la ſomme de chacune des cinq caſes horiſontales, qui renferment chacune deux petits quadrilateres; avec ces ſommes on formera la premiere colonne de la ſeconde Table. Prenant les valeurs de y de la Table de l'*Article* 201, relative aux Moments de poupe à proue, attendu que ces valeurs ſont les mêmes que celles qui correſpondent au cas dont il eſt ici queſtion (*Tome I*, 827), on en formera la ſeconde colonne. Multipliant chacune de ces valeurs de y par la ſomme qui la précede, & qui eſt $= Fgx^{\frac{1}{2}}$, on aura les Moments $Fgx^{\frac{1}{2}}y$ qui compoſent la troiſieme colonne, dans laquelle on a diſtingué les Moments poſitifs de la proue, qui ſont =

PLANC. I. 64328 $\frac{2}{3}$, lesquels obligent le Navire à venir au vent, & les Moments négatifs de poupe, qui montent à 98603 $\frac{1}{3}$, lesquels l'obligent à arriver : & comme ces derniers excédent les premiers de 34274 $\frac{2}{3}$, il s'ensuit qu'en vertu de cet excédent, le Navire doit avoir une très-grande propension à arriver ; c'est-à-dire, que $\int fgx^{\frac{1}{2}}y$ étant $= 34274\frac{2}{3}$, le moment qui sollicite le Vaisseau à arriver, sera $= \frac{1}{2} mu \int fgx^{\frac{1}{2}}y = 17137\, mu$.

I. TABLE des Produits $Fgx^{\frac{1}{2}}$.

Entre les Couples.	Entre les lignes d'eau. 1ᵉ. & 2ᵉ. $x = \frac{4}{5}$	2ᵉ. & 3ᵉ. $x = \frac{13}{10}$	3ᵉ. & 4ᵉ. $x = \frac{71}{84}$	4ᵉ. & 5ᵉ. $x = \frac{7}{8}$	5ᵉ. & q $x = \frac{27}{32}$
Etr. & XXVII	6. 4				
XXVII & XXIV	18. 7	30. 8	27. 1		
XXIV & XXI	24. 4	34. 8	51. 9	61. 10	60. 10
XXI & XVIII	27. 1	40. 0	41. 11	43. 2	67. 10
XVIII & XV	30. 8	44. 3	49. 10	40. 10	41. 8
XV & XII	30. 8	47. 9	56. 0	42. 0	30. 1
XII & IX	31. 3	49. 2	56. 3	49. 0	30. 1
IX & VI	31. 3	51. 9	58. 8	53. 8	29. 1
VI & III	31. 3	52. 2	59. 5	56. 7	28. 5
III & o	31. 3	52. 2	61. 10	58. 7	28. 5
o & 3	23. 2	38. 11	45. 7	43. 2	20. 6
3 & 6	31. 3	52. 2	60. 2	58. 7	28. 5
6 & 9	31. 3	51. 9	59. 5	55. 9	30. 9
9 & 12	31. 1	50. 4	56. 11	55. 9	32. 9
12 & 15	30. 8	50. 4	56. 6	53. 1	34. 11
15 & 18	30. 8	47. 9	52. 3	42. 0	39. 4
18 & 21	30. 4	47. 2	48. 4	35. 0	44. 8
21 & 24	29. 7	44. 8	46. 1	47. 10	50. 0
24 & 27	29. 3	43. 8	45. 4	50. 9	73. 5
27 & 30	22. 8	35. 6	50. 4	67. 8	85. 4
30 & 33	18. 9	33. 4	58. 11	79. 11	95. 4
33 & Etambot.	9. 5	21. 9	32. 0	31. 9	36. 0

II. TABLE des Produits $Fgyx^{\frac{1}{2}}$, tant pour venir au vent que pour arriver.

Entre les Couples.	Sommes	Valeur de y	Valeur de $Fgyx^{\frac{1}{2}}$	Résultats
Etr. & XXVIII	6. 4	71. 0	249. 8	Valeurs positives pour venir au vent. 64328 $\frac{2}{3}$
XXVII & XXIV	76. 4	66. 1	5044. 4	
XXIV & XXI	223. 5	58. 11	13167. 5	
XXI & XVIII	220. 0	51. 9	11386. 0	
XVIII & XV	207. 3	44. 7	9239. 11	
XV & XII	206. 6	37. 5	7726. 7	
XII & IX	205. 9	30. 3	6224. 0	
IX & VI	224. 5	23. 1	5180. 2	
VI & III	227. 10	15. 11	3437. 2	
III & o	232. 3	8. 9	2032. 0	
o & 3	171. 4	2. 7	442. 5	Valeurs négatives pour arriver. 98603
3 & 6	230. 7	4. 9	1095. 5	
6 & 9	228. 11	11. 11	2727. 11	
9 & 12	226. 10	19. 1	4328. 9	
12 & 15	225. 6	26. 3	5919. 5	
15 & 18	212. 0	33. 5	7084. 4	
18 & 21	205. 6	40. 7	8339. 11	
21 & 24	218. 2	47. 9	10417. 6	
24 & 27	242. 5	54. 11	13312. 9	
27 & 30	261. 6	62. 1	16234. 9	Différence
30 & 33	286. 11	69. 3	19814. 9	
33 & Etambot.	130. 11	71. 3	9327. 10	3427[illegible]

(218.) Dans le calcul des résistances latérales, on n'a pas fait attention à l'inclinaison que la quille a ordinairement à l'égard de l'horison, ou de la superficie du fluide ; on l'a supposée parallèle à cette surface, à cause que la différence qui pouvoit résulter de cette supposition étoit alors susceptible d'être négligée : mais il n'en est pas de même dans le calcul des Moments, que nous considérons ici, la différence qui en résulteroit seroit considérable ; ainsi FIG. 35. nous ne pouvons négliger d'avoir égard à cette inclinaison. Pour plus de facilité, nous pouvons supposer que tout l'espace *ABC*, depuis l'horisontale *AB* jusqu'à la quille *CB*, se réduit à un triangle vertical, moitié du rectangle *ABDC* ; en conséquence, ce rectangle étant

divisé en deux parties égales par l'horisontale EG, le triangle BFG sera l'espace qui s'éleve vers la proue, & son égal EFC sera celui qui se submerge à la poupe. Les Moments que produisent l'un & l'autre espace sont négatifs, parce que ceux de la proue doivent être retranchés; ainsi, on doit les ajouter tous les deux à ceux qu'on a déjà trouvés. Dans ces triangles on a $EF = f$, & $\frac{1}{2}EC = g$: partant $fg = EF.\frac{1}{2}EC$, & pour les deux triangles réunis, $fg = EF.EC = AB.\frac{1}{4}AC$: c'est-à-dire, que fg est égal au produit de la longueur de la quille $AB = 130$, par la quatrieme partie de la quantité dont le Vaisseau cale plus à la poupe qu'à la proue, c'est-à-dire, par le quart de la différence du tirant d'eau. Supposant cette différence de deux pieds, on aura $fg = \frac{1}{2}.130 = 65$. La quantité x exprimera ici la profondeur à laquelle le point F est submergé dans le fluide, & cette profondeur est $= 5.3\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$: on a, de plus, $y = \frac{2}{3}FE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.130 = 43\frac{1}{3}$, qui est la distance du point F au centre des résistances du triangle *: donc $\int gx^{\frac{1}{2}}y = 65.\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.43\frac{1}{3} = 11787$, & $\frac{1}{2}mu\int\int gx^{\frac{1}{2}}y = 5893\frac{1}{2}mu$; & cette quantité étant ajoutée à $17137\,mu$, le Moment total sera de $\frac{1}{2}mu\int\int gx^{\frac{1}{2}}y = 23031\,mu$.

(219.) Il est nécessaire d'ajouter à ce résultat les Moments qui proviennent du bordage, de la quille, de l'étambot, du gouvernail, de l'étrave, & du taille-mer. Le bordage augmente la valeur de $fgx^{\frac{1}{2}}y$, suivant la raison dans laquelle augmente $gx^{\frac{1}{2}}$, ou suivant $x^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire (181), de $\frac{1}{35}$: donc pour ce qui concerne le bordage, l'augmentation sera $= 658\,mu$. La quille, la contre quille, & la fausse quille, peuvent être considérées comme un rectangle de 2 pieds de hauteur, & de 130 pieds de longueur, dont 75 pieds sont à la poupe, relativement au centre de gravité, & 55 pieds à la proue: on aura donc pour la poupe $fg = 75.2 = 150$, & pour la proue $fg = 55.2 = 110$. La quantité x est (182.) pour les deux parties $= \frac{17}{2}$: par conséquent on aura, pour la poupe, $fgx^{\frac{1}{2}} = 645$, & pour la proue, $fgx^{\frac{1}{2}} = 473$. Multipliant ces deux quantités par $\frac{75}{2}$ & $\frac{55}{2}$, qui expriment les distances dont sont éloignés les centres des résistances de celui de gravité, on aura, pour la poupe, $fgx^{\frac{1}{2}}y = 24562\frac{1}{2}$, & pour la proue, $fgx^{\frac{1}{2}}y = 13007\frac{1}{2}$;

* Car le centre des résistances de ce triangle est sensiblement confondu avec son centre de gravité, & la distance de ce dernier au point F est à très-peu près $= \frac{2}{3}FE$.

la différence de ces deux quantités eſt 11555 : ainſi l'on aura, pour ce qui concerne la quille, $\frac{1}{2}\, mu \int fgx^{\frac{1}{2}} y = 5777 \frac{1}{2}\, mu$.

(220.) L'étambot & le gouvernail réunis, ont été conſidérés comme un trapeſe (182.), & ſa réſiſtance a été trouvée $= 194\, mu$: cette quantité étant donc multipliée par 80, diſtance du centre de réſiſtance du trapeſe à celui de gravité; on aura le Moment 15520 *mu*.

(221.) L'étrave & le taille-mer réunis, ont auſſi été ſuppoſés (182.) former un autre trapeſe, & ſa réſiſtance a été trouvée $= 132 \frac{1}{6}\, mu$: ainſi, cette quantité étant multipliée par $62 \frac{2}{3}$, diſtance du centre de réſiſtance de ce trapeſe à celui de gravité, on aura le Moment 8280 *mu*.

(222.) Les Moments qui réſultent du bordage, de la quille, de l'étambot, & du gouvernail, étant réunis, font une ſomme de $21955 \frac{1}{2}\, mu$: retranchant de cette ſomme les Moments de l'étrave & du taille-mer, qui font 8280 *mu*, il reſtera $13675 \frac{1}{2}\, mu$; & ajoutant ce dernier à ceux du corps du Navire, qui ſont 23031 *mu*, le total des Moments qui obligent le Vaiſſeau à arriver, en vertu de la réſiſtance latérale, ſera $= 36706 \frac{1}{2}\, mu$.

(223.) Ayant trouvé les Moments pour une diſpoſition quelconque du Navire, on trouvera ceux qui correſpondent à toute autre diſpoſition, dans laquelle le Navire ſeroit plus, ou moins, ſubmergé dans le fluide de la quantité n, parce que l'augmentation, ou la diminution, des Moments eſt comme celle des réſiſtances, puiſque dans ce changement y ne varie pas. Cette augmentation, ou diminution, comme on l'a dit (187 & *Note.*), ſuit, pour tous les Moments, excepté ceux qui proviennent de la quille, la raiſon de 1 à $\frac{1}{12} n$: & pour ceux de la quille, celle de 1 à $\frac{1}{36} n$. Suppoſant donc, comme on l'a fait précédemment, que le Vaiſſeau eſt plus calé de 6 pouces, on aura $n = \frac{1}{2}$: la premiere augmentation ſera $= (36706 \frac{1}{2} - 5777 \frac{1}{2}) \frac{1}{12} nmu = 1288 \frac{2}{3}\, mu$, & la ſeconde $= (5777 \frac{1}{2}) \frac{1}{36} nmu = 80 \frac{1}{4}\, mu$. Ces Moments étant donc ajoutés aux $36706 \frac{1}{2}\, mu$, trouvés ci-deſſus, on aura 38705 *mu* pour la véritable expreſſion du Moment qui ſollicite le Vaiſſeau de 60 canons à arriver, ce Vaiſſeau étant calé juſqu'à ſa véritable ligne d'eau.

(224.) Si l'on diviſe ces Moments par la réſiſtance totale qu'éprouve le même Vaiſſeau, laquelle (187.) eſt $= 3316\, mu$, il vient au quotient 11 pieds $\frac{2}{3}$, c'eſt la quantité dont le centre des réſiſtances latérales eſt éloigné vers la poupe à l'égard du centre de gravité, en ſuppoſant que le Vaiſſeau ſoit calé de 2 pieds de plus à la poupe qu'à la proue. Mais ſi l'on ſuppoſe que la quille eſt ho-

rifontale, comme dans ce cas il faudroit fouftraire (218.) la quantité $\frac{5893\frac{1}{2}\,mu}{3316\,mu}$, on auroit feulement 9 pieds $\frac{1}{4}$, à peu près, pour la diftance dont le centre des réfiftances eft éloigné du centre de gravité.

(225.) Ayant une fois trouvé les Moments qu'éprouve un Vaiffeau, on peut trouver, avec facilité, ceux qui correfpondent à un autre Vaiffeau, dont les fonds font femblables à ceux du premier : car la formule $\frac{1}{4}\,mu\int\int gx^{\frac{3}{2}}y$ varie fuivant les racines quarrées des feptiemes puiffances des dimenfions linéaires des carenes (207 *Note.*) : c'eft-à-dire que, m étant la largeur du Vaiffeau dont le Moment Q eft connu, & M celle du Vaiffeau dont on cherche le Moment, ce Moment cherché fera $= \frac{M^{\frac{7}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}\,Q$, bien attendu que le Moment Q eft celui qu'éprouveroit le premier Vaiffeau, étant calé ou fubmergé dans le fluide, de la même façon que l'eft le fecond. La quantité dont le premier Vaiffeau doit être plus ou moins calé pour qu'il foit dans une difpofition femblable à celle du fecond, eft (145.), $= \frac{v - \frac{m^3}{M^3}V}{a}$. Subftituant cette valeur à la place de n dans les expreffions des augmentations, ou diminutions, des Moments du Vaiffeau de 60 canons, qui font $(36706\frac{1}{8} - 5777\frac{1}{4})\,\frac{1}{12}\,nmu = 2578\frac{1}{4}\,nmu$, & $(5777\frac{1}{4})\frac{1}{36}\,nmu = 160\frac{1}{2}\,nmu$, ces expreffions fe changeront en celles-ci, $\frac{2578\frac{1}{4}\,mu}{a}(v - \frac{m^3}{M^3}V)$, & $\frac{160\frac{1}{2}\,mu}{a}(v - \frac{m^3}{M^3}V)$; par conféquent, le Moment qu'éprouvera le Vaiffeau de 60 canons, fuppofé dans la même difpofition que l'autre, fera $= 38075\,mu - \frac{2578\frac{1}{4}\,mu}{a}(v - \frac{m^3}{M^3}V) - \frac{160\frac{1}{2}\,mu}{a}(v - \frac{m^3}{M^3}V) = 38075\,mu - \ldots \frac{2738\frac{1}{4}\,mu}{a}(v - \frac{m^3}{M^3}V) = 38075\,mu - \frac{2738\frac{1}{4}\,mu}{5500}(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)$: & celui qu'éprouvera le fecond Vaiffeau dont la largeur eft M, fera $= \frac{38075\,M^{\frac{7}{2}}\,mu}{(42)^{\frac{7}{2}}} - \frac{2738\frac{1}{4}\,M^{\frac{7}{2}}\,mu}{5500\,(42)^{\frac{7}{2}}}(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V) = \ldots \frac{M^{\frac{7}{2}}\,mu}{(42)^{\frac{7}{2}}}\left(38075 - \frac{2738\frac{1}{4}}{5500}(68650 - \frac{(42)^3}{M^3}V)\right)$.

(226.) Pour le Vaiffeau de 70 canons, nous avons $M = 48$, $V = 96500$, donc le Moment qu'éprouvera ce Vaiffeau fera $= \frac{(8)^{\frac{7}{2}}\,mu}{(7)^{\frac{7}{2}}}\left(38075 - \frac{2738\frac{1}{4}}{5500}(68650 - (\frac{7}{8})^3\,96500)\right) = 57577\,mu$, quantité qui, divifée par la réfiftance latérale 4391 mu qu'éprouve ce

Vaisseau, donne pour quotient 13 pieds $\frac{1}{2}$; c'est ce dont le centre des résistances est plus à la poupe que le centre de gravité.

(227.) Dans la Frégate de 22 canons, on a $M = 32$, & $V = 25170$: donc le Moment dont elle éprouvera l'action, sera $= \frac{(16)^{\frac{7}{2}} mu}{(21)^{\frac{7}{2}}} \left(38075 - \frac{2738\frac{3}{4}}{5500}\left(68650 - \left(\frac{21}{16}\right)^3 25170\right)\right) = 12830\, mu$; cette quantité étant divisée par la résistance latérale qu'éprouve la Frégate laquelle est $= 1426\, mu$, il vient au quotient 9 pieds, qui est la distance dont le centre des résistances est éloigné vers la poupe du centre de gravité.

(228.) Dans le Vaisseau à trois ponts, on a $M = 51$. & $V = 128293$: donc le Moment dont il éprouve l'action, sera $= \ldots$ $\frac{(17)^{\frac{7}{2}} mu}{(14)^{\frac{7}{2}}} \left(38075 - \frac{2738\frac{3}{4}}{5500}\left(68650 - \left(\frac{14}{17}\right)^3 128293\right)\right) = 78071\, mu$; quantité qui, divisée par la résistance latérale qu'éprouve ce Vaisseau, laquelle est $= 5769\, mu$, donne pour quotient 13 pieds $\frac{1}{2}$; c'est la distance dont le centre des résistances est plus à la poupe que le centre de gravité.

CHAPITRE VIII.

Des Moments qu'éprouve le Vaisseau dans son mouvement de rotation autour d'un axe horisontal; mouvement que les Marins appellent le Roulis, *ou le* Tangage.

(229.) Les Moments qu'éprouve le Vaisseau, dans son mouvement de rotation, peuvent être différents, suivant l'axe horisontal sur lequel on suppose que ce mouvement s'exécute; mais nous les réduirons, comme nous l'avons fait ci-devant, à deux cas, l'un où l'axe autour duquel se fait le mouvement, est supposé mené de la poupe à la proue; & cette rotation est ce que les Marins appellent le *Roulis:* & l'autre dont l'axe est perpendiculaire au premier qui est ce qu'ils appellent le *Tangage.* Mais les Moments produits par l'un & l'autre mouvement, doivent se déduire des principes généraux que nous avons établis, quoique M. *Bouguer*, (*Traité du Navire, Liv. II, Sect. III, Chap.* 3, §. 5.), ait regardé ces deux mouvements comme fort différents l'un de l'autre, & cela pour n'avoir pas considéré cet objet avec toute l'attention qu'il exige, comme on le verra dans son lieu.

(230.) Les Moments qu'éprouve un corps dont les deux moitiés font égales & femblables, & qui tourne fur un axe horifontal, font (*Tome I, Art.* 922.) = ... $\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx\left((k-x)^2 \sin\lambda.\sin n + 2y(k-x)\cos n + \frac{y^2\cos n^2}{\sin\lambda.\sin n}\right)$. La premiere quantité $cx^{\frac{1}{2}}dx(k-x)^2\sin\lambda.\sin n$, eft (177.) * = ... $x^{\frac{1}{2}}fg(k-x)^2 = k^2x^{\frac{1}{2}}fg - 2kx^{\frac{3}{2}}fg + fgx^{\frac{5}{2}}$. Pour réduire la feconde $2cx^{\frac{1}{2}}dxy(k-x)\cos n$, nous avons $1 : \cos n$ (finus de NML) :: $dx\,(ML) : NL = dx\cos n$; quantité que nous avons repréfentée par h, (197.): donc cette quantité fera $= 2cx^{\frac{1}{2}}hyk - 2cx^{\frac{3}{2}}hy$. Introduifant dans la troifieme $\frac{cx^{\frac{1}{2}}dxy^2\cos n^2}{\sin\lambda.\sin n}$, la valeur h de $dx\cos n$, elle fe change en $\frac{cx^{\frac{1}{2}}hy^2\cos n}{\sin\lambda.\sin n}$: & puifque $c\sin\lambda = f$, (177.), on aura $\sin\lambda = \frac{f}{c}$, & $\frac{\cos n}{\sin n} = \frac{h}{g}$: donc cette troifieme quantité fera $\frac{c^2x^{\frac{1}{2}}h^2y^2}{fg}$: & ainfi les Moments qu'éprouve le Vaiffeau feront exprimés par $\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int\left(k^2fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{1}{2}} - 2chyx^{\frac{3}{2}} + \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right)$.

(231.) Nous avons déjà trouvé la plus grande partie de ces quantités pour le Vaiffeau de 60 canons, qui nous fert d'exemple. Commençant donc par les roulis, ou par les actions latérales, on aura (180.), $\int fgx^{\frac{1}{2}} = 4494$: & comme k eft (165 & 166.), $= 18 - 13\frac{5}{24} = 4\frac{19}{24}$, on aura $k^2\int fgx^{\frac{1}{2}} = 103183$. On a pareillement (197.), $\int fgx^{\frac{3}{2}} = 43471,4$: donc $2k\int fgx^{\frac{3}{2}} = 416661$. Pour trouver maintenant $\int fgx^{\frac{5}{2}} = \int fgx^{\frac{3}{2}}.x$, on multipliera chacune des valeurs de $\int fgx^{\frac{3}{2}}$ qui correfpondent aux efpaces compris entre deux lignes d'eau (197.), par la valeur correfpondante de x, & l'on aura

$\int fgx^{\frac{3}{2}}$.	x	=	$\int fgx^{\frac{5}{2}}$
1213,8 .	$\frac{21}{10}$	=	2549
5157,6 .	$\frac{56}{10}$	=	28882 $\frac{1}{2}$
9746,1 .	$\frac{91}{10}$	=	88689 $\frac{1}{2}$
13041,0 .	$\frac{126}{10}$	=	164316 $\frac{1}{2}$
14312,9 .	$\frac{161}{10}$	=	230437 $\frac{1}{2}$
	Somme.		514875 = la quantité $\int fgx^{\frac{5}{2}}$.

* Car, d'après l'*Article cité*, $c\sin\lambda = f$, & $dx\sin n = g$.

PLANC. I.

FIG. 31.

La quantité $\int chx^{\frac{1}{2}}y$ eſt (201.) $= 46338$: donc $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y = 444072$. Pour trouver $\int chyx^{\frac{3}{2}} = \int chx^{\frac{1}{2}}y \,.\, x$, nous multiplierons chacune des valeurs de $\int chx^{\frac{1}{2}}y$, qui correſpondent aux eſpaces compris entre deux lignes d'eau, par la valeur correſpondante de x, & l'on aura

$\int chx^{\frac{1}{2}}y \,.\, x$			$\int chyx^{\frac{3}{2}}$
4812	$.\ \frac{21}{10}$	=	10105
9610	$.\ \frac{56}{10}$	=	53816
12381	$.\ \frac{91}{10}$	=	112667
13435	$.\ \frac{126}{10}$	=	169281
6100	$.\ \frac{161}{10}$	=	98210
		Somme.	444079 = la quantité $\int chyx^{\frac{3}{2}}$

donc $2\int chyx^{\frac{3}{2}} = 888158$.

(232.) Enfin, pour trouver la valeur de $\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}$, qui eſt la ſeule de ces quantités que nous n'ayons pas encore calculée, il eſt néceſſaire d'avoir recours aux Tables des *Art.* 179 & 201, où nous avons exprimé les valeurs des produits fg & chy : on quarrera les derniers, & enſuite mettant en ordre, dans un autre Table, tant les fg que les quarrés $c^2h^2y^2$, comme on le voit dans la ſuivante, on en déduira les quotients $\frac{c^2h^2y^2}{fg}$, qui correſpondent aux eſpaces compris entre deux lignes d'eau ; prenant enſuite les ſommes des colonnes verticales, on multipliera chacune d'elles par la valeur correſpondante de $x^{\frac{1}{2}}$, (180.), & les produits ſeront . . . .

$\int \frac{c^2h^2y^2}{fg}$		$.\ x^{\frac{1}{2}}$		$\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}$
26461	$\frac{1}{3}$	$.\ \frac{4}{3}$	=	34615
43297	$\frac{11}{12}$	$.\ \frac{23}{10}$	=	99585
55000	$\frac{1}{6}$	$.\ \frac{71}{24}$	=	162709
64859	$\frac{1}{6}$	$.\ \frac{7}{2}$	=	227007
22432	$\frac{11}{18}$	$.\ \frac{127}{32}$	=	89031
			Somme.	612947 = la quantité $\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}$.

TABLE des Produits fg, $c^2h^2y^2$, & des quotients $\frac{c^2h^2y^2}{fg}$ dans les moments latéraux.

Entre Couples.	Entre les lignes d'eau. 1e. & 2e.			2e. & 3e.			3e. & 4e.			4e. & 5e.			5e. & Quille.		
	fg	$c^2h^2y^2$	$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$	fg	$c^2h^2y^2$	$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$	fg	$c^2h^2y^2$	$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$	fg	$c^2h^2y^2$	$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$	fg	$c^2h^2y^2$	$\frac{c^2h^2y^2}{fg}$
& XXVII	4. 9	18.9	4. 0												
VII & XXIV	13.10	232.0	667. 5	13. 4	3491	261.10	9. 2	125	13. 5						
IV & XXI	18. 3	22500.0	1232. 9	15. 1	24858	1648. 0	17. 6	5650	322.10	17. 8	1457	82. 4	15. 4	3	0. 2
I & XVIII	20. 4	30800.0	1514. 9	17. 6	50662	2909. 0	14. 2	43428	3065. 6	12. 4	12656	1023. 6	17. 1	500	29. 3
III & XV	23. 0	29784.0	1295. 0	19. 3	56922	2957. 0	16.10	64093	3807. 6	11. 8	36258	3107. 9	10. 6	3220	306. 8
& XII	23. 0	28730.0	1249. 1	20. 9	54096	2607. 0	18. 3	70313	3852. 9	12. 0	54483	4540. 3	7. 7	6986	921. 3
I & IX	23.11	25600.0	1070. 5	21. 7	53515	2479. 5	19. 0	67470	3551. 0	14. 0	68121	4865. 9	7. 7	11972	1578. 9
& VI	23.11	25787.0	1078. 3	22. 6	57041	2646. 3	19.10	67167	3386. 7	15. 4	82369	5371.11	4. 4	16271	2214. 3
& III	23.11	85975.0	1086. 1	22. 8	51718	2281. 8	20. 1	70313	3501. 1	16. 2	87715	5425. 8	7. 2	18861	2631. 9
& o	23.11	26163.0	1394. 7	22. 8	51984	2293. 5	20.11	64516	3084. 5	16. 9	88457	5281. 0	7. 2	19975	2787. 2
0 & 3	17. 6	19367.0	1106. 8	16.11	38481	2274. 9	15. 5	47378	3073. 2	12. 4	65862	5340. 2	5. 2	15129	2928. 2
3 & 6	23.11	25975.0	1086. 1	22. 8	51718	2281. 8	20. 4	63924	3143.10	16. 9	83955	5012. 1	7. 2	18861	2631. 9
6 & 9	23.11	25600.0	1070. 5	22. 6	54634	2428. 3	20. 1	61939	3084. 1	15.11	84875	5332. 5	7. 9	17777	2258. 4
9 & 12	23. 4	24859.0	1065. 4	21. 0	53130	2530. 0	19. 3	71556	3717. 2	15.11	75763	4760. 0	8. 3	14400	1745. 6
12 & 15	23. 0	27363.0	1189 8	21. 0	56763	2703. 0	18. 5	69608	3779. 7	15. 2	66564	4388.10	8.10	11430	1294. 0
15 & 18	23. 0	29987.0	1303. 9	20. 5	51984	2505. 3	17. 8	69608	3940. 1	12. 0	54522	4543. 6	9.11	6588	664. 4
18 & 21	22. 9	31892.0	1401.1	20. 6	46728	2279. 5	16. 4	64093	3924. 1	10. 0	40267	4026. 8	11. 3	3369	286. 9
21 & 24	22. 2	31624.0	1426. 0	19. 5	41345	2129. 4	15. 7	42642	2736. 4	13. 8	17889	1309. 0	12.10	1554	121. 1
24 & 27	21.11	33267.0	1517.19	19. 0	32882	1730 8	15. 4	22251	1451. 2	17. 1	6304	369. 0	18. 6	540	29. 2
27 & 30	17. 0	49878.0	2934. 1	15. 5	26541	1721. 7	17. 0	8680	510. 7	19. 4	1412	73. 0	21. 6	91	4. 3
30 & 33	14. 1	27945.0	1972. 0	14. 6	9120	622. 1	19.11	1072	13.10	22. 5	141	6. 4	23.11	9	0. 4
& l'Etambot.	7. 1	738.0	104. 5	9. 6	79	8. 4	10.10	14	1. 2	9. 1	0	0. 0	9. 1	0	0. 0
Sommes. . . .			26401. 4			43297.11			55000. 2			64859. 2			22432.11

(233.) Il eſt néceſſaire d'ajouter aux ſix quantités trouvées, les Moments qui proviennent de l'épaiſſeur des bordages, de la quille, de l'étambot, du gouvernail, de l'étrave, & du taille-mer.

La premiere quantité $\int k^2 fgx^{\frac{1}{2}} = 103183$, augmente en vertu de l'épaiſſeur des bordages, dans la raiſon $x^{\frac{1}{2}}$, ou (181.) dans celle de $\left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ à $\left(\frac{35}{2}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; c'eſt-à-dire, dans la raiſon de 1 à $1+\frac{1}{35}+\frac{1}{35.210}$ *; de ſorte que l'augmentation eſt $2948 + 14 = 2962$: donc, en tenant compte de l'augmentation produite par l'épaiſſeur du bordage la quantité $\int k^2 fgx^{\frac{1}{2}}$ deviendra $= 106145$.

La ſeconde quantité $2k\int fgx^{\frac{3}{2}} = 416601$, augmente comme $x^{\frac{3}{2}}$, ou dans la raiſon de 1 à $1+\frac{1}{21}+\frac{1}{21.70}$; ainſi, l'augmentation eſt $=$ $19638 + 283 = 20121$: donc la quantité $2k\int fgx^{\frac{3}{2}}$ devient $= \ldots$ 436722, en tenant compte de l'augmentation produite par l'épaiſſeur du bordage.

* Voyez les Notes des *Articles* 187 & 200; car ces calculs ſont analogues à ceux qu'on y a développés, excepté qu'ici l'Auteur calcule trois termes de la ſérie au lieu de deux.

La troisieme quantité $\int fgx^{\frac{5}{2}} = 514875$ augmente comme $x^{\frac{2}{2}}$, ou dans la raison de 1 à $1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{15.42}$; ainsi, l'augmentation est $= 34323 + 817 = 35140$: donc en tenant compte de l'augmentation produite par l'épaisseur du bordage, on a $\int fgx^{\frac{5}{2}} = 550015$.

La quatrieme quantité $2k\int chx^{\frac{3}{2}}y = 444072$, augmente comme $x^{\frac{2}{2}}y$, à cause que h est comme x; c'est-à-dire, qu'ayant d'abord augmenté comme $x^{\frac{3}{2}}$, les résultats augmentent comme y, ou, ce qui revient au même, elle augmente d'abord dans la raison de 1 à $1 + \frac{1}{35} + \frac{1}{35.210}$, & ensuite dans celle de 1 à $1 + \frac{1}{42}$; de sorte que la premiere augmentation est $= 12748$, & la seconde $= 10573 + 303$: donc la quantité $2k\int chx^{\frac{3}{2}}y = 467696$, en tenant compte de l'augmentation produite par l'épaisseur du bordage.

La cinquieme quantité $2\int chyx^{\frac{5}{2}} = 888158$, augmente comme $x^{\frac{5}{2}}$ & comme y, ou d'abord dans la raison de 1 à $1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{21.70}$, & ensuite dans celle de 1 à $1 + \frac{1}{42}$. La premiere augmentation est $= 42897$, & la seconde $= 21147 + 1020$: donc en tenant compte de l'augmentation produite par l'épaisseur du bordage, la quantité $2\int chyx^{\frac{5}{2}}$ devient $= 953222$.

Enfin la sixieme quantité $\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg} = 612947$, augmente comme $x^{\frac{1}{2}}$, & comme y^2, ou d'abord dans la raison de 1 à $1 + \frac{1}{35} + \frac{1}{35.210}$, & ensuite dans celle de 1 à $1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{(42)^2}$; la premiere augmentation est donc $= 17596$, & la seconde $= 29535 + 848$: donc avec l'augmentation produite par le bordage, on a... $\int \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg} = 660926$.

Prenant maintenant la somme de ces six nouvelles quantités, nous aurons, pour ce qui concerne le corps du Navire avec son bordage, $\int \left(k^2fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{3}{2}} - 2chyx^{\frac{5}{2}} + \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right) = 394838$, & $\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int \left(k^2fgx^{\frac{1}{2}} - 2kfgx^{\frac{3}{2}} + fgx^{\frac{5}{2}} + 2ckhyx^{\frac{3}{2}} - 2chyx^{\frac{5}{2}} + \frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg}\right) = \frac{197419\,mV}{dt}$.

(234) Pour ce qui concerne la quille, nous avons (182.), $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}} = 560\frac{1}{2}$, & (199.), $x = 19$: donc ayant $k = 4\frac{19}{24}$, on aura

$k^2 - 2kx + x^2 = (14\frac{1}{14})^2 = 201\frac{81}{14}$, & $\frac{1}{4} ffgx^{\frac{1}{2}} (k-x)^2 = 560\frac{5}{6} \cdot 201\frac{81}{14} = 113083$. Les autres quantités sont nulles, à cause de $h = 0$; donc pour ce qui concerne la quille, les Moments seront $= \frac{113083\, mV}{dt}$.

(235.) L'étambot & le gouvernail, réunis, étant supposés former un trapese vertical, ont leur différencielle de résistance (182.), $= \frac{1}{4} mu\left(e + \frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$, & son Moment sera (*Tome I, Art.* 922.) $= \frac{mV}{2\,at}\int (k-x)^2\left(e + \frac{fx}{a}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$; en intégrant cette quantité, on aura $\frac{mV}{2\,dt}\left(\frac{2}{3}k^2ex^{\frac{3}{2}} + \frac{2k^2fx^{\frac{5}{2}}}{5a} - \frac{4}{5}kex^{\frac{5}{2}} - \frac{4kfx^{\frac{7}{2}}}{7a} + \frac{2}{7}ex^{\frac{7}{2}} + \frac{2fx^{\frac{9}{2}}}{9a}\right)$: ou, en faisant (182.) $x = a$, $e = 3$, $f = 5$, $a = 21$, ce Moment sera $= \frac{mV}{2\,dt}\left(4k^2 - \frac{184}{35}k(21) + \frac{124}{63}(21)^2\right)(21)^{\frac{3}{2}} = 20738\frac{mV}{dt}$. Les autres quantités s'évanouissent, à cause de $h = 0$.

(236.) L'étrave & le taille-mer, joints ensemble, ont été pareillement considérés (182.) comme un autre trapese vertical, sans autre différence avec le précédent, si ce n'est que dans celui-ci, $e = 6$, & $f = -2$. Donc leur Moment sera $= \ldots\ldots\ldots$ $\frac{mV}{2dt}\left(\frac{16}{5}k^2 - \frac{128}{35}k(21) + \frac{80}{63}(21)^2\right)(21)^{\frac{3}{2}} = 21633.\frac{mV}{dt}$; les autres quantités s'évanouissent également, à cause de $h = 0$.

(237.) Prenant maintenant la somme des quatre quantités $197419 + 113083 + 20738 + 21633 = 352873$, on aura la totalité des Moments que le Vaisseau de 60 canons éprouve dans le roulis $= 352873 \cdot \frac{mV}{dt}$.

(238.) Pour trouver les mêmes Moments dans le cas où le Navire seroit plus calé de la quantité n, nous sçavons que chacune des valeurs déjà trouvées, doit être à chacune des valeurs nouvelles qui doivent en résulter, (187.) comme $\left(\frac{107}{6}\right)^{\frac{q}{2}}$ est à $\left(\frac{107}{6} + n\right)^{\frac{q}{2}}$, q exprimant un nombre quelconque, ou le numérateur de l'exposant quelconque qu'auroient les quantités; ou, comme l'unité est à $1 + \frac{1}{2}q\left(\frac{6n}{107}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^2 + \frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^3 + \ldots\ldots$ $\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{q-6}{8}\right)\left(\frac{6n}{107}\right)^4 +$ &c., ou en faisant $n = \frac{1}{2}$, qui est la quantité dont nous supposons le Vaisseau plus calé, ainsi que nous l'avons fait dans les *Chapitres* précédents, comme l'unité est à $1 + \frac{1}{2}q\left(\frac{3}{107}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^2 + \frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^3 + \ldots\ldots$ $\frac{1}{2}q\left(\frac{q-2}{4}\right)\left(\frac{q-4}{6}\right)\left(\frac{q-6}{8}\right)\left(\frac{3}{107}\right)^4 +$ &c.

(239) La premiere quantité $k^2\int\int fgx^{\frac{1}{2}} = 106145$, augmente dans la raison de $x^{\frac{3}{2}}$: donc $q=3$, & cette valeur sera à la nouvelle qui en résultera, comme 1 est à $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; & par conséquent cette nouvelle valeur est $=106145+4464+31=110640$.

La seconde quantité $2k\int\int fgx^{\frac{3}{2}} = 436722$, augmente dans la raison de $x^{\frac{5}{2}}$: donc $q=5$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme 1 est à $1+\frac{15}{214}+\frac{15.3.3}{214.428}+\frac{15.9.3}{214.428.642}$. Partant cette nouvelle valeur est $=436722+30611+643+3=467979$.

La troisieme quantité $\int\int fgx^{\frac{5}{2}} = 550015$, augmente dans la raison de $x^{\frac{7}{2}}$: donc $q=7$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme 1 est à $1+\frac{21}{214}+\frac{21.5.3}{214.428}+\frac{21.15.3.3}{214.428.642}+\frac{21.15.9.3}{214.428.642.856}$; par conséquent cette nouvelle valeur sera $=550015+53937+1892+26+6=605906$.

La quatrieme quantité $2k\int chx^{\frac{1}{2}}y = 467696$, augmente dans la raison de $x^{\frac{3}{2}}$: donc $q=3$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme, 1 est à $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$; d'où l'on conclud que cette nouvelle valeur sera $=467696+19670+138=487504$.

La cinquieme quantité $2\int chyx^{\frac{3}{2}} = 953222$, augmente dans la raison de $x^{\frac{5}{2}}$: donc $q=5$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme 1 est à $1+\frac{15}{214}+\frac{15.9}{214.428}+\frac{15.9.3}{214.428.642}$: partant, cette nouvelle valeur est $=953222+66814+1405+7=1021448$.

La sixieme quantité $\int\frac{c^2h^2y^2x^{\frac{1}{2}}}{fg} = 660926$, augmente dans la raison de $x^{\frac{3}{2}}$: donc $q=3$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme 1 est à $1+\frac{9}{214}+\frac{9.3}{214.428}$: partant, cette nouvelle valeur sera $=660926+27796+195=688917$.

Pour la quille, la quantité $\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}} = 560\frac{1}{6}$, augmente dans la raison de $x^{\frac{1}{2}}$: donc $q=1$, & cette valeur sera à la nouvelle, comme 1 est $1+\frac{3}{214}$; par conséquent, cette nouvelle valeur est $=568$.

La quantité $(k-x)^2=(4\frac{19}{24}-19)^2=201\frac{21}{24}$, augmente dans la raison de $(4\frac{19}{24}-19)^2$ à $(4\frac{19}{24}-19\frac{1}{2})^2$: donc elle sera mainte-

nant $= 215\frac{1}{6}$; par conséquent, le Moment de la quille sera $= 568 . 215\frac{1}{6} = 122593$.

Pour l'étambot & le gouvernail, réunis, la premiere quantité $2k^2(21)^{\frac{1}{2}} = 4456$, augmente dans la raison de $x^{\frac{3}{2}}$: donc $q = 3$, & elle sera à la nouvelle dans celle de l'unité à $1 + \frac{9}{214} + \frac{9.3}{214.428}$; par conséquent, cette valeur nouvelle sera maintenant $= 4456 + 187 + 7 = 4644$.

La seconde quantité $(\frac{92}{35})k\,(21)^{\frac{5}{2}} = 25440$, augmente dans la raison de $x^{\frac{7}{2}}$, ou à cause de $q = 5$, dans la raison de l'unité à $1 + \frac{15}{214} + \frac{15.9}{214.428} + \frac{15.9.3}{214.428.642}$: elle sera donc maintenant $= 25440 + 1783 + 38 + 0 = 27261$.

La troisieme quantité $\frac{62}{63}\,(21)^{\frac{7}{2}} = 41766$, augmente dans la raison de $x^{\frac{7}{2}}$, ou à cause de $q = 7$, dans la raison de l'unité à $1 + \frac{21}{214} + \frac{21.15}{214.428} + \frac{21.15.9}{214.428.642} + \frac{21.15.9.3}{214.428.642.856}$: par conséquent, cette quantité sera maintenant $= 41766 + 4099 + 144 + 2 + 0 = 46011$.

Prenant maintenant la somme de ces trois quantités, la totalité des Moments qui résultent de l'étambot & du gouvernail, réunis, sera $= 14106$.

Pour l'étrave & le taille-mer, joints ensemble, les trois quantités 3595, 17697, & 26945, augmentent dans la même raison que celles qui leur correspondent à l'étambot: donc elles seront maintenant 3747, 18963, & 29684, lesquelles jointes ensemble, font 14468. La totalité des moments, le Navire étant calé de 6 pouces de plus, sera donc $(110640 - 467979 + 605906 + 487504 - 1021448 + 688917 + 122593 + 14106 + 14468)\frac{mV}{dt} = \ldots\ldots$ $554707\frac{mV}{dt}$ *.

(240.) En procédant de la même maniere, on calculera les Moments qui résultent du mouvement de rotation du Navire sur un axe horisontal perpendiculaire au premier, qui est le mouvement que les Marins appellent le *Tangage*, & on pourra également calculer les mêmes Moments pour d'autres Navires semblables. Nous nous dispenserons cependant d'entrer dans le détail de tous ces calculs qui nous

* Il y a quelques-uns de ces résultats numériques qui sont médiocrement exacts; mais comme l'erreur est petite, & que ces calculs ne peuvent servir que d'exemple, & tiennnent d'ailleurs à d'autres parties que nous n'avons pu corriger (179. *Note.*), nous laissons encore ceux-ci tels qu'ils se trouvent dans l'Original.

meneroient trop loin, parce que ces Moments different très-peu de ceux qu'on a déjà calculés (206.), pour la ſtabilité, ou la force du Vaiſſeau pour porter la voile dans le ſens de ſa longueur, en ſuppoſant la vîteſſe $u = 0$, leſquels Moments nous avons trouvés $= 7851843\, m\, \text{ſin}\, \Delta$: de ſorte que, ſans craindre de tomber dans une erreur conſidérable, on peut prendre, pour les recherches dont nous avons beſoin, l'expreſſion $7851843 \frac{mV}{dt}$ pour celle de ces Moments. Une détermination plus préciſe ne pouvant ſervir qu'à trouver le temps de la durée des balancements du tangage, & non pour nous faire connoître les Moments d'inertie que le Vaiſſeau éprouve dans ce balancement, ce qui eſt l'unique objet que nous ayons en vue, ſeroit ſuperflu de nous arrêter davantage ſur ce point.

CHAPITRE IX.

Des Moments dont les parties du Vaiſſeau éprouvent l'action, & qui le font Arquer *.

(241.) ON a déjà vu (*Tome I*, 262), que, pour qu'un corps ſubmergé dans un fluide en repos, demeure ſans mouvement, ou ſans aucune action verticale, il faut que ſon poids ſoit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace. Nous avons conclu de ce principe (105.), que, pour que la maſſe totale du Vaiſſeau ſoit flottante ſur l'eau ſans ſe ſubmerger plus ou moins, il faut que ſon poids ſoit égal à celui du volume du fluide qu'il déplaceroit. En raiſonnant de la même maniere pour chaque partie, chaque ſection, ou chaque eſpace compris entre les contours d'un, de deux, ou d'un plus grand nombre de couples, il eſt évident que, pour que les actions qui s'exercent ſur chacune de ces parties, conſidérée ſéparément, ſoient détruites, il faut que le poids de chaque ſection, ou couple, avec le poids qu'on met deſſus, ſoit égal à celui du volume d'eau que chaque couple, ou ſection, doit déplacer; c'eſt-à-dire que, pour que la partie du corps du Navire renfermée entre les couples 0 & 3, par exemple, ou entre deux autres couples quelconques, ne ſoit ſoumiſe à l'action d'aucune force qui tende à la mouvoir, ou à la tirer de la ſituation dans laquelle

* En Eſpagnol *Quebranto*.

elle

elle se trouve par rapport au reste du Navire, il est nécessaire que le poids de cette partie, c'est-à-dire, le poids des bois & des fers qui entrent dans sa composition, avec le poids de la partie de la charge qu'elle renferme, soit égal au poids du volume de fluide qu'elle doit déplacer. Ces deux poids n'étant pas égaux, l'excès du plus grand sur le plus petit agit dans la direction du premier, pour mouvoir cette partie du Navire, ou pour la tirer de l'état où elle se trouve par rapport aux autres; & cette force n'étant pas détruite, doit être soutenue par la résistance des fibres du Navire (*Tome I*, 208); c'est-à-dire, par la résistance des pieces de bois qui composent le corps du Navire, & font, par leur réunion, qu'il peut être considéré comme une seule piece, ou comme un seul levier.

(242.) De cette sorte, si tous les couples, ou toutes les parties du Vaisseau étoient chargées d'un poids égal, comme elles le sont à peu près, lorsque le corps du Vaisseau est entiérement vuide, attendu que tous les couples contiennent à, très peu près, la même quantité de bois; car si les couples du milieu ont plus de largeur, en récompense, ceux des extrêmités sont plus élevés; si, dis-je, toutes les parties étoient également pesantes, il s'ensuivroit que pour qu'il ne demeurât aucune force dont l'action dût être vaincue, ou supportée, par la résistance du bois, il seroit nécessaire que les volumes du fluide que déplacent ces parties, fussent pareillement égaux. Mais dans le fait, les espaces, ou les volumes, qu'occupent les couples dans leur contour, vont en diminuant, à mesure qu'ils s'éloignent davantage du maître couple, & déplacent par conséquent un moindre volume d'eau; donc aussi à mesure que les couples s'éloignent davantage du maître couple, la force qui doit soutenir le poids qui agit sur eux, va en diminuant.

Supposons que les ordonnées o*B*, 3*D*, 6*E*, *&c.*, & *IIIF*, *VIG*, *&c.*, de la courbe *ABC*, expriment les amplitudes des sections, ou les aires des couples o*B*; 3*D*, 6*E*, *&c.*, & *IIIF*, *VIG*, *&c.*, qui sont submergées dans le fluide; ces mêmes aires, ou ordonnées, représenteront, parce qu'on a dit, les forces avec lesquelles le fluide les soutient, ou les pousse vers le haut. Si en même temps une autre ligne, droite ou courbe, *HI*, termine les ordonnées o*K*, 3*L*, 6*M*, *&c.* & *IIIN*, *VIO*, *&c.*, & que ces ordonnées représentent les poids qui agissent sur les mêmes points, ou sur les mêmes sections; il est clair que les droites *KB*, *LD*, *ME*, *&c.*, & *NF*, *OG*, *&c.* représenteront les forces restantes avec lesquelles les mêmes points, ou sections, sont poussés vers le haut; & les droites *AH*, *PQ*, *&c.*, & *RS*, *IC*, *&c.* marqueront celles avec lesquelles les sections corres- FIG. 36.

PLANC. VIII. pondantes sont poussées vers le bas : de sorte qu'il arrive de là que, quoique l'aire totale *ABC* soit égale à l'aire *AHIC*, attendu que le poids total du Vaisseau est égal au poids du volume de fluide qu'il déplace, cependant les parties *TBV* du milieu du Vaisseau sont excessivement poussées vers le haut, tandis que celles *TAH*, *VIC* des extrêmités, sont poussées vers le bas avec un excès de force semblable.

FIG. 37. (243.) On voit par-là que le Vaisseau se trouve dans le cas d'un levier *AB*, qui seroit tiré vers le haut par différents poids *C*, *D*, *E*, tandis que d'autres poids d'une pésanteur égale *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, &c., le tirent vers le bas. Car quoique le levier doive demeurer sans mouvement, attendu que les forces positives sont égales aux négatives ; cependant les forces en *I*, *K*, *L* doivent être soutenues par la résistance des fibres du même levier (*Tome I*, 208.), les forces des extrêmités tendant évidemment à le faire plier : & en effet elles doivent lui donner une courbure plus ou moins grande, selon l'excès de leur action sur la résistance des fibres.

(244.) Supposons maintenant que la partie de la proue du Navire qui est submergée dans le fluide, soit formée par la révolution
FIG. 36. d'une demi-ellipse *BGVC* ; & la partie submergée de la poupe par la révolution d'une parabole *BTA*, afin de nous approcher davantage de la vraie figure du Vaisseau, dont le volume est moindre à la poupe qu'à la proue. Supposons aussi que b soit la longueur de l'un quelconque des corps formés par la révolution de ces courbes ; a la plus grande profondeur au milieu ; x l'une quelconque des autres profondeurs ; & y l'une quelconque des longueurs comptées depuis le milieu. Cela posé, l'équation à l'ellipse sera $\frac{b^2}{a^2}x^2 = b^2 - y^2$ *, d'où l'on tire $x = \frac{a}{b}(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$: mais en exprimant par c la circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, on aura $\frac{1}{4}cx^2 = \frac{ca^2}{4b^2}(b^2 - y^2)$ pour l'expression d'une section quelconque faite perpendiculairement à la quille dans le demi-ellipsoïde de la proue ; & la quantité $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2 - y^2)ydy$, sera l'expression du Moment d'une différencielle quelconque du même demi-ellipsoïde. L'intégrale de cette différencielle, sçavoir, $\frac{mca^2}{4b^2}(\frac{1}{2}b^2y^2 - \frac{1}{4}y^4)$, ou $\frac{1}{16}mca^2b^2$, en fuisant $y = b$, exprimera le moment avec lequel l'avant du Vaisseau sera poussé vers le

* Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques*, de M. *Bezout*, Article 307 ; x est ici l'ordonnée, & y l'abscisse comptée du centre.

haut par le fluide, m exprimant la densité du même fluide. Nous avons, en même temps, $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2 - y^2)\,dy$ pour l'expression du poids d'une différencielle du même demi-ellipsoïde ; & l'intégrale $\frac{mca^2}{4b^2}(b^2y - \frac{1}{3}y^3)$, ou $\frac{1}{6}mca^2b$ est l'expression de son poids total. En supposant ce poids distribué également dans toute la longueur b *, on aura $\frac{1}{6}mca^2dy$ pour le poids, ou l'action vers le bas, que supporte chaque différencielle, & le moment qu'elle éprouve en vertu de ce poids, sera $= \frac{1}{6}mca^2ydy$; quantité dont l'intégrale $\frac{1}{12}mca^2y^2$, ou $\frac{1}{12}mca^2b^2$ sera le moment total. Ainsi $\frac{1}{12}mca^2b^2 - \frac{1}{16}mca^2b^2 = \frac{1}{48}mca^2b^2$, est le Moment avec lequel le demi-ellipsoïde est poussé vers le bas, en vertu de ces deux actions ; & si l'on divise ce moment par le poids $\frac{1}{6}mca^2b$ du demi-ellipsoïde, le quotient $\frac{1}{8}b$ exprimera la distance du milieu du Vaisseau au centre de gravité du demi-ellipsoïde, c'est-à-dire, au point où le poids total $\frac{1}{6}mca^2b$, étant supposé réuni, produiroit le même effet, & agiroit de la même maniere : de sorte que si B est l'origine du demi-ellipsoïde, & si l'on prend $ZX = \frac{1}{8}.oC$ **, l'action sera la même que si tout le poids $\frac{1}{6}mca^2b$ du demi-ellipsoïde étoit réuni dans le point X.

(245.) L'équation de la parabole de poupe est $\frac{b^2}{a}(a - x) = y^2$ ***, d'où l'on tire $x = \frac{a}{b^2}(b^2 - y^2)$. Une section du solide formé par la révolution de cette courbe, sera donc $= \frac{1}{4}cx^2 = \frac{ca^2}{4b^4}(b^2 - y^2)^2$; & $\frac{mca^2}{4b^4}(b^2 - y^2)^2ydy$ sera le Moment que produit une différencielle quelconque, dont l'intégrale $\frac{mca^2}{4b^4}(\frac{1}{2}b^4y^2 - \frac{1}{2}b^2y^4 + \frac{1}{6}y^6)$, ou $\frac{1}{24}mca^2b^2$, en faisant $y = b$, exprimera le Moment total avec lequel le demi-paraboloïde sera poussé vers le haut. (Le Moment résultant avec lequel le même paraboloïde est poussé vers le bas, sera donc $\frac{1}{12}mca^2b^2 - \frac{1}{24}mca^2b^2 = \frac{1}{24}mca^2b^2$) ****.

* Cette distribution égale du poids de l'ellipsoïde dans tous les points de sa longueur, est fondée sur ce que les couples, ou les sections renfermées par le contour des couples du Vaisseau, ont sensiblement le même poids, & sont, par conséquent, une même portion du poids total ; c'est-à-dire, que si l'on divise la portion de la proue en huit parties égales, par exemple, chacune pesera la huitieme partie du poids total. Ceci a déjà été expliqué en partie dans l'*Article* 242.

** On trouve, dans l'original, $ZX = \frac{1}{8}.3C$; mais c'est, sans doute, une faute d'impression ; car si B est l'origine de l'ellipsoïde, $b = oC$.

*** Car on voit que oB est l'axe de la parabole ; Ao l'axe de révolution ; que y & b sont, par conséquent, des ordonnées, dont $A - x$ & a sont les abscisses ; & que le parametre est $\frac{bb}{a}$, puisqu'il est égal au quotient du quarré d'une ordonnée divisée par l'abscisse correspondante. *Voy.* l'Ouvrage cité, *ibid.* 356.

**** Il est difficile de concevoir ce passage que nous avons mis entre deux parentheses : nous pensons même que c'est une faute de copiste, ou d'impression. Ce n'est pas une faute d'analyse ; car

Le poids d'une différencielle de ce corps est pareillement $\frac{mca^2}{4b^4}(b^2-y^2)^2dy$, dont l'intégrale $\frac{mca^2}{4b^4}(b^4y-\frac{2}{3}b^2y^3+\frac{1}{5}y^5)$, ou $\frac{2mca^2b}{15}$, en faisant $y=b$, est le poids total du demi-paraboloïde ; & $\frac{mca^2b^2}{15}$ est le Moment total qui agit vers le bas : de sorte que le Moment résultant des deux actions sera $=\frac{1}{15}mca^2b^2-\frac{1}{24}mca^2b^2=\frac{1}{40}mca^2b^2$. Divisant cette quantité par le poids total $\frac{2}{15}mca^2b$, il vient au quotient $\frac{3}{16}b$, qui est la distance ZY, dont le point Y est éloigné du milieu, ou de l'origine du paraboloïde ; & ce point est tel que si tout le poids $\frac{2}{15}mca^2b$ y étoit réuni, il en résulteroit le même effet. Maintenant, comme les deux Moments résultants doivent être égaux, pour qu'il y ait équilibre dans le Vaisseau, en faisant la longueur de la partie de la poupe $=B$, nous aurons $\frac{1}{40}mca^2B^2=\frac{1}{48}mca^2b^2$, ou $B:b::\sqrt{5}:\sqrt{6}$*, ou à très-peu-près comme 12 est à 13. Si donc e exprime la longueur du Vaisseau, on aura $\frac{12}{25}e$ pour la longueur du demi-paraboloïde de la poupe, & $\frac{13}{25}e$ pour celle du demi-ellipsoïde de la proue. La ligne ZY sera par conséquent $=\frac{12}{25}e.\frac{3}{16}=\frac{36}{400}$; ZX sera $=\frac{13}{25}e.\frac{1}{8}=\frac{26}{400}e$, & $YX=\frac{62}{400}e$. Dans le Vaisseau de 60 canons qui nous sert d'exemple, la longueur étant de 152 pieds, nous aurons $YZ=13$ pieds 8 pouces $\frac{4}{25}$; & $ZX=9$ pieds 10 pouces $\frac{14}{25}$.

(246) Comme le Vaisseau pese 43750 quintaux (112.), si l'on divise ce nombre dans la raison de YZ à ZX, ou de 18 à 13 **, le poids qui correspondra en Y sera $=18346$ quintaux $\frac{24}{31}$, & celui qui correspondra en X, sera $=25403$ quintaux $\frac{7}{31}$: ensorte que l'effet produit sur le Vaisseau sera le même que si ces poids $18346\frac{24}{31}$ & $25403\frac{7}{31}$ étoient placés en Y & en X, & agissoient dans la direction de leur pesanteur, tandis qu'une autre puissance équivalente à un poids de 43750 quintaux, & placée dans la verticale qui passe par Z, agiroit, au contraire, de bas en haut. On voit donc que

---

l'Auteur ne fait aucun usage de cette expression dans le reste du Chapitre. Nous aurions même supprimé cet endroit, si nous ne nous étions imposé la loi de ne point altérer le texte original.

* Il y a surement une faute en cet endroit. L'équation $\frac{1}{40}mca^2B^2=\frac{1}{48}mca^2b^2$, devient $\frac{1}{5}B^2=\frac{1}{6}b^2$, en divisant par $\frac{1}{8}mca^2$: donc $6B^2=5b^2$; ce qui donne $B:b::\sqrt{5}:\sqrt{6}$, & non $::\sqrt{6}:\sqrt{5}$, comme on le trouve dans l'original. On a corrigé les résultats numeriques des différences qui proviennent de cette faute.

** Il y a encore ici une méprise qui n'est pas même la suite de celle que nous avons fait remarquer dans la Note de l'*Article* précédent. C'est bien dans le rapport de YZ à ZX qu'il faut partager le poids du Vaisseau, puisque Z est le point d'équilibre, mais ce rapport n'est point celui de 13 à 12, comme le dit l'Auteur. Suivant ses propres déterminations, ce rapport seroit celui de 39 à 24, ou de 13 à 8. Mais, d'après nos corrections, ce rapport est celui de 18 à 13 ; car $YZ=\frac{36}{400}e$, & $ZX=\frac{25}{400}e$; quantités qui sont l'une à l'autre dans le rapport de 18 à 13. Nous avons encore corrigé les résultats numériques des différences qui proviennent de cette faute.

ces poids, ou ces forces, tendent à rompre le Vaiſſeau, c'eſt-à dire, à lui abaiſſer les extrêmités de poupe & de proue, tandis qu'il eſt comme ſuſpendu dans ſon milieu en Z, ou que ſon milieu eſt fortement pouſſé vers le haut, comme on l'obſerve en effet dans la pratique. Chacun des Moments avec leſquels agiſſent les poids en Y & en X, ſera $25403\frac{7}{31}.13$, ou $18346\frac{24}{31}.18$ * $= 330242$, & l'action de cette force énorme n'eſt ſupportée que par la réſiſtance des fibres des bois qui entrent dans la conſtruction du corps du Vaiſſeau par leur union, par leur liaiſon, & par la force des fers avec leſquels on les fortifie, & avec leſquels les différentes pieces ſont ſaiſies. Lorſque tout l'ouvrage n'eſt pas exécuté, dans toutes ſes parties, avec la ſolidité & les proportions qui conviennent, la plus foible partie cede, & le Vaiſſeau ſe courbe vers le bas; c'eſt ce qu'on appelle un Vaiſſeau *Arqué*, ou *Caſſé*, parce qu'alors il n'eſt pas dans ſon état naturel.

(247.) A meſure que les extrêmités du Vaiſſeau s'abaiſſent, leur volume qui entre dans le fluide augmente; & comme le volume total déplacé demeure conſtant, il s'enſuit que le corps du Vaiſſeau s'éleve vers le milieu, & qu'en conſéquence la pouſſée du fluide qui agit dans ce point diminue, de même que les forces qui agiſſent pour faire baiſſer les extrêmités. Cet effet continue d'avoir lieu juſqu'à ce que les parties du corps du Vaiſſeau puiſſent ſoutenir l'effort des Moments reſtants, en leur oppoſant une réſiſtance qui leur ſoit égale.

(248.) La foibleſſe ou la force de ces parties peut dépendre de deux cauſes principales: l'une de la qualité du bois, ou de l'intenſité de ſes fibres; & l'autre de l'union intime des pieces les unes avec les autres, & de leur diſpoſition, qui doit être telle qu'il n'y ait pas de jeu, ou de mouvement, entre elles. Pour examiner l'effet de la premiere de ces cauſes, nous pouvons conſidérer le Vaiſſeau, c'eſt-à-dire, ſes côtés & ſes ponts, comme étant tout d'une piece du même bois; car on voit que, dans cette ſuppoſition, on fait entiérement abſtraction de l'effet de la ſeconde cauſe; & par conſéquent

---

* Il n'eſt pas aiſé de concevoir pourquoi l'Auteur exprime ainſi les Moments des poids qui agiſſent en Y & en Z; cela nous paroît même tout-à-fait vicieux. En effet, les diſtances 18 & 13, (ou 13 & 12, ſuivant l'original), ne ſont que les diſtances relatives de ces poids au plan des Moments qui paſſe par Z, & non leurs diſtances abſolues. Or, ce ſont ces dernieres qu'il convient d'employer pour avoir les vrais Moments. Si nos réflexions ſont juſtes, ces Moments ſeront exprimés par $(25403\frac{7}{31})XZ$, ou par $(18346\frac{24}{31})YZ$; mais $XZ = 9$ *p.* 10 *p.* $\frac{14}{25}$, & $YZ = 13$ *p.* 8 *p.* $\frac{4}{25}$ (245.): donc ces Moments ſeront $(25403\frac{7}{31})(9$ *p.* 10 *p.* $\frac{14}{25})$, ou $(18346\frac{24}{31})(13$ *p.* 8 *p.* $\frac{4}{25}) = 250984$. Nous avons laiſſé cet article, dans le texte, ſuivant l'eſprit des calculs de l'Auteur. Le Moment qu'il donne eſt 273000; mais cette différence n'eſt qu'en partie une erreur de calcul, elle vient auſſi, comme on vient de le voir, de la maniere dont l'Auteur a conſidéré les Moments.

Planc. VIII. l'effet fera alors le même dans le Vaiffeau que dans le levier, que nous avons confidéré, (*Tome I*, *Art.* 208.): ainfi, les fibres de la partie fupérieure du bois s'allongent, & celles de la partie inférieure fe compriment & fe raccourciffent; & c'eft dans cet effet que confifte la force avec laquelle les bois agiffent. J'ai trouvé, par des expériences répétées, que j'ai pratiquées moi-même, qu'une petite folive de bois de chêne très-dur *, d'un pouce en quarré, fixée horifontalement & folidement à un pilier, fupporte à très-peu près un poids de 2 quintaux placé à la diftance d'un pied du point d'appui. Le Moment, dans ce cas, eft donc $= 2$; & fi nous nous fervons de la formule du même *Art.* 208 (*Tome I.*), qui eft $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$; formule dans laquelle f exprime l'intenfité de la force des fibres du bois, $p\pi$ le Moment, & KA^2 de même que ka^2, le produit de l'aire A^2, ou a^2, de la piece de bois, par la diftance K, ou k, de l'axe fur lequel fe fait la rotation, au centre de gravité defdites aires; on aura, d'après les expériences dont nous venons de parler, $p\pi = 2$, $KA^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48}$, & $ka^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48}$, en fuppofant l'axe de rotation au milieu de la piece: par conféquent, l'intenfité des fibres fera $f = \frac{2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24}} = 13824$. On voit aifément que la même formule $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, donnera le Moment que peut fupporter une autre piece quelconque, comme le côté ou le pont d'un Vaiffeau, car f étant $= 13824 = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, on
Fig. 58. aura $p\pi = 13824\ (KA^2 + ka^2)$. Suppofons que *ABCD*, foit le côté d'un Vaiffeau qui ait 30 pieds de hauteur; & fuppofons que *E* foit le centre fur lequel la rotation doit fe faire, nous aurons $K = k = 7$ pieds $\frac{1}{2}$; & comme l'épaiffeur des bordages eft de 4 pouces, ou $\frac{1}{3}$ de pied, on aura $A^2 = a^2 = \frac{1}{3} \cdot 15$: & par conféquent $p\pi = 13824\ (\frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 7\frac{1}{2}) = 1036800$; Moment énorme, & qui eft beaucoup de fois plus grand que celui 330242 **, qui tend à produire la rupture du Vaiffeau: de forte que dans cette fuppofition la réfiftance d'un feul côté feroit beaucoup plus que fuffifante pour empêcher la rupture du Vaiffeau.

(249.) Mais ces réfultats viennent de la fuppofition que l'axe

---

* Ce chêne, que les Efpagnols appellent *Roble*, eft de l'efpece la plus dure; c'eft l'efpece que les Latins appelloient *Robur.* (*Quercus cum longo pediculo.* Bauh. Pin. 420. *Quercus Robur.* Linn. Spec. Plant. 1414). Suivant quelques Naturaliftes, le *Roble* eft un *Ilex*, ou Chêne vert, de l'epece du *Suber* (*Yeufe*, ou *Liege*.

** D'après la Note de l'*Article* 146, ce moment eft feulement de 250984. On voit que l'Auteur, en confidérant ici la réfiftance du côté du Vaiffeau, ne fuppofe ce côté que de l'épaiffeur du bordage, abftraction faite des membres. En effet, cette épaiffeur feroit bien fuffifante, fi le côté pouvoit être ainfi d'une feule piece.

sur lequel se fait la rotation, est au centre de la piece: Supposons-le maintenant dans la situation la moins avantageuse; c'est-à-dire, dans son extrêmité inférieure, (*Tome I*, 218.) *, & nous aurons, dans les expériences faites sur notre petite solive de chêne $f = \frac{2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24}} = 6912$: & par conséquent, pour un côté du Navire $p\pi = 6912\ (\frac{1}{3} . 30 . 15) = 1036800$; Moment égal au précédent. Ainsi, de quelque maniere qu'on suppose que la rupture se soit faite dans la solive de l'expérience, on trouve toujours le même Moment pour le côté du Vaisseau; Moment qui excede toujours beaucoup celui qui tend à rompre le Vaisseau; par conséquent, ce dernier ne peut produire la rupture du Vaisseau, principalement si l'on considere encore la résistance qu'oppose son autre côté, ainsi que celle des ponts, qui, chacun en particulier, opposent des résistances énormes (*a*).

(250.) Quoique les Moments qui tendent à rompre le Vaisseau soient incapables d'opérer cette rupture, ils ne peuvent cependant manquer de produire une petite courbure, ou un Arc léger; car les fibres des bois cédent à la moindre force, & pour cela il n'est pas nécessaire qu'il s'ensuive aucune rupture. Pour peu que les fibres du bois cédent dans chacun de leurs points, la longueur du Vaisseau est si grande, qu'il peut, & même qu'il doit arriver que le résultat soit très-considérable pris dans la totalité. Si le Navire largue seulement de 2 pouces dans son milieu, c'est-à-dire, si la quantité dont toutes ses fibres ont changé leur situation, produit en total un Arc seulement de 2 pouces dans le milieu; les extrêmités du Navire s'abaisseront d'un pied, attendu qu'elles sont à peu près six fois plus éloignées de l'axe de rotation.

(251.) Si, malgré l'énorme puissance que les bois opposent à leur rupture, il n'est pas possible d'empêcher entiérement les Vaisseaux

---

* L'Auteur pourroit paroître ici en contradiction avec la conséquence de l'*Art*. 218, *Tome I*; car il dit, dans cet endroit, que plus l'axe sera éloigné de celui qui divise la base en deux parties égales, plus le levier sera capable de résistance; mais avec un peu d'attention, on verra que cette contradiction n'est qu'apparente. En effet, le résultat qu'il obtient ici pour le Moment qui peut faire rompre le côté du Vaisseau, paroît dépendre en partie de la valeur de f, qu'il a déduite de l'expérience. Mais cette valeur est d'autant moindre que l'axe autour duquel on peut supposer que la rupture s'est faite, est plus éloigné du centre (*Article* 218, *Tome I*). donc il paroît qu'on auroit substitué la valeur de f la plus avantageuse pour l'augmentation du Moment; c'est ce qui détermine l'Auteur à chercher la valeur de f la moins avantageuse. Ainsi, quand il parle de la situation la moins avantageuse, il veut parler de celle qui produit la moindre valeur de f.

(*a*) M. *Bouguer* (*Traité du Navire*, *page* 152.) prétend qu'on devroit faire les ponts horisontaux, pour empêcher le Vaisseau d'Arquer; mais en considérant bien ceci, on verra que la résistance des fibres des bois & des fers, qui entrent dans la construction d'un pont, dans son milieu, par exemple, ne dépend aucunement de la figure du pont.

de s'Arquer, on doit encore craindre davantage cet effet de la seconde cause que nous avons indiquée, c'est-à-dire, du jeu que les pieces qui entrent dans la construction peuvent avoir entr'elles; car quoique les Constructeurs fassent leur possible pour que les Vaisseaux sortent de leurs mains dans un état d'union & de solidité parfaite, cependant, soit parce que les bois se desséchent après la construction, soit parce que les fers cédent aux efforts qu'ils soutiennent, il en résulte toujours quelque relâchement, quelque défaut d'union, lequel, quoique peu sensible dans chacune des parties, ne laisse pas de devenir très-sensible dans le tout *.

---

* Rien ne prouve plus complettement cette théorie, que les observations suivantes, faites en 1781, sur les Vaisseaux *l'Argonaute* & *le Brave*, construits dans les Formes de Rochefort, le jour qu'on les mit à l'eau.

Le but de ces observations étoit de déterminer quelle étoit la partie du Vaisseau qui flottoit la premiere. Pour cela, on prit à volonté un point sur l'étrave du Vaisseau, un sur les côtés, correspondant au maître couple, & un autre sur l'étambot. On s'est ensuite procuré hors du Vaisseau deux points dans le même allignement que chacun de ces trois points. Trois Observateurs étoient placés de maniere que chacun pouvoit observer & faire connoître aux deux autres, par des signes convenus, le changement arrivé dans les points de son allignement.

Les circonstances faisoient craindre que la marée dont on devoit se servir pour mettre *l'Argonaute* à l'eau, ne produisît pas assez d'eau dans le Bassin. L'Ingénieur chargé de cette construction sçachant, par expérience, que l'arriere du Vaisseau étoit la partie qui flottoit la derniere, dans le dessein de hâter cet instant, plaça, dans cette partie, un chapelet de 40 tonneaux de pieces à l'eau, vuides, pour tenir compte du vuide que les Façons y occasionnent. Cet expédient réussit, même au de-là de ses espérances, puisque le Vaisseau flotta une heure plutôt qu'on n'avoit lieu de l'espérer. Voici le résultat de l'observation faite sur le Vaisseau *l'Argonaute*.

Le milieu flottoit de près de 5 pouces, lorsque l'avant commença à le faire, & l'avant s'éleva d'environ 2 pouces, & le milieu à peu près également, avant que l'arriere vint à flot.

M. *Haran*, Ingénieur, Constructeur ordinaire dans le Département, ayant eu connoissance de ce résultat, chercha à diminuer ce mouvement des parties dans le Vaisseau *le Brave*, qu'on devoit tirer du Bassin le lendemain. Pour cela, il lui mit 36 tonneaux de pieces vuides de plus qu'à *l'Argonaute*; & plaça sur l'avant 50 à 60 tonneaux de lest. Voici le résultat de cette observation.

Le milieu flottoit d'un peu plus de 4 pouces, lorsque l'arriere commença à s'élever, & l'un & l'autre de ces deux points s'éleverent d'environ 2 pouces 6 lignes, avant que l'avant commençât à le faire.

Nous tenons ces résultats de M. *Clément*, Professeur de Mathématiques aux Ecoles de la Marine, à Rochefort, qui étoit présent à ces expériences; faisons quelques réflexions à leur sujet.

On observera, 1°. que la quille de ces Vaisseaux avoit une tonture de quelques pouces, c'est-à-dire, que les deux extrémités étoient un peu relevées; mais cet usage ne nous paroît nullement propre à empêcher le Vaisseau de s'Arquer : car les Moments qui tendent à produire cet effet, ainsi que ceux qui proviennent de la résistance des fibres de la quille, n'ont aucun rapport avec sa figure, la quille ne peut ensuite devenir droite qu'aux dépens de la liaison du Vaisseau.

2°. Que ces Vaisseaux étoient établis sur leurs tins, dans une situation horisontale, s'ils avoient été établis avec leur différence de tirant d'eau étant vuides, ayant bien déterminé d'avance leur déplacement, & leur situation d'équilibre, les expériences eussent encore été plus concluantes; car alors on eût observé tout l'Arc qui provient de la différence entre la poussée de l'eau sur les différentes tranches du Vaisseau, & le poids des mêmes tranches. En effet, la quille étant placée horisontalement, & le Vaisseau étant construit pour tirer plus d'eau de l'arriere, un des premiers effets de la poussée de l'eau doit être d'élever l'avant, & alors le Moment de cette poussée tend à donner au Vaisseau un mouvement de rotation sur l'angle de l'arriere de la quille; ainsi ce Moment tend à Arquer le Vaisseau en sens contraire, ou à lui donner un *faux Arc*. En conséquence, il nous semble évident que l'Arc a dû paroître moindre qu'il n'eût été si chaque Vaisseau avoit été établi

(251.) On peut donc empêcher, en grande partie, que les Vaisseaux ne s'Arquent, en en joignant toutes les pieces avec le plus grand soin, en les fortifiant le plus qu'il est possible dans toutes leurs parties, & en les construisant d'un bois sec, qui, par sa fermeté, soit capable d'une grande résistance. Avec toutes ces précautions on pourra prévenir, & même éviter le mouvement qu'il y a le plus souvent entre les pieces qui les composent. Il est certain que le principal remede qu'on puisse apporter à ce dangereux inconvénient, doit consister dans la figure & la grandeur du Vaisseau, parce que, comme nous l'avons vu, les Moments d'où résulte le mal, en dépendent absolument. Les deux distances YZ & ZX sont proportionnelles à la longueur du Vaisseau (244 & 245.): donc plus cette longueur sera grande, plus le Vaisseau sera susceptible de s'Arquer. Pareillement, ces distances seront encore d'autant plus grandes, à proportion que le volume renfermé par le contour de chaque couple diminuera plus considérablement à l'égard de celui que renferme le maître couple; ou, comme s'expriment les Marins, à proportion que *le Vaisseau aura plus de Façons*, qu'il sera plus *pincé*, ou que les courbes BTA, BVC, seront moins pleines à leurs extrêmités: car, comme on l'a vu, pour avoir supposé BTA une parabole, & BVC une ellipse, il en a résulté $YZ = \frac{36}{400} \cdot AC$, & $ZX = \frac{26}{400} \cdot AC$. On peut également prévenir cet accident, en ayant soin de ne pas charger beaucoup les extrêmités du Vaisseau, ou en rassemblant tous les poids le plus vers le milieu qu'il sera possible; car, avec ces attentions,

---

dans les Formes, avec sa différence de tirant-d'eau; mais le Vaisseau une fois à flot, il aura sans doute pris peu à peu l'Arc naturel qui répond à la résistance des pieces qui entrent dans sa construction, & à leur liaison; mais l'expérience étant alors finie, il n'est plus possible d'avoir exactement la valeur de cet arc.

3°. Les extrêmités du Vaisseau ayant, comme nous l'avons vu dans le texte, une propension à s'abaisser, il nous paroît qu'il convient de les alléger le plus qu'il est possible: ainsi dans la seconde expérience ci-dessus, il eût beaucoup mieux convenu d'alléger l'avant par un chapelet de pieces vuides, comme on avoit fait à l'arriere, que d'y mettre du lest, qui eût été mieux placé au maître couple.

Ces observations nous donnent encore lieu de remarquer que M. *Bouguer* s'est trompé, en disant (*Traité du Navire*, *page* 78.) qu'il convient de construire les Vaisseaux dans les Bassins, pour les empêcher d'Arquer. Les Bassins sont fort commodes pour les radoubs des Vaisseaux, mais ne nous paroissent nullement préférables aux calles pour produire l'effet dont il s'agit; & au contraire, d'après une analyse exacte des Moments des forces qui agissent dans cette circonstance, on seroit tenté de donner la préférence aux calles.

On voit donc qu'il est de la plus grande importance de s'occuper des liaisons des Vaisseaux, & sur-tout des grands. L'art de la charpente des Vaisseaux n'est certainement pas encore rendu à sa perfection. Ce sujet, ainsi que le problême dont nous avons parlé dans la Note de l'*Article* 80, est bien digne de fixer l'attention du Gouvernement, & de faire le sujet de quelques-uns des prix proposés par les Académies.

on diminuera les Moments, ou, ce qui revient au même, les distances *YZ* & *ZX*.

(253). Enfin, on doit observer que le calcul que nous avons exposé ci-dessus, est pour le cas où le Vaisseau est chargé, ou calé, jusqu'à la ligne d'eau dans laquelle il navigue; lorsqu'il est déchargé, il s'éleve davantage, & à proportion les pleins des extrêmités, lesquels sont destinés à les soutenir, sont beaucoup moindres; par conséquent le Vaisseau, dans cet état, ayant ses extrêmités moins soutenues, il doit en résulter un Arc beaucoup plus grand.

(254.) On ne doit pas limiter cette théorie à la seule action dans le sens de la longueur du Vaisseau; car il y a un effet tout semblable d'un côté à l'autre, lequel mérite bien d'être considéré, sur-tout dans les Vaisseaux de guerre, qui ont sur leurs côtés le poids énorme de leur artillerie, points où le soutien du fluide est nul : le Vaisseau doit donc s'ouvrir en vertu de cette action, & il s'ouvre effectivement, comme on le voit, aux coutures des bordages des ponts, particuliérement à celles des bordages qui joignent les côtés du Vaisseau. M. *Bouguer*, dans son *Traite du Navire* (*Liv. I*, *Sect. III*, *Chap. II*) a cru que le contraire pouvoit arriver, & il apporte pour exemple ce qui arrive à une tasse de la figure d'une gondole, lorsqu'on tâche de la plier suivant sa longueur; mais ce cas n'est pas précisément ce qui arrive au Vaisseau : en pliant la gondole, elle se comprime ou se resserre latéralement; au contraire, dans le Vaisseau, le poids de l'artillerie, placée aux extrêmités, agit verticalement vers le bas, & en opposition à l'action du fluide dans le milieu qui agit vers le haut, tend évidemment à l'ouvrir. Mais ce n'est pas encore cela qui produit le plus grand effet; car les moments verticaux avec lesquels agit l'artillerie, étant puissamment soutenus par les couples qui sont aussi verticaux, & qui ont une force énorme, détruisent presqu'entiérement ces moments, & ne leur permettent que très-peu d'effet.

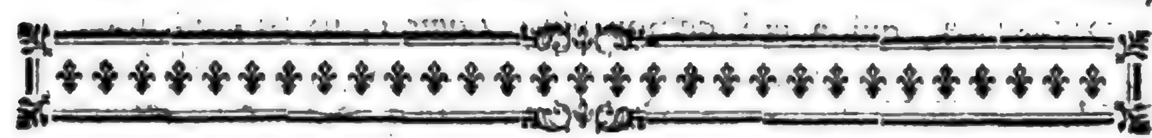
(255.) Les Moments d'inertie qui résultent des roulis du Vaisseau, sont ceux qui produisent les effets les plus dangereux. Si nous les considérons décomposés en moments verticaux & en moments horisontaux, on voit que les premiers seront soutenus par les couples, comme nous l'avons dit précédemment, & il n'en peut résulter un grand inconvénient. Mais il en est autrement des Moments horisontaux, ce sont les courbes seules, les baux, les clous & les gournables avec lesquelles on lie le côté, qui en supportent l'action, & ils sont d'autant plus considérables, que l'artillerie est plus élevée au-dessus du centre de gravité, autour duquel le Vaisseau se balance. Car si l'on suppose que *P* désigne le poids d'une piece de canon,

& a la hauteur verticale de son centre de gravité au-dessus de celui du Vaisseau, a^2P sera la mesure du moment latéral avec lequel elle agit contre le côté du Vaisseau. Dans le Vaisseau de 60 canons, on a, pour ce qui concerne la batterie basse, $a = 9\frac{1}{2}$, & pour la batterie haute, $a = 16\frac{1}{2}$: ainsi, un canon de 18, dont le poids, joint à celui de son affut, est de 49 quintaux, étant placé à la premiere batterie, produira un moment de $4422\frac{1}{4}$; & le canon de 12, dont le poids est de 39 quintaux, étant placé à la batterie haute, produira un Moment de $10617\frac{3}{4}$: d'où l'on voit l'énorme supériorité de l'action de l'artillerie haute sur celle de la basse, & le grand défaut de proportion dans la maniere de la répartir : car, dans cette disposition, le second pont doit supporter un effort plus que double de celui du premier, quoique cependant il soit beaucoup plus foible. Ceux qui, dans un Vaisseau de 80 canons, emploient deux batteries de pieces de 24, au lieu de deux batteries, l'une de 36, & l'autre de 18, agissent encore d'une maniere beaucoup plus absurde : car, pour la premiere batterie, on a $a = 11$, & pour la seconde, $a = 18\frac{1}{2}$; ainsi, le Moment du canon de 36 de la premiere batterie $= (11)^2 . 79 = 9559$, & celui du canon de 18 de la seconde, $= (18\frac{1}{2})^2 . 49 = 16770\frac{1}{4}$; & non contents de cette énorme différence d'action que souffre le second pont, ils voudroient encore l'augmenter, en portant celle de ce second pont jusqu'à $(18\frac{1}{2})^2 . 59 = 20192\frac{3}{4}$, par la substitution de la piece de 24, & en diminuant celle que souffre le premier pont, qui se trouve par-là réduite à $(11)^2 . 59 = 7139$. L'ordre & la raison exigent que le travail soit distribué à proportion des forces qui doivent le supporter ; & ces forces sont ici la résistance des bois, principalement celle des bordages, des illoires & sur-tout des courbes qui lient les ponts au côté du Vaisseau. Supposons que l'épaisseur des pieces du pont inférieur soit à celle des pieces du pont supérieur comme 6 est à 5, & que leur largeur suive aussi la même proportion ; à cause que les forces sont comme les cubes de ces dimensions (*Tome I*, 212, *Note*, & *Tome II*, 113, *Note*), il est clair que la force des pieces du premier pont sera à celle des pieces du second, comme 216 est à 125. Appellant donc P le poids du canon de la premiere batterie, & p celui du canon de la seconde, on devroit avoir, pour le Vaisseau de 60 canons, $(9\frac{1}{2})^2 P : (16\frac{1}{2}) p :: 216 : 125$, & par conséquent $p = \frac{11281\frac{1}{4}}{58806} P$: de sorte que le poids du canon de la batterie haute ne devroit pas même être la cinquieme partie de celui du canon de la batterie basse, pour garder la proportion qu'il convient d'observer entre le travail des deux ponts, & les résistances dont ils sont

ſuſceptibles ; & quand même le canon de la batterie baſſe ſeroit de 24, & celui de la batterie haute ſeulement de 4, le ſecond pont étant chargé de ce dernier canon, travailleroit encore plus que le premier, chargé de l'autre. De tout cela on doit conclure que les Marins doivent tâcher d'alléger le plus qu'il eſt poſſible le poids des ſecondes batteries, & que les Conſtructeurs doivent augmenter la réſiſtance du ſecond pont, en augmentant la force des courbes, des clous & des gournables qui les lient ; en un mot, en employant tous les moyens qui ſont à leur diſpoſition. Dans le cas où ce ſecond pont ſeroit capable d'une réſiſtance égale à celle du premier, le poids des canons de leurs batteries ne devroit être qu'en raiſon inverſe des quarrés de leurs élévations au-deſſus du centre de gravité du Vaiſſeau ; c'eſt-à-dire, dans le Vaiſſeau de 60 canons, comme $(16\frac{1}{2})^2$ eſt à $(9\frac{1}{2})^2$, ou à peu près, comme 3 eſt à 1, : de ſorte qu'en mettant du 24 à la batterie baſſe, il ne faudroit mettre que du 6 à la batterie haute ; mais quand on mettroit du 8, le Vaiſſeau ſeroit moins fatigué par deux batteries, l'une de 24, & l'autre de 8, que par les deux batteries de 18 & de 12 qu'on a coutume de lui donner (*a*) *.

(*a*) M. *Bouguer* dans ſon *Traité du Navire*, (*Liv. II*, *Sect. II*, *Chap. VI*, *page* 284 *juſqu'à* 286), examine s'il convient mieux de donner à un Vaiſſeau de 70 canons deux batteries de 24, qu'une de 36 & l'autre de 18 ; & quoique ſon calcul conſiſte ſeulement dans la comparaiſon de la différence des ſimples Moments qu'éprouve tout le Vaiſſeau dans l'un & l'autre cas, & non dans celle des Moments d'inertie, qui ſont les plus forts, il ſe détermine cependant en faveur des deux batteries de 36 & 18. Cette façon de penſer auroit été encore beaucoup plus fondée, s'il eût conſidéré la différence de Moments d'inertie qu'éprouve chaque pont en particulier ; car ceux que ſoutient le ſecond pont ſeroient dans le premier cas plus grands que ceux que ſoutient le premier pont, en raiſon des quarrés de leurs diſtances au centre de gravité : de ſorte que le ſecond pont auroit à ſoutenir un effort plus de trois fois plus grand que celui qui ſoutiendroit le premier. Cette conſidération fait voir le danger qu'il y auroit à mettre en pratique l'expédient que propoſe le même Auteur, (*page* 332) pour empêcher la rupture des mâts ; par ce moyen, on opéreroit peut-être la rupture du Vaiſſeau, qui ſeroit, ſans contredit, bien plus préjudiciable.

* Comme la groſſeur du calibre eſt une choſe de la premiere importance, on pourroit mettre la premiere batterie en fer, & la ſeconde en bronze : ce qui diminueroit les Moments d'inertie. On pourroit peut-être auſſi rapprocher les pieces du centre de gravité du Vaiſſeau, en ſe menageant le moyen de ne point perdre du côté du temps pour les mettre en batterie lors d'un engagement. On pourroit même les tourner dans le ſens de la longueur du Vaiſſeau. Toutes ces attentions diminueroient beaucoup les Moments d'inertie, & prolongeroient plus qu'on ne pourroit le penſer, le ſervice des Vaiſſeaux. Mais cet arrangement pourroit peut-être ſouffrir de grandes difficultés dans la pratique, ſur-tout pour la deuxieme batterie qui eſt cependant la plus importante ; attendu que le ſecond pont eſt ordinairement fort embarraſſé, & qu'il ne pourroit peut-être pas reſter un eſpace ſuffiſant pour la commodité du ſervice de la Manœuvre. C'eſt aux Marins à décider ſur ce point.



LIVRE TROISIEME.

Des MACHINES qui ſervent à mettre le Vaiſſeau en mouvement & à le gouverner.

CHAPITRE PREMIER.

Des Voiles, & de la force avec laquelle le vent agit ſur elles.

(256.) LES Voiles, comme nous l'avons dit (1.), ſont des pieces de toile expoſées à l'action du vent, dont elles tranſmettent l'impulſion au Navire. Elles ne peuvent ſe maintenir planes, à cauſe de leur flexibilité, quoiqu'on les étire de toutes parts avec de grandes forces. Elles doivent prendre une courbure dont la nature a fait le ſujet des recherches de *Jean Bernoulli* dans ſa *Nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux, Chap. XVI* *. Il ſuppoſe, dans ces recherches, que la réſiſtance des fluides eſt comme les quarrés des viteſſes ; mais cette ſuppoſition, comme nous l'avons vu, ne convient point pour avoir la meſure de leur action effective. La théorie compliquée qui réſulte de cette ſuppoſition, en ayant égard à la courbure des Voiles dans tous les calculs, a fait que tous les autres Auteurs ont ſuppoſé les Voiles planes ; & *Bernoulli* lui-même n'a fait uſage de cette courbure que pour déterminer la direction particuliere de la réſultante des forces, à l'action deſquelles les Voiles ſont expoſées. En effet, la différence qui peut en réſulter eſt petite ; mais elle ne l'eſt pas tellement que nous puiſſions nous diſpenſer de donner ſur ce ſujet les connoiſſances convenables, d'autant plus qu'elles ſeront très-néceſſaires à l'examen d'autres objets très-importants.

(257.) Nous ſuppoſerons, pour cela, qu'au lieu de l'air, ce ſoi un fluide non élaſtique, & de la même denſité, qui agiſſe ſur la Voile ; car, par cette ſuppoſition, il eſt évident que l'un ou l'autre de ces fluides produira le même effet ſur la Voile, & par conſéquent nous pourrons nous ſervir de la formule $\frac{1}{4} mc D^{\frac{1}{2}} au \sin\theta$, ou

* *Johannis Bernoulli Opera omnia. Tomus ſecundus.*

$\frac{1}{4}muD^{\frac{1}{2}}\int ac \sin\theta$, qui a été démontrée (*Tome I*, 654.), & qui se réduit, suivant ce qu'on a dit (*Tome I*, 734), à $\frac{1}{4}muD^{\frac{1}{2}}\int ac \sin\theta$; car cette formule exprime la force avec laquelle le fluide supposé agira sur la Voile; *m* désignant la densité de l'air, *a* une différencielle de la dimension verticale de la Voile, *D* la distance de la voile à la superficie supérieure du fluide, *c* l'amplitude, ou la largeur horisontale de la Voile, & θ l'angle que forme la direction du fluide avec cette différencielle. Ainsi, l'on voit que toute la difficulté consiste à trouver les valeurs de *D*, & de $\int ac \sin\theta$.

(258.) Pour déterminer la valeur de *D*, on se rappellera que nous avons déjà démontré (*Tome I*, 551.) que les hauteurs sous lesquelles deux fluides de différente densité se font équilibre, sont réciproquement comme leurs densités. On sçait de plus, par les expériences des Physiciens, que la densité de l'air est $\frac{1}{1000}$ de celle de l'eau de pluie, & que celle du mercure est 14 fois plus grande que celle de l'eau : donc, selon ces expériences, la densité de l'air est à celle du mercure comme 1 est à 14000. Or la hauteur à laquelle se maintient le mercure dans le barometre simple sur le bord de la mer, est de 2 pieds $\frac{1}{2}$ anglais : donc on aura $1 : 14000 :: 2\frac{1}{2} : D = 35000$, c'est la hauteur du fluide que nous substituons à l'air. Supposons maintenant que *m* exprime la densité de l'eau de mer, laquelle est à celle de l'eau de pluie, comme 1030 est à 1000, la densité de l'air sera exprimée par $\frac{m}{1030}$; c'est la quantité que nous devons substituer en place de *m* seul, que nous avons d'abord supposé représenter cette densité ; ce qui donnera, pour l'expression de la force du vent sur la Voile, la quantité $\frac{\frac{1}{4}muD^{\frac{1}{2}}}{1030}\int ac \sin\theta = \frac{\frac{1}{4}mu(35000)^{\frac{1}{2}}}{1030}\int ac \sin\theta = \frac{9}{200}mu\int ac \sin\theta$.

(259.) Cette détermination peut cependant paroître suspecte, en ce qu'elle dépend d'expériences physiques dont les résultats dépendent des différents appareils qu'on emploie ; & nous ne sçavons pas encore avec certitude si les faits qu'elles présentent peuvent convenir à l'état de l'air sur le bord de la mer : ainsi, nous pouvons nous arrêter avec plus d'avantage à la méthode suivante. Par des expériences barométriques que j'ai faites au Pérou (*Observaciones Astronomicas y Physicas, Liv. V, Ch. IV.**), j'ai trouvé que, pour que le mercure du barometre baisse d'une ligne, il est nécessaire de s'élever de 86 pieds au-dessus du niveau de la mer : donc, en supposant le fluide d'une densité uniforme, sa hauteur totale sera d'autant de fois 86 pieds qu'il y a de lignes dans

* Il y a une bonne traduction française de cet excellent Ouvrage de *D. Georges Juan*, imprimée à la suite de la relation de son Voyage au Pérou ; ce qui forme 2 vol. *in*-4°. A Paris, chez *Jombert*, 1752.

les 2 pieds $\frac{1}{2}$ de la hauteur du barometre : » cette hauteur D sera donc $=$ » 30960 ; & cette quantité exprimera la densité du mercure, celle » de l'air libre étant représentée par l'unité *. Comme la densité de » l'eau de pluie est $\frac{1}{14}$ de celle du mercure, elle sera exprimée » par $\frac{30960}{14}$, & celle de l'eau de mer par $\frac{30960 . 103}{1400} = \frac{3096 . 103}{140}$. La force » du vent sur la voile sera donc, d'après ces données, $= \ldots$ » $\frac{\frac{1}{4} mu D^{\frac{1}{2}} . 140}{3096 . 103} \int ac \sin \theta = \frac{35 mu (30960)^{\frac{1}{2}}}{3096 . 103} \int ac \sin \theta = \frac{6160}{318888} mu \int ac \sin \theta$.

(260.) On peut prendre, pour l'expression de cette force, la quantité $\frac{1}{20} mu \int ac \sin \theta$; ainsi, celle que nous avions trouvée précédemment, n'est que les $\frac{9}{10}$ de celle-ci. La derniere que nous venons de trouver est un peu plus petite ; mais, pour la rapprocher davantage, il ne s'agit que de supposer qu'il faut élever le barometre seulement de 85 pieds au dessus du niveau de la mer, pour qu'il baisse d'une ligne, au lieu des 86 pieds qui ont fait le fondement de notre calcul **.

---

* On ne conçoit pas comment l'Auteur a pu conclure de l'expérience qu'il rapporte, que la densité de l'air étant exprimée par l'unité, celle du mercure sera exprimée par 30960. Cette expérience prouve seulement que la colonne d'air qui soutient le barometre à la hauteur de 2 pieds $\frac{1}{2}$ doit avoir 30960 pieds de hauteur, en la supposant d'une densité uniforme dans toute sa hauteur, & égale à la densité de la colonne d'air de 86 pieds qui fait équilibre à une ligne de mercure. D'après la proposition que l'Auteur rappelle dans l'*Article* précédent, & qui est démontrée, *Tome I*, *Article* 551, l'expérience dont il est ici question, fournit cette analogie ; la densité de l'air est à celle du mercure comme 2 pieds $\frac{1}{2}$ sont à 30960, ou comme l'unité est à 12384. Ainsi, pour que la densité du mercure soit représentée par 30960, il faut que celle de l'air soit représentée par $2\frac{1}{2}$; ou si celle-ci est exprimée par l'unité, celle du mercure doit être exprimée par 12384. Il est inutile d'avertir que le reste du calcul de cet *Article* portant sur un fondement aussi ruineux, ne peut être d'aucun usage. Voici comme nous voudrions rétablir ce passage.

» Cette hauteur D sera donc $= 30960$; ainsi l'on aura cette proportion, la densité de l'air est » à celle du mercure $:: 2\frac{1}{2} : 30960$, ou $:: 1 : 12384$ (*Tome I*, *Art.* 551.). La densité du » mercure sera donc exprimée par 12384, celle de l'air libre étant représentée par l'unité. Comme la densité de l'eau de pluie est $\frac{1}{14}$ de celle du mercure, elle sera exprimée par $\frac{12384}{14}$, & » celle de l'eau de mer par $\frac{12384.103}{1400}$. La densité de l'eau de mer étant donc représentée par m, » celle de l'air sera $= \frac{1400.m}{12384.103}$; c'est la quantité qu'il faut substituer pour m dans la formule, » ainsi la force du vent sur la voile sera, d'après ces données, $= \frac{\frac{1}{4} mu D^{\frac{1}{2}} . 1400}{12384.103} \int ac \sin \theta = \ldots$ » $\frac{350 mu (30960)^{\frac{1}{2}}}{12384.103} \int ac \sin \theta = \frac{61600}{1275552} mu \int ac \sin \theta$ ».

** Ceci confirme bien l'erreur que nous avons remarquée dans la Note de l'*Article* précédent ; car le résultat de l'Auteur est à peu près $\frac{1}{12} mu \int ac \sin \theta$, quantité qui est fort éloignée de $\frac{1}{20} mu \int ac \sin \theta$; & l'on ne pourroit se permettre de confondre l'une avec l'autre. Au reste, comme l'Auteur emploie par tout l'expression $\frac{1}{20} mu \int ac \sin \theta$, les défauts de l'*Article* précédent n'ont aucune influence sur le reste de l'Ouvrage.

PLANC. VIII. (261.) Pour trouver l'intégrale $\int ac \sin \theta$, nous avons besoin d'entrer dans l'examen de la courbure que le vent fait prendre à la Voile. Supposons, pour faciliter le calcul, que la Voile est une toile rectangulaire, dont deux côtés sont verticaux, & qu'arrêtée solidement par ces deux côtés, elle prenne horisontalement la courbure qui lui est naturelle, en vertu de la force du vent, & de son entiere flexibilité; c'est la nature de cette courbe que nous allons examiner.

FIG. 39. Soit donc ABC une section horisontale de la Voile, & DB la direction du vent qui la frappe : soit tiré la tangente BE perpendiculaire à cette direction : soit pris le point du contact B pour l'origine des abscisses; & soit compté les abscisses sur BD, & les ordonnées perpendiculairement à cette ligne, c'est-à-dire, paralleles à la tangente BE. Cela posé, prenant AF pour une différencielle constante de la courbe, que nous appellerons db, la perpendiculaire HF sera $= dx$, & la ligne $HA = dy$. La force perpendiculaire que le vent exercera sur cette différencielle $AF = db$, sera $\frac{1}{20} mua.db \sin \theta$, a exprimant la hauteur de la Voile, & θ l'angle d'incidence, dont le sinus est $= \frac{dy}{db}$: ainsi, l'expression de la force ci-dessus deviendra $= \frac{1}{20} muady$. De plus, soit tiré, par les points A & F, les perpendiculaires AG, FG, à la courbe, lesquelles seront les rayons de sa développée. Or, si l'on suppose que IF perpendiculaire à AF exprime la force perpendiculaire du vent sur la différencielle AF, cette différencielle exprimera celle que fait la Voile sur quelque point tel que A; & comme cette force doit être constante, nous l'appellerons F : mais IF est à AF, comme AF est au rayon AG de la développée; ainsi, nous aurons db est à $\frac{db.dy}{ddx}$ (rayon de la développée) *, comme $\frac{1}{20} muady$ est à $F = \frac{1}{20} mua. \frac{dy^2}{ddx}$; d'où l'on tire $\frac{dy^2}{ddx} = Q$, en supposant $\frac{F}{\frac{1}{20} mua} = Q$; ou $db^2 - dx^2 = Qddx$. Pour débarrasser cette équation de différencielles, nous appellerons z l'arc, ou l'angle AEN que forme la tangente AE avec l'autre tangente

* Pour trouver le rayon de la développée, reprenons la proportion $IF : AF :: AF : AG = \frac{AF^2}{IF} = \frac{db^2}{IF}$; & considérons que dans le triangle IAF on a $1 : AI$ ou $AF :: IAF : IF$ (à cause que l'angle IAF est infiniment petit), ou $1 : db :: IAF : IF = db . IAF$: donc $AG = \frac{db}{IAF}$. Cela posé, si l'on prend l'arc $Ap = AF$, & si l'on mene la ligne Nan, parallele à l'axe des l'abscisses, & la ligne pn parallele aux ordonnées, il est évident que la tangente AF étant le prolongement de l'arc infiniment petit Ap, l'angle $IAH =$ l'angle Apn : mais IAF est l'excès de IAH sur FAH, il est donc aussi l'excès de Apn sur FAH, & par conséquent cet angle exprime la quantité dont l'angle de la courbe avec l'ordonnée

BE,

BE, & nous aurons $dx = db \sin z$, & $ddx = dbdz \cos z$; ce qui donne, en substituant, $db^2 - db^2 \sin z^2 = Qdbdz \cos z$, & par conséquent $db = \frac{Qdz \cos z}{1 - \sin z^2} = \frac{Qdz}{\cos z}$; $dx = \frac{Qdz \sin z}{\cos z}$; & $dy = Qdz$, d'où l'on tirera, en intégrant, $x = Q \log. \frac{1}{\cos z}$ *, & $y = Qz$; expressions dont il résulte $xz = y \log. \frac{1}{\cos z}$ pour l'équation de la courbe, qui est, comme on voit, très-différente de celle de la Chaînette, que nous avons trouvée, *Tome I, Art.* 41 de l'*Appendice I.* La construction de cette équation, c'est-à-dire, la description de la courbe dont elle exprime la nature, est maintenant très-facile; car, en prenant pour ordonnées les arcs z, les logarithmes hyperboliques de $\frac{1}{\cos z}$, seront les abscisses correspondantes.

---

augmente à chaque variation de l'abscisse; ainsi *IAF* est la différencielle de l'angle *FAH*, que nous nommerons q, ce qui donnera $IAF = dq$.

Pour trouver la valeur de dq, rappellons-nous que $d \sin q = dq \cos q$ (*Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Quatrieme Partie, *Article* 22); donc $dq = \frac{d \sin q}{\cos q}$. Mais le triangle rectangle *FAH* donne *AF* : *FH*, ou $db : dx :: 1 : \sin q = \frac{dx}{db}$. Pareillement, *AF* : *AH*, ou $db : dy :: 1 : \cos q = \frac{dy}{db}$. Différenciant donc la valeur de sinus q, en regardant db comme constante, ainsi qu'on doit le faire dans le cas présent, on aura $d \sin q = \frac{ddx}{db}$, & par conséquent $dq = \frac{ddx}{dy}$. Substituant cette valeur de $dq = IAF$ dans l'expression du rayon de la développée, on aura enfin $AG = \frac{db.dy}{ddx}$. On voit aisément que l'expression générale du rayon de la développée pour toutes les courbes dont les ordonnées sont paralleles, est ... $\frac{dv}{d\left(\frac{dx}{db}\right)}$; expression qui prendra différentes formes, selon qu'on prendra dy, dx ou db comme constante, ou qu'on les considérera toutes trois comme variables.

* Il y a sans doute ici une erreur de calcul. L'intégrale de l'équation $dx = \frac{Qdz \sin z}{\cos z}$ n'est point $x = Q \log \cos z$ comme le dit l'Auteur, mais $= Q \log \frac{1}{\cos z}$. En effet $d \log \frac{1}{\cos z} = ..$ $d \log (\cos z)^{-1} = \frac{-(\cos z)^{-2} d \cos z}{\frac{1}{\cos z}} = -(\cos z)^{-1}(-dz \sin z) = \frac{dz \sin z}{\cos z}$, (*Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Quatrieme Partie, *Article* 27.). Nous avons corrigé cette faute, qui n'a d'ailleurs aucune influence sur les abscisses de la vélaire.

Abscisses & Ordonnées pour la construction de la Vélaire.

Arcs z	Abscisses.	Odonnées.
10°	0,0153	0,1745 *
20	0,0638	0,3490
30	0,1437	0,5236
40	0,2663	0,6981
50	0,4415	0,8727
60	0,6924	1,0472
70	1,0717	1,2217
80	1,7488	1,3963
90	infinie.	1,5708

(262.) Puisqu'on a vu ci-dessus que $y = Qz$, on aura $Q = \frac{y}{z} = \frac{F}{\frac{1}{10}mua}$, & $F = \frac{\frac{1}{10}muay}{z}$; c'est l'expression de la force avec laquelle la voile agit, dans le sens de sa largeur **, contre les puissances qui agissent pour la tenir roide.

(263.) La direction suivant laquelle agit la force totale de la Voile entiere, ou d'une de ses parties, ou d'une courbe comme *AK*, est la droite *LO* qui divise en deux parties égales l'angle *KOA*, que forment les deux tangentes *KO*, *AO* : car la tension, ou l'action de la Voile, tant en *K* qu'en *A*, étant $= F$, si l'on forme le parallélogramme *KOML*, la diagonale *LO* sera en même temps l'expression & la direction de la force résultante des deux forces égales *F*, exprimées par *KO*, *MO*. Il suit de là que nous aurons $\sin LOM : \sin LMO :: F : \frac{F \sin LMO}{\sin LOM}$; c'est la valeur de la force qui agit sur la portion de courbe, ou de voile *AK* dans la direction *LO*, & lui donne la courbure qu'elle prend. Si donc nous appellons φ l'angle *KOA* que forment les deux tangentes, la force qui agit dans la direction *LO*, sur la portion de Voile *KA*, sera $= \frac{\frac{1}{10}mauy \sin \varphi}{z \sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\frac{1}{10}mauy . 2\cos \frac{1}{2}\varphi}{z}$ *** : ou, en nommant π l'angle *EAN* que forme la portion de la voile dans le point *A* avec le vent, & Π l'angle *OKP* qu'elle forme à l'autre extrémité *K* avec la même direction, on aura $z = Arc\ (90° - \pi)$, & $\varphi = 180° - (\Pi - \pi)$; & par consé-

---

* Le rayon étant $= 1$. L'arc de $1° = 0{,}01745$ (*Ibid.* Deuxieme Partie, *Art.* 293.), par conséquent étant $= 10°$, on a $z = 0{,}1745$.

Quant aux abscisses, $\log \frac{1}{\cos z} = \log 1 - \log \cos z = 0 - \log \cos z = -\log \cos z$. Or, z étant de $10°$, $\log \cos z = 9.99335$, pour un rayon de 10000000000 de parties : mais le rayon étant $= 1$, il faudroit diviser le cosinus naturel par 10000000000 ; ainsi il faut retrancher 10.00000 de son logarithme, pour avoir celui qui répond au rayon $= 1$, ce qui donnera $9.99335 - 10.00000 = -0.00665$ pour le logarithme de $\cos z$, pris dans les tables ordinaires. Multipliant donc ce logarithme par 2,3025 &c. (*Ib.* Quatrieme Partie, *Art.* 113), on aura $-0{,}0153$ pour le logarithme hyperbolique de $\cos z$, ou 0.0153 pour la valeur de $-\log \cos z = \log \frac{1}{\cos z}$.

** En Espagnol, *en su Tirantez*.

*** Car $1 : \cos \frac{1}{2}\varphi :: 2 \sin \frac{1}{2}\varphi : \sin \varphi$; ou $1 : 2\cos \frac{1}{2}\varphi :: \sin \frac{1}{2}\varphi : \sin \varphi$ (*Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Seconde Partie, *Art.* 283.). Donc $2\cos \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$.

quent la force qui agit sur la Voile dans la direction LO, sera $= \frac{\frac{1}{10} mauy . 2 fin \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{Arc(90^\circ - \pi)}$.

(264.) Supposons maintenant l'ordonnée $BR = Y$, on aura, par les équations de l'*Art.* 261, $y = Qz = Q\ Arc\ (90^\circ - \pi)$, & $Y = Q\ Arc\ (90^\circ - \Pi)$; donc $y : Y :: Arc(90^\circ - \pi) : Arc\ (90^\circ - \Pi)$; ce qui donne $Y = \frac{y . Arc\ (90^\circ - \Pi)}{Arc(90^\circ - \pi)}$. En outre, si nous nommons h la corde KA, & α l'angle qu'elle forme avec la direction du vent, nous aurons $y - Y = h\ fin\ \alpha$, ou $Y = y - h\ fin\ \alpha$: donc $\frac{y\ Arc\ (90^\circ - \Pi)}{Arc(90^\circ - \pi)} = y - h\ fin\ \alpha$; d'où l'on tire $y = \frac{h\ fin\ \alpha . Arc\ (90^\circ - \pi)}{Arc\ (\Pi - \pi)}$. Cette valeur étant substituée dans l'expression de la force qui, agissant sur la Voile KA dans la direction LO, lui donne la courbure KA, elle la changera en celle-ci, ... $\frac{\frac{1}{10} mau\ h\ fin\ \alpha . 2 fin \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{Arc\ (\Pi - \pi)} = \frac{\frac{1}{10} mauh\ fin\ \alpha .\ fin\ \frac{1}{2}\ (\Pi - \pi)}{Arc\ \frac{1}{2}\ (\Pi - \pi)}$.

(265.) La force de la Voile dépend non seulement de l'angle α que forme le vent avec la vergue, mais encore de la différence entre les angles Π & π, ou de sa courbure, dont dépendent ces angles: de sorte que plus la voile prendra de courbure, plus sa force diminuera; ou, comme la courbure dépend de la largeur de la Voile, de la violence du vent, de la tension & de la qualité de la toile dont elle est faite, il s'ensuit que plus la Voile aura de largeur, plus le vent sera impétueux, moins la Voile sera tendue, & plus la toile sera déliée & flexible, moins à proportion la force qu'elle produira sera grande.

(266.) Pour trouver, par la formule, le cas où la Voile est plane, il n'y a qu'à supposer qu'on ait sensiblement $\Pi = \pi$, auquel cas la force de la Voile sera par conséquent aussi grande qu'elle puisse être. La quantité de Voile comprise entre les deux extrêmités A & K, sera, dans cette supposition, infiniment petite, & dégénérera dans une ligne droite, ou dans un seul plan. La formule ou l'expression de la force, se réduira, d'après cela, à . . . . . $\frac{\frac{1}{10} mau\ h\ fin\ \alpha . fin\ o}{Arc. o}$; & comme la raison $\frac{fin. o}{Arc. o} = 1$, la force que fait la Voile, supposée plane, devient $= \frac{1}{10}\ mauh\ fin\ \alpha$, & sera, par conséquent, la plus grande qu'il est possible.

(267.) Au contraire, la moindre force que la Voile puisse produire, a lieu dans le cas où la courbure seroit la plus grande qu'il est possible, ou lorsque la différence $\Pi - \pi$ a la plus grande valeur, ce qui arrive lorsque $\Pi = 180^\circ$, & $\pi = o$. La formule se réduit, dans ce cas, à $\frac{\frac{1}{10} mauh\ fin\ \alpha . fin\ 90^\circ}{Arc\ 90^\circ}$: de sorte que la plus

grande force que puiſſe produire la Voile, eſt à la plus petite, comme l'arc de 90° eſt au rayon. En général, la force de la Voile ſuppoſée plane, eſt à celle qu'elle a réellement lorſqu'elle a de la courbure, comme $Arc\ \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$ eſt à $fin\ \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$.

(268.) L'angle que forme la direction LO avec celle du vent, eſt $= LOE + EAN = 180° - 90° + \frac{1}{2}(\Pi - \pi) + \pi$ * $= 90° + \frac{1}{2}(\Pi + \pi)$; d'où l'on voit que la direction LO ne dépendroit aucunement de l'angle α, ſi en altérant celui ci, on n'altéroit pas en même temps les angles Π & π; mais on a vu, (261.) que $x = Q\ log. \frac{1}{cof\ z}$ **, & $y = Qz$, & ſi nous ſuppoſons $RK = X$, on aura $X = Q\ log. \frac{1}{cof Z}$, & $Y = QZ$, Z exprimant l'angle OYN: donc $\frac{y-Y}{x-X} = tang.\alpha$ *** $= \frac{z - Z}{log.cof\ Z - log.cof\ z} = \ldots\ldots$ $\frac{Arc\ (\Pi - \pi)}{log.cof\ (90° - \Pi) - log.cof\ (90° - \pi)} = \frac{Arc\ (\Pi - \pi)}{log\ fin\ \Pi - log.fin\ \pi}$, & $fin\ \alpha = \ldots$ $\frac{Arc\ (\Pi - \pi)}{\left(\left(log. \frac{fin\ \Pi}{fin\ \pi}\right)^2 + Arc\ (\Pi - \pi)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ ****; d'où l'on voit que les angles Π & π dépendent de l'angle α, & qu'à meſure que cet angle devient plus grand, la différence de ces angles Π & π le devient auſſi: &, par conſéquent, que la direction LO dépend auſſi de l'angle α, quoique cela ne ſoit pas indiqué par l'expreſſion $90° + \frac{1}{2}(\Pi + \pi)$ de l'angle que cette direction forme avec celle du vent.

(269.) L'équation $tang.\alpha = \frac{Arc\ (\Pi - \pi)}{log.fin\ \Pi - log.fin\ \pi}$, que nous venons de trouver, peut ſervir pour trouver les valeurs de Π & π, celle de α étant donnée; mais comme ce problême eſt indéterminé, on trouvera une infinité de ſolutions correſpondantes à une même valeur de α, chacune de ces ſolutions réſultant d'une vîteſſe différente du vent, qui oblige la Voile à prendre plus ou moins de courbure: car il eſt clair, qu'autant on menera de *paralleles* à

* En effet, $LOE = 180° - LOM = 180° - \frac{1}{2}\varphi = 180° - 90° + \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$, *Article* 263.

** On trouve encore ici la faute que nous avons fait remarquer dans ſeconde Note de l'*Art.* 261; mais elle n'a aucune influence ſur la valeur de *fin* α. Nous avons corrigé ce paſſage.

*** Car $x - X = KP$, & $y - Y = AP$: or, $KP : AP :: 1 : tang\ KAP = tang\ \alpha = \frac{y - Y}{x - X}$.

**** Cela eſt évident, puiſque $AK : 1 :: AP : fin\ AKP = fin\ \alpha = \frac{AP}{AK}$. Mais $AK = (KP^2 + AP^2)^{\frac{1}{2}} = ((x - X)^2 + (y - Y)^2)^{\frac{1}{2}}$; & nous venons de voir que $x - X = log.fin\ \Pi - log\ fin\ \pi = log \frac{fin\ \Pi}{fin\ \pi}$; pareillement que $y - Y = z - Z = Arc\ (\Pi - \pi)$: c'eſt en ſubſtituant ces valeurs en place de leurs correſpondantes, qu'on trouvera l'expreſſion même de l'Auteur.

AK, qui se termineront à la courbe comme BX, autant on aura d'autres cas, dans lesquels α conservant la même valeur, Π & π en auront une différente, & répondront à des parties de la Voile d'une courbure différente, laquelle courbure doit résulter de la plus ou moins grande vitesse du vent; de sorte que plus cette vitesse sera grande, plus aussi l'angle Π sera grand, & plus l'angle π sera petit, le premier augmentant dans une plus grande raison que celle dans laquelle le deuxieme diminue.

(270.) Si de l'angle $90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi)$ que forme le vent avec la direction LO (268.), on retranche l'angle α que forme le vent avec la vergue, on aura l'angle AVO, que forme la vergue avec la direction LO, $= 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$ *; & l'angle VOQ que forme cette direction avec la perpendiculaire OQ à la vergue, & que nous appellerons δ, sera $= \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, d'où il suit que l'angle AVO que forme la vergue avec la direction LO, sera aussi $= 90^\circ + \delta$.

(271.) Si l'on suppose maintenant que TS représente la quille du Vaisseau, & si nous appellons β l'angle TSV qu'elle forme avec la vergue, l'angle STV que forme la quille avec la direction LO sera $= 90^\circ + \delta - \beta = 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha - \beta$; ou, parce que $\alpha + \beta$ est égal à l'angle que forme le vent avec la quille, si nous supposons que cet angle soit $= \gamma$, celui que forme la quille avec la direction LO, sera $= 90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \gamma$.

(272.) La force que fait la voile dans la direction LO, est à la force qu'elle fait dans la direction de la quille, comme le rayon est au cosinus de l'angle STV que forme la quille avec la direction LO : donc la force que fait la voile suivant la quille, sera $= \dfrac{\frac{1}{20} mauh \sin\alpha . \sin\frac{1}{2}(\Pi - \pi) \sin(\beta - \delta)}{Arc \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$ **. Or, cette force est à celle qu'exerce la vergue latéralement, ou perpendiculairement à la quille, comme $\sin(\beta - \delta)$ est à $\cos(\beta - \delta)$; ainsi, cette force latérale sera $= \ldots$ $\dfrac{\frac{1}{20} mauh \sin\alpha . \sin\frac{1}{2}(\Pi - \pi) \cos(\beta - \delta)}{Arc \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$.

(273.) Enfin, il ne nous reste plus qu'à chercher le centre des forces de la Voile. Si elle étoit plane, & de la forme d'un parallélogramme rectangle, il n'y a pas de doute que ce centre ne fût au milieu de la voile, ou au milieu de la corde KA. Ce seroit

* Car l'angle $90^\circ + \frac{1}{2}(\Pi + \pi)$, que forme le vent avec la direction LO, $= LOE + EAN$, (268.). Retranchant de cet angle celui $AKP = KAN$ que forme la vergue avec le vent, on aura pour reste $LOE + EAN - KAN = LOE - VAO$. Or, $LOE = AVO + VAO$; donc $LOE - VAO = AVO + VAO - VAO = AVO$.

** En effet, $\cos STV = \cos(90^\circ + \delta - \beta) = \sin(90^\circ - (90^\circ + \delta - \beta)) = \sin(\beta - \delta)$

la même chose, quoique la voile fût courbe, si sa courbure étoit égale de part & d'autre de ce centre; mais il n'en est pas ainsi, puisque les courbures sont plus considérables sous le vent. En effet, la direction de la résultante est LO, & O est un point où une puissance étant appliquée, feroit le même effet que les deux puissances égales, placées aux extrêmités K & A. Ce feroit la même chose, si cette puissance étoit placée dans quelque autre point de la direction LO. Ainsi, supposant que S est le milieu de la corde KA, l'action de la Voile, supposée plane, s'exercera dans le point S; mais étant supposée courbe, & ST représentant la quille du Vaisseau, le point T, intersection de cette ligne avec la direction LO, sera le point sur lequel la Voile courbe exercera son action : de sorte que, pour le calcul & pour l'effet, ce sera la même chose que si, la voile étant supposée plane, le mât, ou le milieu de la vergue étoit en T, ou qu'on eût porté le mât vers la poupe de la quantité ST. La valeur de cette quantité peut se trouver par le calcul trigonométrique. Pour cela, on remarquera que l'angle KOA étant $= 180^\circ - (\Pi - \pi)$, & $KAO = \alpha - \pi$, on aura $KO = \frac{h \sin(\alpha - \pi)}{\sin(\Pi - \pi)}$. Pareillement l'angle KOL étant $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\Pi - \pi)$, & $KVO = 90^\circ - \delta$, on aura $KV = \frac{h \sin(\alpha - \pi) \cos \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{\sin(\Pi - \pi) \cos \delta}$, & $SV = \frac{1}{2} h - \frac{h \sin(\alpha - \pi) \cos \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{\sin(\Pi - \pi) \cos \delta}$. Enfin l'angle TVS étant $= 90^\circ - \delta$, & $STV = 90^\circ + \delta - \beta$, on aura $ST = \frac{\frac{1}{2} h \cos \delta}{\cos(\beta - \delta)} - \frac{h \sin(\alpha - \pi) \cos \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{\sin(\Pi - \pi) \cos(\beta - \delta)} = \frac{\frac{1}{2} h}{\cos(\beta - \delta)} \left(\cos \delta - \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\sin \frac{1}{2}(\Pi - \pi)} \right)$ *.

(274.) Ayant posé les principes théoriques de l'action de la Voile, nous devons maintenant chercher les angles qui ont lieu, & qu'on observe dans la Marine, afin d'appliquer ces principes à la pratique, d'une maniere convenable. Lorsqu'on navigue vent en poupe, on sçait déjà que $\alpha = 90^\circ$: on aura, par conséquent (269.), $\tang \alpha = \frac{Arc\,(\Pi - \pi)}{\log. \sin \Pi - \log \sin \pi} = \infty$; ce qui donne $\sin \Pi = \sin \pi$, ou $\Pi = 180^\circ - \pi$. Ces valeurs étant substituées dans celle de $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, (270.), il en résulte $\delta = 90^\circ - 90^\circ = 0$; ce qui indique que la Voile agit dans une direction perpendiculaire à la vergue, ce qui est d'ailleurs bien évident. Substituant de même les valeurs trouvées, & celles de $\beta = 90^\circ$ dans l'expression de la force que fait la Voile suivant la quille, cette expression deviendra $= \frac{\frac{1}{20} mauh \sin(90^\circ - \pi)}{Arc\,(90^\circ - \pi)}$: de sorte qu'à mesure que π diminue, ou que la Voile prend une plus grande courbure, la force qu'elle produit devient moindre. L'action qu'elle exerce laté-

* Car $\cos \frac{1}{2}(\Pi - \pi) = \frac{\sin(\Pi - \pi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$, (Note de l'*Article* 263.).

ralement devient zéro, à cause de $cos\beta = 0$; & la valeur de ST n'est pas déterminée, parce qu'en substituant les valeurs trouvées dans l'expression de ST, on a $ST = \frac{\frac{1}{2}h}{0}(1 - 1)$.

(275.) Lorsqu'on navigue à la bouline, il est fort difficile d'avoir avec une exactitude suffisante la valeur de l'angle α, de même que celle de l'angle β, par des mesures prises à bord du Vaisseau; en conséquence, pour obtenir ces angles avec quelque précision, j'ai eu recours à un Modele très-parfaitement gréé: par ce moyen, j'ai trouvé qu'en se servant de *drosses* *, & en les larguant, & forçant les vergues contre les *haubans* & l'*étai*, j'ai trouvé, dis-je, qu'on peut *brasser les basses Voiles*, jusqu'à ce que leurs vergues forment avec la quille un angle de 35°; qu'en les brassant d'une maniere réguliere, sans rien forcer, elles en forment un de 40°, lequel peut augmenter jusqu'à 42° ½. Or, comme on sçait que dans ce cas l'angle que forme le vent avec la quille est réguliérement de 67° ½; il s'ensuit que l'angle α est de 25°. C'est donc précisément cet angle que, dans la pratique, les vergues forment avec le vent, lorsque le Vaisseau va à la bouline, & que les voiles sont bien orientées: de cette façon, on aura $\gamma = 60°$, en faisant usage de drosses; mais en brassant les Voiles sans elles, $\gamma = 65°$, & en brassant à l'ordinaire $\gamma = 67° \frac{1}{2}$, l'angle α demeurant toujours constant, & $= 25°$. Pour l'usage de notre exemple, nous pouvons prendre un milieu, & faire $\gamma = 65°$, $\alpha = 25°$, & par conséquent $\beta = 40°$. On remarquera cependant, que dans les vents forts les basses vergues, ainsi que tout l'*appareil*, peuvent se brasser davantage, à cause que les *haubans* de sous le vent sont alors très-lâches; car dans les vents médiocres, leur roideur s'oppose à ce qu'on puisse brasser les vergues au-delà d'un certain point. Les Voiles latines des Galeres, des Chebecs, &c., sont susceptibles d'être brassées beaucoup davantage.

(276.) Selon ce qu'on vient d'établir, on aura, pour les Vaisseaux allant à la bouline, $tang\,\alpha = 0,4663077 = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{Arc\,(\Pi - \pi)}{log.\,sin\,\Pi - log.\,sin\,\pi}$: mais cette équation ne peut donner la valeur de Π & π dans le cas extrême de $\Pi = \pi$, c'est-à-dire, dans le cas où le vent est infiniment petit, & la Voile plane, parce qu'il en résulte $0,4663077 = \frac{0}{0}$. Pour trouver ces angles, nous pouvons avoir re-

* Les *drosses* sont maintenant fort en usage pour les basses vergues. On les a substitués avec raison aux *racages* ordinaires, il en résulte de grandes commodités & de grands avantages pour brasser les Voiles sous un angle fort aigu, comme il convient souvent de le faire lorsqu'on navigue à la bouline.

cours à l'équation $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, parce que la Voile étant ſuppoſée plane, on a $\delta = 0$, ce qui donne $\frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha = \Pi - \alpha = 0$, & $\Pi = \pi = \alpha = 25°$. Cette quantité exprime donc la moindre valeur que puiſſe avoir Π en naviguant à la bouline, & en même temps la plus grande que puiſſe avoir π. A meſure que le vent augmentera, la valeur de Π augmentera, & celle de π diminuera; mais toujours de maniere que α demeure toujours conſtant, & $= 25°$, & $tang\ \alpha = 0{,}4663077 = \frac{Arc\,(\Pi - \pi)}{log.\,ſin\,\Pi - log.\,ſin\,\pi}$. Si nous ſuppoſons maintenant qu'avec un vent propre à porter toutes les Voiles, on ait $\Pi = 60°$, on aura $\pi = 6°\ 40'\frac{1}{2}$: & ſi avec un vent fraix Π augmente juſqu'à être $= 90°$, on trouvera $\pi = 2°\ 7'\frac{1}{2}$ *. Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, on aura, pour le premier cas, $\delta = \frac{1}{2}(60° + 6°\ 40'\frac{1}{2}) - 25° = 8°\ 20\frac{1}{4}$, & pour le ſecond, $\delta = \frac{1}{2}(90° + 2°\ 7'\frac{1}{2}) - 25° = 21°\ 3'\frac{3}{4}$: d'où l'on voit déjà combien, par l'augmentation ſeule du vent, la dérive du Vaiſſeau doit augmenter, ſans compter même l'effet de la mer; puiſque d'un cas à l'autre il y a $12°\ 43'\frac{1}{2}$ de différence, qui eſt la quantité dont la direction du vent fraix tombe plus ſous le vent que celle de l'autre. Subſtituant maintenant toutes les valeurs trouvées, & celle de $\beta = 40°$, dans l'expreſſion de la force

* Si de l'équation $0{,}4663077 = \frac{Arc\,(\Pi - \pi)}{log.\,ſin\,\Pi - log\ ſin\,\pi}$, on vouloit tirer directement la valeur de π qui répond à chaque valeur de Π, on ſe jetteroit dans des calculs fort compliqués, & dont nous ne pourions indiquer l'eſprit, ſans rappeller des principes dont le détail n'eſt pas de notre objet. Les équations de cette eſpece ſe préſentant rarement, elles n'ont encore été traitées que fort peu par les Analyſtes. On ſe contentera donc d'une méthode indirecte, & on procédera en cette maniere. On fera d'abord π d'un certain nombre de degrés à peu près tel qu'on préſumera qu'il devra être; & on fera pour cette valeur ſuppoſée les opérations que l'équation indique, ce qui donnera une valeur de $tang\ \alpha$. Si cette valeur ſe trouve $= 0{,}4663077$, on aura rencontré la vraie valeur de π; mais ſi elle eſt plus ou moins grande, ce qui arrivera preſque toujours, on ſubſtituera une autre valeur de π, plus ou moins grande que la premiere d'un degré, & on continuera de faire cette ſubſtitution de degré en degré, juſqu'a ce qu'on obtienne deux réſultats conſécutifs, l'un plus grand, & l'autre moindre que 0,4663077. On fera enſuite cette proportion, la différence des deux réſultats entre leſquels ſe trouve 0,4663077, eſt à la différence entre ce nombre, & le réſultat qu'a fourni le plus petit des deux nombres de dégrés ſuppoſés pour π, comme 60 minutes eſt au nombre des minutes qu'on doit ajouter à ce nombre de degrés; ce qui donnera la valeur de π avec une approximation ſuffiſante. Au reſte, ſi on vouloit une plus grande préciſion, on ſeroit maître de l'obtenir en ſe ſervant de la premiere aproximation, & en procédant de la même maniere. On remarquera que $log\ ſin\,\Pi - log\ ſin\,\pi$, eſt le logarithme hyperbolique de $\frac{ſin\,\Pi}{ſin\,\pi}$; ainſi, en ſe ſervant des logarithmes tabulaires, il faut multiplier $log\ ſin\,\Pi - log\ ſin\,\pi$ par 2,30258509, (*Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Quatrieme Partie, *Article* 113.) pour transformer cette différence en logarithme hyperbolique. Il eſt bien eſſentiel qu'on ait des tables des logarithmes hyperboliques, tant pour les nombres naturels que pour les ſinus & tangentes du quart de cercle. Cet immenſe travail vient d'être annoncé aux Géométres par *D.* de *V***. Religieux Bénédictin de la Congrégation de Saint Maur.

que

que fait la Voile dans le ſens de la quille (272.); cette force deviendra, pour le premier cas, $= \frac{\frac{1}{20}\, mauh \sin 25^\circ . \sin(26^\circ\, 39'\, \frac{3}{4}) \sin(31^\circ\, 39'\, \frac{3}{4})}{Arc\,(26^\circ\, 39'\, \frac{3}{4})}$ $= \frac{1}{20}\, mauh . \frac{2138}{10000}$; & pour le ſecond, la même force ſera $= \ldots$ $\frac{\frac{1}{20}\, mauh \sin 25^\circ . \sin(43^\circ\, 56'\, \frac{1}{4}) \sin(18^\circ\, 56'\, \frac{1}{4})}{Arc\,(43^\circ\, 56'\, \frac{1}{4})} = \frac{1}{20}\, mauh . \frac{1241}{10000}$; de ſorte que cette derniere force n'eſt pas à proportion les $\frac{4}{7}$ de la premiere : mais cependant elle doit augmenter, à cauſe de la plus grande valeur de u. Subſtituant pareillement les mêmes valeurs dans l'expreſſion de la force latérale que produit la Voile, cette force ſera, pour le premier cas, $= \frac{1}{20}\, mauh . \frac{3468}{10000}$; & pour le ſecond $= \frac{1}{20}\, mauh\, \frac{435}{1000}$; d'où l'on voit que la force latérale augmentant dans ce ſecond cas, la dérive doit auſſi augmenter. Enfin, les valeurs de α, δ, Π, π & β étant ſubſtituées dans celles de $ST = \frac{\frac{1}{2}h}{\cos(\beta - \delta)} \left(\cos \delta - \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\sin \frac{1}{2}(\Pi - \pi)} \right)$, on aura, pour le premier cas, $ST = \frac{\frac{1}{2}h}{\cos(31^\circ 39' \frac{3}{4})} \left(\cos 8^\circ\, 20' \frac{1}{4} \right) - \frac{\sin(18^\circ 19' \frac{1}{4})}{\sin(26^\circ 29' \frac{1}{4})}) = \frac{173}{1000} . h$, & pour le ſecond, $ST = \frac{\frac{1}{2}h}{\cos(18^\circ 56' \frac{1}{4})} \left(\cos 21^\circ\, 3' \frac{1}{4} \right) - \frac{\sin(22^\circ 52' \frac{1}{4})}{\sin(43^\circ 56' \frac{1}{4})}) = \frac{217}{1000} . h$.

(277.) Lorſque l'angle γ eſt donné, on peut déduire, avec une approximation ſuffiſante, les angles α & β, que les Marins font former aux vergues, en naviguant vent largue, en diviſant proportionnellement le mouvement circulaire de la vergue, & celui du vent, en cette maniere. En allant à la bouline, le vent forme avec la quille un angle de 65°; & en allant vent en poupe, cet angle eſt de 180°: ainſi, le mouvement circulaire du vent d'une ſituation à l'autre, eſt de $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. En allant à la bouline, la vergue forme avec la quille un angle de 40°; & en allant vent en poupe, cet angle eſt de 90°: donc le mouvement circulaire de la vergue eſt de $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Ainſi, le mouvement circulaire du vent eſt au mouvement circulaire de la vergue, comme 115 eſt à 50, ou, comme 23 eſt à 10. Cela poſé, γ déſignant l'angle que forme le vent avec la quille dans un cas quelconque, & β celui formé dans le même cas par la vergue & la quille, nous aurons, pour la proportion qu'on demande entre ces mouvements, $23 : 10 :: \gamma - 65^\circ : \beta - 40^\circ$; ce qui donne $\beta = \frac{10}{23}(\gamma + 27^\circ)$; valeur de l'angle que doit former la vergue avec la quille, la valeur de γ étant donnée, c'eſt-à-dire, de l'angle que forme la quille avec le vent; & comme on a $\gamma = \alpha + \beta$, cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation, donnera $\alpha = \frac{1}{10}(13\beta - 270^\circ)$.

(278.) Dans le cas extrême où la viteſſe du vent eſt infiniment

petite; c'est-à-dire, où la voile est plane, nous avons dit (276.) que $\delta = \frac{1}{2}(\pi + \Pi) - \alpha = 0$, & $\Pi = \pi$; ce qui donne $\alpha = \Pi = \pi = \frac{1}{10}(13\beta - 270°)$; ainsi, en substituant la valeur de $\beta = \frac{10}{23}(\gamma + 27°)$, on a $\alpha = \Pi = \pi = \frac{1}{23}(\gamma + 270°)$; c'est la moindre valeur de Π, & la plus grande de π. A mesure que le vent augmentera, Π augmentera, & π diminuera, les valeurs de ces angles conservant entre elles une relation telle que $tang\ \alpha = \frac{Arc(\Pi - \pi)}{\log \frac{\sin \Pi}{\sin \pi}}$, ou $\sin \alpha = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{Arc\,(\Pi - \pi)}{\left(\left(\log \frac{\sin \Pi}{\sin \pi}\right)^2 + Arc(\Pi - \pi)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$, (268. *Note.*)

Examinons maintenant le cas dans lequel $\gamma = 134°$, ou dans lequel le vent fait avec la quille, vers la poupe, un angle de 46°, on aura, dans ce cas, $\alpha = 64°$, & $\beta = 70°$. Supposons qu'avec un vent tel qu'on puisse faire servir toutes les Voiles, on ait $\Pi = 90°$, on trouvera $\pi = 41°\ 14'$: & si avec un vent fort nous supposons $\Pi = 110°$, on trouvera $\pi = 27°\ 20'\ \frac{1}{2}$. Dans le premier cas δ sera $= 1°\ 37'$; & dans le second $\delta = 4°\ 40'\ \frac{1}{2}$. La force que fait la Voile suivant la direction de la quille, sera, dans le premier cas, $= \frac{1}{10}\ mauh. \frac{8116}{10000}$, & dans le second $= \frac{1}{10}\ mauh. \frac{748}{1000}$. Enfin la valeur de ST sera, dans le premier cas, $= \frac{844}{10000}.h$, & dans le second $= \frac{475}{10000}.h$.

On peut de la même maniere résoudre tous les autres cas du vent largue, ou construire des Tables dans lesquelles on trouveroit au premier coup d'œil, la solution de tous les cas qui peuvent se présenter.

(279.) Si au lieu de brasser, ou d'orienter les Voiles avec la régularité qu'on vient de dire, on les brassoit davantage au vent, les quantités trouvées varieroient: si au lieu d'avoir $\alpha = 64°$, & $\beta = 70°$, ayant $\gamma = 134°$, on avoit $\alpha = 54°$, & $\beta = 80°$, & qu'avec un vent fraix on eût $\Pi = 110°$, on trouveroit $\pi = 20°\ 51'$; $\delta = 6°\ 25'\ \frac{1}{2}$; la force de la Voile dans le sens de la quille, seroit $= \frac{1}{10}\ mauh. \frac{7157}{10000}$, & $ST = \frac{3846}{10000}.h$: d'où l'on voit que, par cette seule altération, la force de la Voile est moindre, & que la valeur de ST devient plus grande.

(280.) Maintenant pour que, d'après ce que nous venons d'établir, nous puissions calculer effectivement la force que produi-

ſent les Voiles, il eſt néceſſaire que nous cherchions les valeurs de *a* & de *h*, qui ſont la hauteur & la largeur des Voiles, ou, ce qui revient au même, la valeur de leur produit *ah*, lequel exprime leur aire, ou le nombre de pieds quarrés contenus dans leur ſurface. Pour le Vaiſſeau de 60 canons, qui nous ſert d'exemple, ces valeurs ſont comme il ſuit :

TABLE de la ſurface de toutes les Voiles.

Noms des Voiles.	*Chûte.*	*Largeur moyenne.*	*Surface*
Grande Voile.	44	80	3520
Grand hunier.	56	65	3640
Grand hunier avec un ris pris.	48	$67\frac{1}{8}$	3222
avec deux ris.	40	$69\frac{1}{5}$	2768
avec trois ris.	32	$71\frac{1}{4}$	2280
Miſaine.	39	$66\frac{12}{13}$	2610
Petit hunier.	52	55	2860
Petit hunier avec un ris pris. .	$44\frac{4}{7}$	$56\frac{2}{3}$	2525
avec deux ris.	$37\frac{1}{7}$	$58\frac{1}{3}$	2167
avec trois ris.	$29\frac{5}{7}$	60	1783
Artimon.			1300
Perroquet de fougue.			1720
Grand perroquet.			1500
Petit perroquet.			1130
Civadiere.			1250
Foc			1060
Faux foc, ou contre foc.			410
Bonnette de grand hunier.			1100
Bonnette de petit hunier.			860
Bonnette baſſe.			1500
Grande Voile d'étai, Voile d'étai de hune, contre Voile d'étai, ou Voile d'étai volante. . . .			700
Voile d'Etai d'artimon, de perroquet de fougue, & de grand perroquet.			400

Quel que ſoit le nombre des Voiles; ou des ſurfaces qu'on expoſe à l'action du vent, nous pourrons l'exprimer par A^2: & la force qu'elles exerceront ſera, par ce qu'on a dit (264.), = . . . $\frac{\frac{1}{20} mA^2 u \, \text{ſin}\, \alpha \, \text{ſin}\, \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{\text{Arc}\, \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$, ou en ſuppoſant $\frac{\text{ſin}\, \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{\text{Arc}\, \frac{1}{2}(\Pi - \pi)} = G$, cette force ſera $= \frac{1}{20} mA^2 Gu \, \text{ſin}\, \alpha$, *m* exprimant la denſité de l'eau, & α l'angle que forme la direction du vent avec la vergue. Mais on a vu (266.), que $\frac{1}{20} mA^2 u \, \text{ſin}\, \alpha$ exprime la force que fait la Voile, en la

ſuppoſant plane : ainſi, toutes les fois que G ſera à peu près $= 1$, comme il arrive lorſqu'il y a peu de vent, & principalement lorſqu'on va vent largue, on pourra ſuppoſer la Voile plane pour ce qui concerne l'évaluation de ſa force, & prendre pour l'expreſſion de cette force, la quantité $\frac{1}{22} mA^2 u \, \mathit{ſin}\, \alpha$.

(281.) Nous avons beſoin pareillement, pour la continuation de nos calculs, de trouver les moments verticaux avec leſquels agiſſent ces voiles : or ces moments ne ſont autre choſe que le produit des forces que nous venons de trouver par les diſtances verticales de l'axe horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du Vaiſſeau, & ſur lequel il tourne, aux centres où ſe réuniſſent les forces de chaque Voile. Pour connoître ces moments, il eſt clair que nous n'avons plus qu'à trouver les hauteurs verticales des centres des forces de chaque Voile ; & ces hauteurs ſeront connues, dès qu'on connoîtra le centre de leur ſurface, & ſa ſituation en hauteur à l'égard de la coque du Vaiſſeau : ainſi, le calcul eſt tout-à-fait ſimple. Après avoir fait les opérations pour le Vaiſſeau de 60 canons, on a trouvé les réſultats ſuivants.

TABLE de la hauteur du centre des forces de chaque Voile.

Noms des Voiles.	*Hauteur.*
Le centre de la grande Voile.	42 P.
De la miſaine.	41
Du grand hunier tout déferlé.	91
avec un ris pris.	$87\frac{2}{3}$
avec deux ris.	$84\frac{1}{6}$
avec trois ris.	$80\frac{1}{2}$
Du petit hunier tout déferlé.	84
avec un ris.	$80\frac{4}{5}$
avec deux ris.	$77\frac{1}{2}$
avec trois ris.	74
De l'artimon.	47
Du perroquet de fougue.	75
Du foc à l'extrêmité du bout-dehors	73
Du faux foc.	58
Du grand perroquet.	133
Du petit perroquet.	123
De la grande Voile d'étai, & de celle d'artimon.	33
De la civadiere.	23
De la Voile d'étai de hune.	75
De la contre Voile d'étai	92
De la Voile d'étai de perroquet de fougue. . .	73
De la Voile d'étai de grand perroquet.	122

Si on multiplie maintenant la hauteur des centres de chacune de ces Voiles, par la force $\frac{1}{10}mA^2Gu\,\text{ſin}\,\alpha$, qui lui correſpond, A^2 exprimant la ſurface de la Voile dont on cherche le moment, le produit en exprimera la valeur ; ou en nommant n cette hauteur, le moment cherché ſera $= \frac{1}{10}mnA^2Gu\,\text{ſin}\,\alpha$. On trouve dans la Table ſuivante les produits des élévations des centres, multipliées par les ſurfaces.

TABLE des ſurfaces de chaque Voile, multipliées par l'élévation de leur centre.

Noms des Voiles.	*Surfaces.*	*Élévations.*	*Produits* $= nA^2$.
De la grande Voile.	3520	42	147840
De la miſaine.	2610	41	107010
Du grand hunier.	3640	91	331240
avec un ris.	3222	$87\frac{1}{3}$	282340
avec deux ris.	2768	$84\frac{1}{8}$	232854
avec trois ris.	2280	$80\frac{1}{2}$	183566
Du petit hunier.	2860	84	240240
avec un ris.	2525	$80\frac{4}{7}$	203964
avec deux ris.	2167	$77\frac{1}{2}$	167857
avec trois ris.	1783	74	131980
De l'artimon.	1300	47	61100
Du perroquet de fougue. . . .	1720	75	129000
Du foc.	1060	73	77380
Du faux foc.	410	58	23780
Du grand perroquet.	1500	133	199500
Du petit perroquet.	1130	123	138990
De la grande Voile d'étai. . .	700	33	23100
De la Voile d'étai d'artimon. . .	400	33	19800
De la civadiere.	1250	23	28750
De la Voile d'étai de hune. . .	700	75	52500
De la contre Voile d'étai . .	700	92	64400
De la Voile d'étai de perroquet de fougue.	400	73	29200
De la Voile d'étai de grand perroquet.	400	122	48800
Somme des produits pour toute la Voilure			1722630

Multipliant maintenant un nombre quelconque de ces produits par $\frac{1}{10}muG\,\text{ſin}\,\alpha$, on aura le moment des Voiles qui leur correſpondent.

(282.) Si on diviſe la ſomme des moments d'un nombre quel-

conque de Voiles par la somme de leurs forces, le quotient exprimera l'élévation du centre des forces de toutes ces Voiles au-dessus de l'horisontale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau. De cette sorte, si $\frac{1}{60} mnA^2Gu \sin\alpha$ représente cette somme des moments, n sera l'élévation du centre de toutes ces forces, ou de toutes ces Voiles : ainsi, $\frac{1}{60} muG \sin\alpha . 1722630$ étant l'expression du moment de toutes les Voiles qui servent en allant à la bouline, & $\frac{1}{60} muG \sin\alpha . 24400$, la somme de leurs forces, l'élévation du centre des Voiles au-dessus de l'horisontale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau, sera $n = \frac{1722630}{24400} = 70$ pieds ½; c'est-à-dire que, dans quelque cas que ce soit, l'élévation dont il est question sera le quotient qui résulte de la division de la somme des produits exprimés dans la Table précédente, par la somme des surfaces. Ainsi en naviguant seulement avec la grande Voile, la misaine, les huniers avec un ris pris, le perroquet de fougue, & le faux foc, la somme des produits est $= 893928$, & celle des surfaces $= 14107$: par conséquent, le centre de ces Voiles sera élevé de 63 pieds ⅓. Les produits pour les deux basses Voiles seules $= 254850$, & leur surface $= 6130$: donc l'élévation du centre de leurs forces sera de 41 pieds ½; il en est de même des autres Voiles.

(283.) Dans les Vaisseaux qui portent des appareils proportionnels aux dimensions linéaires de leurs carenes, ou de leurs largeurs, comme les Marins le pratiquent pour l'ordinaire; les surfaces des Voiles, sont comme les quarrés de ces dimensions, & les moments comme leurs cubes : si donc m représente la largeur du Vaisseau de 60 canons, & M celle d'un autre Vaisseau quelconque, le moment des Voiles du premier, sera au moment de celles du second, comme m^3 est à M^3. Ainsi le moment de toutes les Voiles pour le Vaisseau de 70 canons, dont les dimensions linéaires sont à celles du Vaisseau de 60 canons, comme 8 est à 7, sera $\frac{512}{343} . \frac{1}{60} muG \sin\alpha . 1722630 = \frac{1}{60} muG \sin\alpha . 2571390$: il en sera de même des autres Vaisseaux & des autres Voiles.

(284.) De même que nous avons calculé le moment de l'élévation du centre des Voiles, relativement à l'action verticale; nous avons besoin de calculer le même moment, pour ce qui concerne l'action horisontale, qui est celle dont dépend le manege, ou le gouvernement du Vaisseau. Pour remplir cet objet, nous devons déterminer la situation des mâts, ou la distance dont le centre des forces de chaque Voile est éloigné de l'axe vertical qui passe par le centre de gravité du Vaisseau : car le produit de la force de chaque Voile par cette distance, sera l'expression de son moment, & la

somme de tous ces produits divisée par celle des forces, donnera la distance horisontale du centre commun de toutes ces forces à l'axe vertical qui passe par le centre de gravité du Vaisseau.

(285.) Les Constructeurs suivent, pour l'ordinaire, des regles qu'ils se sont faites pour l'emplacement, ou la situation des mâts, & ils les emploient indifféremment, quelle que soit la figure du Vaisseau, tandis qu'à cet égard le principal objet devroit être d'établir un équilibre parfait, comme on le verra dans son lieu. Les uns placent le grand mât de $\frac{1}{8}$ de la longueur plus à la poupe que le milieu du Vaisseau, d'autres de $\frac{1}{22}$ seulement. Les premiers placent le mât de misaine, distant de la proue, de $\frac{1}{8}$ de la longueur, & les seconds seulement de $\frac{1}{10}$: le mât d'artimon, suivant les premiers, est distant de l'étambot des $\frac{3}{16}$ de la longueur, & suivant les seconds des $\frac{4}{23}$. Le Vaisseau de 60 canons, qui nous a servi d'exemple, avoit ses mâts placés suivant la méthode des seconds: c'est-à-dire, que le grand mât étoit à la poupe du milieu du Vaisseau de 6 pieds $\frac{10}{11}$; le mât de misaine étoit éloigné du même milieu de 60 pieds $\frac{4}{7}$; & le mât d'artimon étoit à 49 pieds $\frac{13}{23}$ à la poupe: mais, comme nous l'avons vu (140.), le milieu du Vaisseau étoit de $\frac{3}{7}$ de pied à la poupe du centre de gravité: donc le grand mât étoit éloigné du centre de gravité de 7 pieds $\frac{8}{23}$; le mât de misaine de 60 pieds $\frac{7}{11}$; & le mât d'artimon de 49 pieds $\frac{31}{33}$. On voit, d'après cela, que le centre des forces horisontales de la grande Voile, du grand hunier, & du grand perroquet, peut être supposé à la distance de 7 pieds du centre de gravité, à cause que les deux dernieres Voiles sont de quelque chose plus avancées vers la proue que la premiere. Le centre des forces de la misaine, du petit hunier, & du petit perroquet, peut pareillement être supposé à la distance de 61 pieds; & celui du perroquet de fougue, à 50 pieds, parce que ce mât tombe un peu vers la poupe. L'artimon a son centre à 65 pieds. Le grand foc qui est amuré à l'extrêmité du *bout dehors*, a son centre à 100 pieds; & le contre foc, ou faux foc, à 90 pieds. Maintenant si chacune de ces distances est multipliée par la force des Voiles, auxquelles elle correspond, on aura le moment horisontal de cette force: & la somme de tous ces moments étant divisée par la somme des forces, donnera la distance horisontale du centre commun des forces de toutes les Voiles, à la verticale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau; ou, ce qui est la même chose, la somme des produits de chacune des distances, par les surfaces des Voiles correspondantes, étant divisée par la somme des surfaces, donnera la même distance horisontale.

Or, nous avons, pour le grand mât, le produit (3520+3640+1500).7=60620; pour le mât de misaine (2610+2860+1130).61=402600; pour le perroquet de fougue 1720.50 = 86000; pour l'artimon, 1300.65 = 84500; pour le foc, 1060.100 = 106000; & pour le faux foc, 410.90=36900. Les produits pour le grand mât & pour le mât d'artimon, font ensemble 231120, & ceux pour le mât de misaine, le foc, & le faux foc, font 545500. Retranchant maintenant les premiers produits qui obligent le Vaisseau à venir au vent, des derniers qui l'obligent à arriver; il reste, pour les moments qui produisent cette derniere action, 314380, lesquels étant divisés par la somme 19750 des surfaces; il vient au quotient 16 pieds $\frac{1}{7}$, distance horisontale du centre commun des forces des Voiles dont nous venons de parler, à la verticale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau. Comme la plus grande élévation qu'on donne à la poupe, équivaut à une surface qui agit de la même maniere que les Voiles qui font venir le Vaisseau au vent: nous ne devons pas omettre de considérer son effet. La surface de la poupe peut être évaluée à 540 pieds, & son centre de force est éloigné de la verticale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau, de 50 pieds: partant, son moment est de 27000 pieds. En outre, il faut encore considérer que l'inclinaison du foc & du faux foc, à l'égard de l'horison, diminue beaucoup leur force. Selon ce qu'on a dit, (*Tome I*, 654.) la force est en raison directe, composée de l'aire verticale, & du sinus d'incidence; mais l'aire verticale diminue comme le même sinus; donc elle sera comme le quarré de ce sinus. L'inclinaison du foc est à peu près de 45° : ainsi, le quarré de son sinus sera $=\frac{1}{2}$, le rayon étant l'unité : par conséquent la diminution de la force est la moitié; & il en est de même pour le moment qui se réduit à 53000: c'est le même que celui qui résulteroit, si l'aire de la Voile, au lieu d'être = 1060, étoit seulement de 530, c'est-à-dire, de la moitié de ce qu'elle est réellement. L'inclinaison du faux foc, à l'égard de la verticale, est moindre, elle va seulement à 30°; par conséquent sa force diminue dans la raison de 4 à 3: son moment sera donc = 27675, & l'aire correspondante = 307 $\frac{1}{2}$. Retranchant maintenant la diminution des moments des focs de la somme 554500 des moments que nous avons trouvés ci-dessus, & qui tendent à faire arriver le Vaisseau, ils se réduiront à 492275 pour ce qui concerne le même effet. On trouvera de la même maniere que la somme des moments pour faire venir au vent est= 258120, en ajoutant aux 231120, que nous avons trouvés ci-dessus, ceux qui procedent

procedent de l'aire de la poupe. Faisant ensuite une opération analogue pour ce qui concerne les surfaces, on en trouvera la somme $= 19657\frac{1}{2}$, & divisant par ce nombre la différence des moments $492275 - 258120 = 234155$, on trouvera à peu près 12 pieds pour le quotient; c'est la vraie distance horisontale du centre commun de toutes les forces, à la verticale qui passe par le centre de gravité de tout le Vaisseau.

(286.) On peut trouver de la même maniere le centre commun des forces de quelque autre assemblage de Voiles que ce soit; mais on observera que, connoissant déjà les moments 234155, & les surfaces $19657\frac{1}{2}$ des Voiles ci-dessus, l'opération déviendra très-facile, lorsqu'il sera question d'en retrancher quelqu'unes. Supposons, par exemple, qu'on veuille supprimer les perroquets; le moment du grand perroquet agit pour faire venir au vent, & est $= 1500.7 = 10500$; & celui qui correspond au petit perroquet agit pour faire arriver, & est $= 1130.61 = 68930$: ajoutant le premier de ces moments, & retranchant le second de la somme trouvée 234155, il restera 185715, qui, divisé par la somme des surfaces $19657\frac{1}{2} - 1500 - 1130 = 17027\frac{1}{2}$, donnera au quotient 10 pieds $\frac{9}{11}$, pour la distance horisontale du centre des forces, à la verticale qui passe par le centre de gravité du Vaisseau. Supposons encore qu'outre les perroquets, on supprime aussi le foc. Son moment est 53000, lequel étant retranché de 185715, il reste 132715; & ce reste étant divisé par l'aire $17027\frac{1}{2} - 530 = 16497\frac{1}{2}$; on aura au quotient 8 pieds, à peu près; c'est la distance horisontale du centre des forces à la verticale du centre de gravité. Supposons maintenant qu'outre ces Voiles retranchées, on prenne ensuite un ris dans chaque hunier; le moment de la partie retranchée dans l'un, sera $= 418.7 = 2926$, & celui de la partie retranchée dans l'autre, sera $= 335.61 = 20435$: par conséquent, la distance horisontale sera alors $= \frac{132715 - 20435 + 2926}{16497\frac{1}{2} - 418 - 335} = 7\frac{1}{3}$. Enfin, si l'on cargue l'artimon, dont le moment est de 84500, & la surface de 1300; la distance horisontale du centre des forces, à la verticale qui passe par le centre de gravité, deviendra $= \frac{199706}{14444} = 13$ pieds $\frac{4}{7}$. Si l'on veut avoir égard à la courbure des Voiles, il faudra retrancher, de toutes ces déterminations, ou de la distance horisontale du centre des forces, à la verticale du centre de gravité, la valeur de *ST* qu'on a trouvée précédemment, (273 & 276.); & on aura, par cette correction, la vraie situation du centre des forces : mais nous ré-

PLANC. VIII. serverons cet article pour quand nous traiterons du manege, ou du gouvernement du Vaisseau, parce que c'est l'endroit où nous avons besoin d'avoir égard à cette circonstance.

CHAPITRE II.

Du Gouvernail.

(287.) NOUS avons déjà dit (9.), que le Gouvernail est une piece de bois plane des deux côtés, ou un assemblage de pieces, placé verticalement sur des gonds, à l'extrêmité de la poupe, c'est-à-dire, à l'étambot. Cette piece, en tournant sur ses gonds, peut passer vers la droite ou vers la gauche du Vaisseau; & en s'opposant au courant des eaux par ce côté, elle peut faire naître une nouvelle puissance qui oblige tout le Vaisseau à tourner, ou dont l'effet est de faire équilibre aux puissances étrangeres, qui agiroient pour le détourner de la direction qu'on veut qu'il tienne. La théorie de cet instrument, ou machine, a été donnée par plusieurs Géometres; mais tous se sont fondés sur le principe que les résistances, ou actions que les eaux exercent sur le Gouvernail, suivent la raison des quarrés des vîtesses du fluide, & celle des quarrés des sinus des angles d'incidence. Ils n'ont pu tirer de ce principe aucune conséquence sur la figure la plus avantageuse qu'on pourroit donner au Gouvernail; & cependant l'expérience a appris que c'est celle d'un trapese plus large par la partie inférieure que par la supérieure, tel que l'usage de toutes les nations l'a établi, & tel que nous l'avons supposé, *Art.* 182. Mais notre nouveau principe détermine cette figure conformément à la pratique, ainsi que nous le verrons en son lieu. Nous avons dit, *Art.* 18, que, pour l'ordinaire, l'étambot a une inclinaison, ou quête, vers l'arriere; par conséquent le Gouvernail, qui lui est assujetti, a la même inclinaison, c'est ce qui est cause qu'en passant d'un côté à l'autre de l'étambot, & hors de la direction de la quille, il cesse d'être vertical, comme il l'est dans la premiere situation, c'est-à-dire, lorsqu'il est dans une même direction avec la quille. Toutes ces circonstances compliquent davantage la théorie du Gouvernail, mais elle ne nous fournira pas moins les régles & les lumieres qui doivent nous conduire.

FIG. 40. (288.) Soit $BDEC$ la projection verticale du Gouvernail, BD sa largeur à la superficie de l'eau, & EC la même largeur dans son extrêmité inférieure. Soit, en outre, $DB = CH = b$; $EH = e$; la hau-

teur verticale comprise depuis DB jusqu'à $EC = a$; une partie quelconque de cette hauteur, comptée jusqu'à une différencielle horisontale, où l'abscisse $= x$, & l'ordonnée correspondante $= y$. Cela posé, on aura $a : e :: x : \frac{ex}{a}$, &, par conséquent, $y = b + \frac{ex}{a}$. La force des eaux sur une différencielle de la surface sera $= \frac{m y dx \sin \varkappa}{\sin \eta} (x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin \theta)^2$ (*Tome I*, 594), & la résistance $= \frac{m u y \sin \varkappa \sin \theta}{2 \sin \eta} x^{\frac{1}{2}} dx$ (*Ibid.* 652, 654, 655, 658 & 670.); mais, à cause de l'inclinaison du Gouvernail qui résulte de la quête de l'étambot, il faut remarquer que $\sin \eta$ est moindre que le rayon, ou que l'unité, &, par la même raison, que $\varkappa$ ni θ ne sont les angles que forme la direction horisontale BA de l'eau, avec les différencielles horisontales NT du Gouvernail, en supposant que cette Figure soit une projection horisontale de la quille & du Gouvernail. Si nous nommons donc λ l'angle TAB que forme la direction de l'eau avec la différencielle horisontale du Gouvernail, on aura (*Tome I*, 584.), $\sin \theta = \sin \eta . \sin \lambda$, & $\sin \varkappa = \sin \eta . \cos \lambda$, en supposant que AQ, perpendiculaire à la quille, soit la direction suivant laquelle on cherche l'effet de la force * : parce qu'en effet c'est seulement la force qui agit dans cette direction qui tend à produire la rotation du Vaisseau; celle qui est dirigée suivant BA, ou parallélement à la quille, ne produisant d'autre effet que de retarder la marche du Vaisseau, sans nullement le faire tourner **. Ces

PLANC. VIII.

FIG. 411

---

* Car l'angle exprimé par λ qui entre dans l'expression de $\sin \varkappa$, (*Tome I*, 573.) est représenté ici par l'angle TAQ, les deux lignes TA & AQ étant horisontales. Or, cet angle est le complément de l'angle TAB que l'Auteur exprime ici par la même lettre λ : donc, dans la valeur de $\sin \varkappa$, trouvée à l'*Art.* cité; c'est-à-dire, dans la valeur du sinus de l'angle formé par la surface du Gouvernail, avec la direction AQ, perpendiculaire à la quille, & suivant laquelle on cherche l'expression de la force, on doit mettre $\cos \lambda$ à la place de $\sin \lambda$; après toutefois avoir fait $\sin \mu = 1$, & $\cos \mu = 0$, attendu que le mouvement est horisontal, (*ibid.* 577 & 584.). Ce n'est pas la même chose pour la valeur de $\sin \theta$, ou de l'angle formé par la direction BA, suivant laquelle se fait le choc, avec la surface du Gouvernail; c'est l'angle même $TAB = \lambda$ qui entre dans son expression.

** Cette assertion ne nous paroît pas rigoureusement exacte; car la force dirigée suivant BA, ou parallélement à la quille, ou plutôt la résultante de toutes les actions partielles qui agissent dans cette direction, passant par le centre des résistances qu'éprouve la surface du Gouvernail, il est évident qu'elle ne passe pas par le centre de gravité du Vaisseau; ainsi (*Tome I*, 128, & *suiv.*) elle doit produire un mouvement de rotation autour de l'axe vertical qui passe par ce centre. Le moment de cette force conspire avec celui de la force perpendiculaire pour faire tourner le Vaisseau dans le même sens. C'est sans doute la petitesse de ce moment qui fait dire à l'Auteur que la force suivant la quille n'a d'autre effet que de retarder le sillage.

Ces deux forces peuvent encore produire d'autres mouvements de rotation; sçavoir, autour de deux axes horisontaux perpendiculaires entr'eux, & passant par le centre de gravité, l'un dirigé suivant la quille, & l'autre dirigé, par conséquent, dans le sens de la largeur. Car, pour que ces forces n'en produisissent point, il faudroit que le centre des résistances du Gouvernail, & le centre de gravité du Vaisseau, fussent dans un même plan horisontal; ce qui n'a jamais lieu. De-là on voit que l'action seule du Gouvernail, indé-

PLANC. VIII. valeurs de $\sin\theta$, $\sin x$, & de y, étant substituées dans la formule, elle deviendra $\frac{1}{2} mux^{\frac{1}{2}} dx\left(b + \frac{ex}{a}\right) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda$; d'où, en intégrant, on tire la valeur de toute la force avec laquelle le Gouvernail agit, suivant la perpendiculaire à la quille, $=$ . . . . $\frac{1}{2} mu\left(\frac{2}{3} ba^{\frac{3}{2}} + \frac{2ex^{\frac{5}{2}}}{5a}\right) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda$; ou, en faisant $x = a$, $=$ $mu\left(\frac{1}{3} ba^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} ea^{\frac{3}{2}}\right) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda = \frac{1}{15} mua^{\frac{3}{2}}(5b + 3e) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda$. Soit supposé maintenant $b + e = g$, c'est-à-dire, égal à toute la base inférieure du Gouvernail, & A^2 égal à toute sa surface, qui est exprimée par $\frac{1}{2} ea + ba$: d'après ces suppositions, nous aurons $b = \frac{2A^2}{a} - g$, & $e = 2g - \frac{2A^2}{a}$; & ces valeurs étant substituées dans la formule, la changent en celle-ci, ... $\frac{1}{15} mua^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4A^2}{a} + g\right) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda = \frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga) \sin n . \sin\lambda . \cos\lambda$.

(189) Pour que la formule ne renferme plus que des quantités connues, il ne nous reste plus qu'à y substituer la valeur de $\sin n$: or cette quantité est variable, à cause de la quête de l'étambot, & dépend de $\sin\lambda$. Lorsque $\sin\lambda = 0$, ou que le Gouvernail est dans la même direction que la quille, on a $\sin n = 1$ * ; & lorsque $\sin\lambda = 1$, alors $\sin n$ est égal au sinus de l'angle que forme l'étambot avec la quille.
FIG. 42. La quille étant donc représentée par QA ; BC représentant l'étambot ; $BDEC$ le Gouvernail ; & ayant abaissé les perpendiculaires BF & FG, la premiere sur la quille, & la seconde sur le Gouvernail, $\sin n$ sera le sinus de FGB. Pour trouver sa valeur, on fera $CF = h$; & dans le triangle CFG on aura, $1 : \sin\lambda :: h : FG = h \sin\lambda$; de plus, dans le triangle BFG, on aura pareillement $BG = \sqrt{a^2 + h^2 \sin\lambda^2} : BF = a :: 1 : \sin n = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2 \sin\lambda^2}}$. Cette valeur étant substituée dans la formule, la changera en celle-ci, $\frac{mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin\lambda . \cos\lambda}{15\sqrt{a^2 + h^2 \sin\lambda^2}}$.

(190.) Nous pouvons encore renfermer dans cette formule l'effet de la dérive, parce que, lorsque le Vaisseau ne suit pas la direction du vent, il est poussé non seulement dans la direction de la quille, mais encore latéralement, c'est-à-dire, perpendiculairement à son côté;

---

pendamment de toute autre cause, peut donner une légere inclinaison au Vaisseau, tant dans le sens de sa longueur que latéralement. Mais comme la distance verticale entre les plans horisontaux qui passent par le centre de gravité du Vaisseau, & par celui des résistances du Gouvernail, est ordinairement assez petite ; ces inclinaisons ne méritent aucune attention.

* Car alors le plan du Gouvernail est vertical, & n qui (*Tome I*, 669.) exprime l'angle formé par sa surface avec une ligne horisontale, perpendiculaire à la base de la differencielle, est un angle droit.

& en conféquence, la route qu'il fuit eft oblique à l'égard de la quille, comme nous l'avons déjà dit (4.). Cela pofé, fi l'on appelle ϵ l'angle de la dérive que le Vaiffeau prend; en ayant égard à cet élément, la force que fait le Gouvernail perpendiculairement à la quille, fera $= \frac{mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\sin(\lambda\pm\epsilon)\cos\lambda}{15\sqrt{a^2+n^2\sin\lambda^2}}$ *: le figne fupérieur ayant lieu lorfque la barre du Gouvernail eft tournée pour faire arriver, & l'inférieur lorfqu'elle eft tournée pour faire venir au vent. PLANC. VIII

(291.) Il fuit évidemment de cette formule, que plus la vîteffe u du Vaiffeau fera grande, plus le Gouvernail aura de puiffance pour le faire tourner, c'eft-à-dire, pour produire les effets néceffaires à fon manege. Pareillement, plus la hauteur verticale du Gouvernail fera grande, plus auffi la même force fera grande; qu'à angles égaux du Gouvernail, fa force eft plus grande pour faire arriver que pour faire venir au vent; & enfin, que plus h fera petite, ou moins la quête de l'étambot fera grande, plus auffi la force du Gouvernail augmentera: de forte que, fi ce n'étoit à caufe que les coups de mer font alors plus dangereux, en ce que le Vaiffeau en éprouve davantage l'action à mefure que la quête de l'étambot eft plus petite, cette confidération nous porteroit à la fupprimer entiérement, ce qui réduiroit la formule à $\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\sin(\lambda\pm\epsilon)\cos\lambda$. Beaucoup de Vaif-

---

* Car nous venons de voir, (288.) que la force perpendiculaire à la quille eft exprimée par $\frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\sin n.\sin\lambda.\cos\lambda$; mais $\sin n.\sin\lambda = \sin\theta =$ le finus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la furface du Gouvernail. Donc cette force $= \ldots\ldots \frac{1}{15}mua^{\frac{1}{2}}(4A^2+ga)\sin\theta.\cos\lambda$. Lorfqu'il y a de la dérive, toutes les parties du Vaiffeau, & par conféquent celles du Gouvernail, choquent en même temps le fluide dans la direction de la quille, & dans une direction perpendiculaire au côté: & c'eft en vertu de la réfultante de ces deux actions, que le Vaiffeau prend une direction oblique à fa quille; ainfi chaque partie eft choquée dans une direction interm diaire. Si, par exemple, le point A du Gouvernail, reçoit un choc dans la direction AC, en vertu du mouvement direct qui le feroit paffer de A en C, pendant un temps infiniment petit; & fi, dans le même temps, il reçoit un choc dans la direction AE, en vertu du mouvement latéral qui le feroit paffer de A en E; il eft évident qu'en vertu de ces deux actions fimultanées, le Gouvernail eft choqué dans la direction AD, qui eft la diagonale du parallélogramme, formé fur les directions AC, AE, (*Tome I*, 57 & 58.); il en fera de même de tous les autres points du Gouvernail; ainfi, les différencielles horifontales du Gouvernail, frapperont le fluide fous l'angle TAD. FIG. 41. N°. 1.

L'angle CAD qui eft égal à l'angle formé par la direction de la route, & celle de la quille eft égal à l'angle de la dérive que l'Auteur à exprimé par ϵ; ainfi, $TAD = TAC + CAD = \lambda + \epsilon$; &, par conféquent, le nouvel angle θ eft tel que $\sin\theta = \sin n.\sin(\lambda+\epsilon)$. Nous avons fuppofé, dans cette explication, que le Gouvernail eft tourné pour faire arriver le Vaiffeau; mais fi, dans la difpofition marquée par la Figure, il étoit tourné pour le faire venir dans le vent, l'explication qu'on vient de donner s'appliqueroit mot à mot à la *Fig.* 42, *N°.* 2; & l'angle TAD feroit alors $= TAC - CAD = \lambda - \epsilon$; d'où il fuit que $\sin\theta = \sin n.\sin(\lambda-\epsilon)$: donc en réuniffant ces deux expreffions dans une, on a $\sin\theta = \sin n.\sin(\lambda\pm\epsilon)$. Subftituant cette valeur, ainfi que celle de $\sin n$, dans l'expreffion de la force, elle deviendra telle que l'Auteur la donne. FIG. 42. N°. 2.

ſeaux ont cependant été conſtruits ſans aucune quête; mais comme il n'eſt pas néceſſaire que le Gouvernail ait tant de force, attendu que l'expérience journaliere fait voir que, ſans cette extrême puiſſance, le Gouvernail produit tout l'effet qui peut être néceſſaire; il ſeroit imprudent de s'expoſer aux accidents qui peuvent arriver dans une tempête, pour chercher à ſe procurer un avantage ſi médiocre. On peut, malgré cela, employer cette derniere formule, parce qu'on ne doit pas donner à l'étambot la quête exceſſive qu'anciennement on étoit dans l'uſage de lui donner; &, dans ce cas, la quantité h eſt très-petite, & par conſéquent, ſuſceptible d'être négligée *.

(292.) Pour ce qui concerne l'angle λ que doit former le Gouvernail avec la quille, il eſt évident que, lorſque $\lambda = 0$, l'expreſſion de la force ſe change en $\frac{1}{15} mua^{\frac{3}{2}}(4A^2 + ga)\, fin \pm \varepsilon$: de ſorte que cette force eſt poſitive pour arriver, negative pour venir au vent, & $= 0$ lorſque la dérive eſt nulle; la force eſt encore $= 0$, lorſque $\lambda = 90°$, ou que le Gouvernail eſt dans une ſituation perpendiculaire à la quille **.

---

* La quête que les Conſtructeurs donnent aujourd'hui à l'étambot, eſt très-petite; ainſi la quantité h eſt fort petite, & peut, par conſéquent, être négligée.

** Cela eſt évident par la formule, mais on peut d'ailleurs le rendre ſenſible ſans en faire uſage; car le Gouvernail ne choque alors le fluide qu'en vertu du mouvement direct, & nullement en vertu du mouvement latéral, puiſque ce dernier ſe fait dans une direction parallele à la ſurface du Gouvernail. Or, dans ce cas le Gouvernail choque le fluide perpendiculairement, & il n'en peut réſulter d'action parallélement à ſa ſurface; c'eſt-à-dire, perpendiculairement à la quille.

Au reſte, quoique dans le cas de $fin\, \lambda = 90°$, la formule s'évanouiſſe, on auroit tort d'en conclure que l'effet du Gouvernail ſera nul, quant au mouvement de rotation. Ce réſultat indique ſeulement que la force perpendiculaire à la quille eſt alors nulle; car la formule n'eſt que l'expreſſion de cette derniere force. Il reſte, dans ce cas, la force parallele à la quille, qui eſt alors preſque dans ſon *maximum*, ainſi que nous l'allons faire voir.

La force dans une direction quelconque $= \frac{muy\, fin\, x . fin\, \theta}{2\, cos\, \varepsilon} x^{\frac{1}{2}} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{1}{2} muy x^{\frac{1}{2}} dx \frac{fin\, x . fin\, \theta}{fin\, \varepsilon}$. Subſtituant pour y ſa valeur $b + \frac{cx}{a}$, puis intégrant, comme dans l'*Article* 288, & mettant pour b & c leurs valeurs, ainſi que A^2 pour toute la ſurface du Gouvernail, on aura $\frac{1}{15} mua^{\frac{3}{2}} (4A^2 + ag) \frac{fin\, x . fin\, \theta}{fin\, \varepsilon}$. Mais puiſque le mouvement eſt ſuppoſé horiſontal, $fin\, \theta = fin\, \lambda . fin\, \varepsilon$ (*Tome I*, *Art.* 584.); & puiſqu'il s'agit de la force parallele à la quille, ou ſuivant la direction du mouvement, $fin\, x = fin\, \theta$, (*ib.* 572.). Donc, en ſubſtituant ces valeurs dans la formule, avec celle de $fin\, \varepsilon$, trouvée *Art.* 289, cette force dans le ſens de la quille ſera $= \frac{mua^{\frac{3}{2}}(4A^2 + ga)\, fin\, \lambda^2}{15\sqrt{a^2 + h^2 fin\, \lambda^2}}$, lorſqu'il n'y a point de dérive, ou, en négligeant l'effet de la quête, elle eſt ſeulement $\frac{1}{15} mua^{\frac{3}{2}}(4A^2 + ga)\, fin\, \lambda^2$.

Pour renfermer dans cette formule l'effet de la dérive, je conſidere que ſous une même inclinaiſon du Gouvernail, $fin\, x$, ainſi que $fin\, \varepsilon$ ſont des quantités conſtantes; mais que $fin\, \theta$ varie, & n'eſt plus égal à $fin\, x$, puiſqu'il ne s'agit plus d'avoir la force dans la di-

(293.) Il y a donc un angle moyen du Gouvernail avec la quille qui doit produire la plus grande force qu'il est possible, & il ne peut être que très-avantageux de le connoître, afin de pouvoir en profiter dans l'occasion. Pour y parvenir, il faut égaler à zéro la différencielle de $\sin(\lambda \pm \epsilon)\cos\lambda$, & nous aurons $\cos(\lambda \pm \epsilon)\cos\lambda - \sin\lambda.\sin(\lambda \pm \epsilon) = 0$ *, ou $\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\cos(\lambda \pm \epsilon)}{\sin(\lambda \pm \epsilon)}$; expression qui se réduit à $\tan\lambda = \frac{1}{\tan(\lambda \pm \epsilon)}$, d'où l'on tire $\tan\lambda.\tan(\lambda \pm \epsilon) = 1$. On voit donc que les deux angles λ & $\lambda \pm \epsilon$, joints ensemble, doivent former 90° **, c'est-à-dire que $\lambda + \lambda \pm \epsilon = 90°$; ce qui donne $\lambda = 45° \mp \frac{1}{2}\epsilon$: c'est l'expression de l'angle que doit former le Gouvernail avec la quille, pour qu'il fasse le plus grand effet possible. Ainsi, la dérive étant de 10°, l'angle formé sous le vent doit être de 40°, & celui du vent de 50°.

(294.) Si l'on substitue la valeur de l'angle λ dans la valeur trouvée ci-dessus de la force du Gouvernail, la plus grande force avec laquelle le Gouvernail fera tourner le Vaisseau sera = ... $\frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin(45° \pm \frac{1}{2}\epsilon)\cos(45° \mp \frac{1}{2}\epsilon)$; mais comme $\sin(45° \pm \frac{1}{2}\epsilon) = \cos(45° \mp \frac{1}{2}\epsilon)$, cette plus grande force se réduit à $\frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin(45° \pm \frac{1}{2}\epsilon)^2$ ***.

---

rection du mouvement. Donc, conformément à la *Note* de l'*Art.* 290. Le nouveau $\sin\theta$ sera $= \sin(\lambda \pm \epsilon)\sin\epsilon$. Substituant cette valeur, ainsi que celle de $\sin x = \sin\lambda.\sin\epsilon$, & celle de $\sin\epsilon$, qui est toujours la même, on aura, pour la force dans le sens de la quille, lorsqu'il y a de la dérive, la quantité $\frac{mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin(\lambda \pm \epsilon).\sin\lambda}{15\sqrt{a^2 + h^2\sin\lambda^2}}$, ou, en négligeant l'effet de la quête, $\frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin(\lambda \pm \epsilon)\sin\lambda$. Lorsque $\sin\lambda = 0$ cette force s'évanouit, parce que d'ailleurs le Gouvernail n'est point choqué en vertu du mouvement direct, il ne l'est qu'en vertu du mouvement latéral, mais comme ce choc se fait perpendiculairement, il n'en peut résulter d'action parallélement à la quille. Cette force, dans le sens de la quille, peut être plus grande que la force perpendiculaire, selon la valeur de l'angle λ du Gouvernail; mais comme elle agit à l'extrémité d'un levier très-court, attendu le peu de largeur du Gouvernail, & qu'on ne lui fait pas former des angles fort ouverts, son moment pour faire tourner le Navire ne peut être que très-petit.

* Il est inutile, je pense, d'avertir qu'on suppose ici la dérive constante.

** Car $\tan\lambda : 1 :: 1 : \cot\lambda$, & $\tan\lambda : 1 :: 1 : \tan(\lambda \pm \epsilon)$; donc $\tan(\lambda \pm \epsilon) = \cot\lambda$, &c. &c.

*** Si on veut avoir l'angle λ qui peut produire la plus grande force dans le sens de la quille, on le trouvera en égalant à zéro la différencielle de $\sin(\lambda \pm \epsilon)\sin\lambda$; ce qui donnera $\cos\lambda.\sin(\lambda \pm \epsilon) + \cos(\lambda \pm \epsilon)\sin\lambda = 0$. Divisant par $\cos\lambda.\cos(\lambda \pm \epsilon)$, on aura $\frac{\sin(\lambda \pm \epsilon)}{\cos(\lambda \pm \epsilon)} + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = 0$, ou $\tan(\lambda \pm \epsilon) + \tan\lambda = 0$; équation qui ne peut avoir lieu que lorsque $\lambda \pm \epsilon$ est le supplément de λ; car alors les tangentes de ces arcs sont égales, & l'une d'elles est négative. Donc $\lambda \pm \epsilon + \lambda = 180°$; ou $\lambda = 90° \mp \frac{1}{2}\epsilon$. Substituant cette valeur dans l'expression de la force dans le sens de la quille, la plus grande force sera $= \frac{1}{15} mua^{\frac{1}{2}}(4A^2 + ga)\sin(90 \pm \frac{1}{2}\epsilon)^2$: d'où l'on voit que soit que le gouvernail soit tourné pour faire arriver, soit qu'il soit tourné pour

(295.) On doit conclure de là, que la force que peut faire le Gouvernail du côté sous le vent, est toujours plus grande que celle qu'il peut faire du côté du vent, c'est-à-dire que sa force pour faire arriver le Vaisseau est toujours plus grande que sa force pour le faire venir au vent. C'est un fait que les Timoniers connoissent parfaitement, & qu'ils observent tous les jours, sur-tout lorsque le vent est fraix.

(296.) Malgré tous les avantages qu'on pourroit obtenir en disposant le Gouvernail conformément aux principes qu'on vient d'exposer; dans la disposition actuelle des Vaisseaux, le Gouvernail peut à peine former un angle de 35° avec la quille. La barre est, comme on le sçait, une piece de bois horisontale, fixée solidement dans la tête du Gouvernail; & dont on se sert, comme d'un *levier*, pour le faire tourner, & en faciliter la manœuvre. Or cette barre est

---

faire venir au vent, la plus grande force dans le sens de la quille sera toujours la même. Car $\sin(90° + \frac{1}{2}\eta) = \sin(90° - \frac{1}{2}\iota)$.

On voit que les valeurs des angles λ qui donnent les plus grandes forces perpendiculaires & paralleles à la quille, ne sont pas les mêmes, & qu'elles se contrarient beaucoup. Car l'angle qui donne la plus grande force dans le sens de la quille, est à peu près celui qui donne la plus petite force penpendiculaire. L'Auteur ne s'est occupé que de cette derniere; & s'il avoit cherché la valeur de l'angle λ qui doit produire le plus grand effet, en ayant égard à ces deux forces à la fois, il eût encore à peu près trouvé le même angle. Nous supprimons ce calcul d'autant plus volontiers, qu'il n'a d'autre difficulté que sa longueur; & que, comme le dit l'Auteur, les angles qu'on peut former dans la pratique suffisent pour produire tout l'effet nécessaire; & cet effet n'est pas fort éloigné du plus grand.

On a supposé dans cette théorie que dans le cas où il n'y a point de dérive, l'impulsion du Gouvernail sur le fluide se fait parallélement à la quille. Cette supposition n'est pas rigoureusement exacte sans doute, mais elle ne nous paroît pas si éloignée de la vérité que l'ont cru tous les Auteurs qui ont traité ce sujet. Ils ont toujours supposé que c'étoit la même chose que le Gouvernail fût fixe, & que l'eau vînt frapper le Gouvernail avec la vîtesse *u* du Vaisseau. Dans cette hypothese, il est bien évident que quoique la quille du Vaisseau fût dirigée suivant le courant, l'eau ne viendroit pas frapper le Gouvernail dans la direction de la quille; il n'y auroit, tout au plus, que les parties les plus voisines de la quille qui seroient dans ce cas; car on sent que les filets d'eau suivroient le contour de la carene, & frapperoient le Gouvernail sous différentes *obliquités*, dans les différentes couches horisontales. Mais le cas n'est pas absolument le même lorsque c'est le Vaisseau qui est en mouvement, & que l'eau est tranquille; c'est alors le Gouvernail qui chasse le fluide devant lui, & il le choque dans la direction de son mouvement qui est parallele à la quille.

Au reste, il y a sans doute quelques modifications à apporter à cette théorie; mais nous pensons qu'elles doivent principalement regarder la vîtesse avec laquelle le fluide est choqué. Car l'eau, en vertu de sa gravité, a toujours un mouvement pour remplir le creux que le Vaisseau tend sans cesse à produire dans sa marche; ainsi, à ne considérer que le mouvement direct des particules de l'eau, il est clair que le Gouvernail ne frappe le fluide qu'avec l'excès de sa vîtesse sur celle des particules, pour remplir le creux que le Vaisseau tend à produire derriere lui. En outre, les particules du fluide ont aussi un mouvement latéral qui ne laisse pas encore d'avoir quelque influence: toutes ces circonstances doivent nécessairement affecter beaucoup la vîtesse suivant laquelle les particules sont choquées par le Gouvernail. Il est impossible de traiter ce probléme en rigueur, mais nous pensons que la solution donnée par l'Auteur est suffisante, pour calculer les effets du Gouvernail, d'autant mieux qu'on n'emploie jamais, & qu'on auroit tort de chercher à employer, les angles du plus grand effet.

tellement

tellement longue, qu'elle touche presque le côté du Vaisseau lorsqu'elle fait un angle de 35° avec la quille. Pour qu'elle pût former un plus grand angle, il faudroit la raccourcir; mais cela auroit l'inconvénient de rendre la manœuvre du Gouvernail plus dure & plus difficile, tandis que, dans l'état actuel des choses, cette manœuvre est même très-pénible dans certain temps. Cet inconvénient est très-considérable, & doit, selon moi, faire renoncer à l'augmentation de l'angle, comme nous l'indique le calcul : mais, au reste, cette perte n'est pas aussi grande qu'on pourroit l'imaginer; c'est ce dont on se convaincra en examinant la matiere avec soin. Un exemple suffira pour nous tirer de ce doute.

Supposons, pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire, que la dérive soit nulle; & nous aurons, dans ce cas, la plus grande force, telle que la théorie nous la donne, est à celle qui a effectivement lieu dans la pratique des Marins, comme $(\sin 45^\circ)^2$ est à $\sin 35^\circ . \cos 35^\circ$ (291 & 293.), ou, à fort peu près, comme 10 est à 9; de sorte que toute la perte de force qu'on fait dans la pratique se réduit à la dixieme partie. Le résultat est à peu près le même, quels que soient les autres angles, à l'exception de ceux qu'on forme pour venir au vent, lorsqu'il y a de la dérive. En effet, supposons, comme ci-dessus, la dérive de 10°, la plus grande force fournie par la théorie, sera à celle qui a lieu suivant la pratique des Marins, comme $\sin (40^\circ)^2$ est à $\sin 25^\circ . \cos 35^\circ$, ou, à fort peu près, comme 25 est à 21. La différence, comme on le voit, est un peu plus grande : mais heureusement la nécessité de venir au vent n'est pas aussi pressante que celle d'arriver. Les Vaisseaux, pour l'ordinaire, tendent toujours à venir au vent, pour les raisons qu'on exposera par la suite, sur-tout lorsque le vent est fort, ou, comme disent les Marins, lorsqu'il vente bon *fraix*; ou, ce qui revient au même, dans le cas où il y a nécessairement beaucoup de dérive; de sorte que, par cette circonstance, la difficulté que peuvent présenter ces cas particuliers, se trouve à peu près sans force.

(297.) Mais, pour le manege du Vaisseau, & pour connoître l'effet du Gouvernail sur lui, il ne suffit pas d'avoir égard à la force qu'il est en état de produire, il est nécessaire de considérer le moment de cette force, c'est-à-dire, son produit par la distance horisontale de son centre à l'axe vertical qui passe par le centre de gravité du Vaisseau; car c'est sur cet axe que se fait la rotation produite par le Gouvernail. Supposons que D soit la distance de cet axe à l'étambot, & z celle de l'étambot au centre des forces du Gouvernail, & le moment que nous cherchons sera = ...

PLANC. VIII. FIG. 40. $(D+\zeta)\frac{1}{15}mua^{\frac{3}{2}}(4A^2+ga)\,\text{fin}\,(\lambda\pm\epsilon)\,\text{cof}\,\lambda$. Pour trouver la valeur de ζ, on remarquera que le centre des forces du rectangle *BDHC* eſt éloigné de l'étambot de $\frac{1}{2}b$, & que le centre des forces du triangle *DEH* eſt éloigné dudit étambot de $b+\frac{5}{14}e$: par conſéquent, la diſtance horiſontale d'un centre à l'autre ſera $=\frac{1}{2}b+\frac{5}{14}e$. Les forces du triangle ſont à celles du rectangle, comme $\frac{1}{5}e$ eſt à $\frac{1}{3}b$: donc nous aurons $\frac{1}{5}e+\frac{1}{3}b:\frac{1}{5}e::\frac{1}{2}b+\frac{5}{14}e:\frac{\frac{1}{10}be+\frac{1}{14}e^2}{\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}e}$; diſtance horiſontale du centre des forces du rectangle au centre des forces du Gouvernail entier*; par conſéquent la diſtance de ce centre à l'étambot $=\zeta=\frac{1}{2}b+\frac{\frac{1}{10}be+\frac{1}{14}e^2}{\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}e}=\frac{42be+35b^2+15e^2}{14(3e+5b)}$; ou, en ſubſtituant les valeurs de e & de b, $\zeta=\frac{2(A^4+5A^2ga+g^2a^2)}{7a(4A^2+ga)}$; ce qui donne, pour l'expreſſion du moment du Gouvernail, $\left(D+\frac{2(A^4+5A^2ga+g^2a^2)}{7a(4A^2+ga)}\right)\frac{1}{15}mua^{\frac{3}{2}}(4A^2+ga)\,\text{fin}(\lambda\pm\epsilon)\,\text{cof}\,\lambda$ $=\left(D+\frac{2(A^2+ga)}{7a}-\frac{6A^4}{7a(4A^2+ga)}\right)(4A^2+ga)\frac{1}{15}mua^{\frac{3}{2}}\,\text{fin}\,(\lambda\pm\epsilon)\,\text{cof}\,\lambda$.

(298.) On voit, par ces formules, la vérité de ce que nous avons avancé; c'eſt-à-dire qu'il importe beaucoup d'augmenter g, & de

---

* Quoique les Lecteurs qui ſeront parvenus à entendre parfaitement toute la théorie précédente, ne puiſſent gueres être arrêtés par les calculs que préſente cet article ; cependant, pour continuer notre plan, qui eſt d'éclaircir tous les endroits qui nous paroiſſent en avoir beſoin, nous allons encore développer ceux-ci avec quelque détail.

FIG. 40.* Il eſt d'abord évident que le centre des forces, ou réſiſtances, qu'éprouve le rectangle *BDHC* eſt ſitué ſur la ligne *gm* qui le diviſe en deux parties égales; car on peut concevoir la ſurface du rectangle comme compoſée d'une infinité d'éléments paralleles à *HC* : or, le centre de chacun étant à ſon milieu, celui de leur ſyſtême ſera néceſſairement ſur la ligne qui joint leur centre, c'eſt-à-dire, ſur *gm*. Ainſi, le centre des réſiſtances du rectangle *BDHC* eſt éloigné de *BC*, ou de l'étambot, de la quantité $gB=\frac{1}{2}b$.

Il n'eſt pas moins évident, d'après l'*Art.* 850, *Tome I*, ou plus directement encore d'après la *Note* de l'*Art* 197 de ce Volume, *page* 129, que ce centre eſt éloigné de la ſuperficie du fluide des $\frac{3}{5}$ de la hauteur *gm*, ou de $\frac{3}{5}a$: car on trouvera que la ſomme des réſiſtances du rectangle $=\frac{mub\,\text{fin}\,x.\,\text{fin}\,\theta}{3\,\text{fin}\,\omega}.x^{\frac{3}{2}}$, & celle des moments de ces réſiſtances $=\frac{mub\,\text{fin}\,x.\,\text{fin}\,\theta}{5\,\text{fin}\,\omega}.x^{\frac{5}{2}}$, ou, en faiſant $x=a$, afin d'avoir ces quantités pour le rectangle entier, & ſuppoſant, pour ſimplifier, $\text{fin}\,x=\text{fin}\,\theta=\text{fin}\,\omega=1$, la ſomme des réſiſtances ſera $=\frac{2}{3}muba^{\frac{3}{2}}$, & celle des moments $=\frac{2}{5}muba^{\frac{5}{2}}$. Diviſant donc la ſomme des moments par celle des réſiſtances, le quotient $\frac{3}{5}a$ ſera la diſtance du centre des réſiſtances du rectangle à la ſuperficie du fluide, (*Tome I*, 120 & 850.).

On voit pareillement qu'en diviſant *EH* en deux parties égales en *f*, & tirant la ligne *Df*, le centre des forces du triangle ſera ſur cette ligne; ainſi il ne s'agit plus que de ſçavoir en quel point. Pour cela, on procédera, comme on l'a fait à l'*Article* cité ; mais comme la dimenſion horiſontale de la ſurface n'eſt pas conſtante, comme on l'a ſuppoſé alors, attendu que la ſurface dont il s'agiſſoit étoit un rectangle, on mettra y à la place de b, ou, ce qui eſt la même choſe, on prendra la formule dont on a déjà fait uſage

diminuer b *; c'est-à-dire, de faire ensorte que la figure du Gouvernail approche le plus qu'il est possible de celle d'un triangle; c'est aussi ce que les Marins pratiquent ordinairement.

(299.) La distance $D + z$ varie à mesure que l'angle λ devient plus grand; mais cette différence est négligeable, à cause de la grande longueur de D à l'égard de z.

(300.) Enfin, il est nécessaire de faire observer que l'angle λ que la théorie donne comme le plus avantageux, ou qui produit la plus grande force, qui est $= 45^\circ \pm \epsilon$, n'est nullement celui qui convient le mieux pour faire virer le Navire vent devant; car le Gouvernail retarde la marche du Vaisseau, ou diminue la vîtesse u, & sous cet angle il la diminue davantage qu'il ne le feroit sous un autre angle plus petit. Mais,

---

à l'*Art.* 288: ainsi, la formule $\frac{muy \sin x . \sin \theta}{2 \sin \kappa}(x^{\frac{3}{2}} dx)$, ou simplement $\frac{1}{2} muy x^{\frac{3}{2}} dx$ (en faisant, dans les mêmes vues que ci-dessus, $\sin x = \sin \theta = \sin \kappa = 1$), sera l'expression de la résistance qu'éprouve une différencielle horisontale d'une surface plane, & son moment sera $= \frac{1}{2} muy x^{\frac{3}{2}} dx$. Mettant pour y sa valeur $\frac{ex}{a}$, afin que ces expressions deviennent relatives au triangle DHE, on aura $\frac{muex^{\frac{3}{2}} dx}{2a}$ pour la résistance d'une différencielle horisontale du triangle, & $\frac{muex^{\frac{5}{2}} dx}{2a}$, pour celle de son moment. Intégrant ces expressions & faisant $x = a$; la somme des résistances, ou la résistance totale qu'éprouve le triangle, sera $= \frac{1}{5} muea^{\frac{3}{2}}$, & la somme des moments de ces résistances $= \frac{1}{7} muea^{\frac{5}{2}}$. Divisant donc la somme des moments par celle des résistances, le quotient $\frac{5}{7} a$ sera (*Tome I*, 120 & 726.) la distance du centre des résistances du triangle à la superficie du fluide. Prenant donc $dp = \frac{5}{7} a$, & menant pq parallele à EC, le point q sera le centre des résistances du triangle; & comme $DH : Dp :: fH : qp$, ou $7 : 5 :: \frac{1}{2} e : qp = \frac{5}{14} e$; il s'ensuit que ce centre est éloigné de BC, ou de l'étambot, de $b + \frac{5}{14} e$; & la distance horisontale qr du centre des résistances du triangle, à celui des résistances du rectangle, est $= \frac{1}{2} b + \frac{5}{14} e$.

Maintenant, pour avoir la distance horisontale du centre du Gouvernail à l'étambot, on remarquera que la force, ou résistance du triangle, étant $= \frac{1}{5} muea^{\frac{3}{2}}$, & celle du rectangle $= \frac{1}{3} muba^{\frac{3}{2}}$, ces deux forces seront l'une à l'autre comme ces deux quantités, ou, en divisant par $mua^{\frac{3}{2}}$, comme $\frac{1}{5} e$ est à $\frac{1}{3} b$. Donc en regardant le Gouvernail comme le systême du rectangle & du triangle, & divisant la distance horisontale qr en raison inverse des forces qui s'exercent en n & en q, conformément à ce qui a été démontré, *Tome I*, *Art.* 81 *jusqu'a* 94, on aura la distance horisontale du centre des forces du rectangle à celui des forces du Gouvernail; ainsi, l'on aura $\frac{1}{5} e : \frac{1}{3} b :: rx : xq$; d'où l'on tire $\frac{1}{5} e + \frac{1}{3} b : \frac{1}{5} e :: rx + xq = qr = \frac{1}{2} b + \frac{5}{14} e : rx = \frac{\frac{1}{10} be + \frac{1}{14} e^2}{\frac{1}{5} e + \frac{1}{3} b}$; c'est la distance horisontale du centre des forces du rectangle à celui des forces du Gouvernail. Le reste du calcul de cet *Article* est trop simple pour que nous nous y arrêtions davantage.

* Car on voit, par la formule, que le moment qu'elle exprime croît à proportion que $g = CE = b + e$ augmente. Mais $b = \frac{2A^2}{a} - g$ (288.), & la surface A^2 du Gouvernail restant constante, ainsi que sa hauteur a, il est évident que g ne peut pas augmenter, sans que b diminue.

comme, pour les raisons que nous avons données ci-dessus, il convient de s'en tenir à la pratique actuelle des Marins ; nous nous dispenserons d'entrer dans une plus longue discussion à ce sujet.

CHAPITRE III.

De la Rame. *

(301.) LA Rame paroit, au premier coup d'œil, une machine fort simple ; mais lorsqu'on en veut développer la théorie, il semble qu'elle en devient d'autant plus sublime, ou qu'elle exige des discussions d'un ordre d'autant plus élevé qu'elle a paru d'abord plus simple. Nous ne nous arrêterons pas à exposer les erreurs nombreuses dans lesquelles sont tombés à cet égard, non-seulement les anciens Géometres, mais encore les Géometres modernes de la plus grande célébrité, qui ont écrit sur ce sujet, d'après ce que leur avoient laissé leurs prédécesseurs (*a*) (*b*). Nous ne nous arrêterons pas non

* Ce mot n'est pas autant en usage parmi les Marins, que celui *Aviron*, qui signifie la même chose ; ainsi nous nous servirons de l'un ou de l'autre, suivant que nous jugerons convenable aux circonstances.

(*a*) M. *Bouguer* prétend, dans son *Traité du Navire*, *Liv. I*, *Sect. II*, *Chap. IV*, *pag.* 110, que plus la partie extérieure de la Rame sera courte, la pale étant augmentée à proportion, afin que son moment soit toujours le même, plus la vitesse de l'Embarcation doit être grande. C'est d'après ce principe qu'il fonde tout son calcul, qui, par conséquent, doit par-tout se ressentir du vice du principe. Le motif qui a déterminé cet Auteur à augmenter la pale, est, qu'il a imaginé qu'en diminuant la partie extérieure de la Rame, le Rameur ne pourroit pas contre-balancer le moment de la pale, attendu que le moment qu'il emploie est toujours constant, & doit être égal à celui de la pale. Cette erreur vient de ce qu'il n'a considéré ces moments que comme simples, & non comme des moments d'inertie, tels qu'ils le sont effectivement. Que la pale soit grande ou petite, le Rameur par son effort fait toujours équilibre à son moment, parce que ce moment est le produit de la résistance que la pale éprouve dans l'eau, par sa distance au centre de rotation de la Rame ; & la résistance est comme la vitesse de la pale. Si cette vitesse est petite, en mouvant la pale avec plus de vitesse, on augmentera son moment, sans qu'il soit nécessaire d'altérer sa distance au *tolet*, qui est le point d'appui de la Rame ; & au contraire, si l'on diminue la distance au tolet, on augmentera le moment sans altérer la pale, en la mouvant seulement avec plus de vitesse. Les Marins connoissent parfaitement tout cela, & les Géométres qui examineront ce sujet avec la plus légere attention, trouveront ce que nous avançons ici de la plus grande évidence. On observera encore qu'avec la même Rame on ne fait pas toujours usage de la même pale ; quand le Rameur enfonce dans l'eau une moindre portion de la Rame, il la tire avec plus de vitesse, & réciproquement ; l'une & l'autre maniere de ramer est bonne, suivant les circonstances, la premiere quand la mer est calme, & qu'il ne fait point de vent ; & l'autre dans le cas contraire. C'est ordinairement le défaut d'expérience qui fait tomber les Géométres dans de pareilles erreurs : nous verrons bientôt qu'en supposant la pale infinie, cas dans lequel M. *Bouguer* prétend que la vitesse de l'Embarcation seroit aussi infinie, nous verrons, dis-je, que cet Auteur est si éloigné de la vérité, que même cette vitesse seroit nulle. Outre ces défauts & l'omission de beaucoup d'autres attentions absolument nécessaires, le calcul de M. *Bouguer*

plus à examiner si l'on doit considérer la Rame comme un levier d'un des trois genres énoncés dans le *Tome I*, *Art.* 197, parce que cette discussion ne nous fourniroit rien pour notre objet, qui se réduit à considérer la force & les effets de cette machine, sans nous écarter jamais des loix les plus rigoureuses de la Méchanique, afin d'éviter de tomber dans l'erreur, & de parvenir à connoître parfaitement les avantages qu'on peut en tirer. PLANC. VIII.

(302.) La Rame, comme nous l'avons dit (1.), n'est autre chose qu'une piece de bois *AB*, qui, étant appuyée, ou rendue solide sur le plat-bord de l'Embarcation en *C*, se tire par l'extrêmité *A* dans la direction *AE*, tandis que l'autre extrêmité *B* est plongée dans l'eau, & se meut en sens contraire. La réaction que la résistance de l'eau communique à l'Embarcation, la pousse, & la met en mouvement. FIG. 43 & 44.

(303.) Les parties que nous avons à considérer dans la Rame, sont la partie intérieure *AC*, ou la partie qui est en dedans de l'Embarcation, que les Marins appellent le *manche de la Rame* *. La partie extérieure *CB*, qu'on rend légere de bois le plus qu'il est possible dans toute sa portion *CD*. La pale *BD*, qui est large & mince, afin qu'en même temps elle soit plus légere, & qu'en raison de sa plus grande largeur, ou de sa plus grande surface, elle trouve une plus grande résistance dans l'eau : & enfin, le point *F*,

---

dépend encore du principe que les résistances qu'éprouve l'Embarcation sont comme les quarrés des vitesses ; & par conséquent il est parvenu à de nouveaux résultats non moins éloignés de la vérité qui doit faire l'objet de nos recherches.

(*b*) *Léonard Euler*, dans les *Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, Tome III*, année 1747, traite de la théorie de la Rame avec grande attention. Il fait remarquer l'erreur de M. *Bouguer*, & fait entrer dans son calcul beaucoup de considérations nécessaires ; mais il fonde toutes ses recherches sur le même principe, que les résistances des fluides sont comme les quarrés des vitesses. En outre, quoiqu'il ait égard au poids de la Rame, qui est une considération nécessaire, ce n'est pas pour le retrancher de la force qu'emploie le Rameur, comme cela devroit être, puisque ce poids est pour lui la cause d'une fatigue continuelle ; il fait seulement usage de cet élément pour faire remarquer que dans l'action de Ramer il produit une quantité de moments : mais nous verrons bientôt que cette quantité est négligeable. Sa détermination de la longueur que doivent avoir les parties intérieure & extérieure de la Rame, sans en exclure la grandeur de la pale, lui est fournie par la substitution de sa vraie valeur, en quantités qui renferment la même partie extérieure. En effet, on verra, par la suite, qu'étant donné la force qu'emploie le Rameur, ainsi que la vitesse avec laquelle il meut ses bras, & les longueurs des parties intérieure & extérieure de la Rame ; la grandeur de la pale ne peut demeurer arbitraire ; & si l'on vouloit qu'elle le fût, aucune des autres quantités ne pourroit l'être : parce qu'entre toutes ces quantités il se forme une équation qui donne la relation qu'elles ont entre elles. On trouve les mêmes considérations dans un autre Ouvrage du même Auteur, intitulé, *Scientia Navalis*, *Tom. II*, *Cap. VII.*

* Les Espagnols appellent cette partie le *Guion* ; dans quelques ports français on l'appelle le *Giron* ; mais cette expression a vieilli.

qui demeure sans mouvement, ou fixe, pendant l'action de la Rame; car il est clair que le manche se mouvant vers l'avant, & la pale vers l'arriere, il doit y avoir, dans la longueur de la Rame, un point qui soit fixe, & sur lequel se fait le mouvement de rotation, encore que ce ne soit que pour cette palade seule, ou pour un seul coup de Rame.

(304) Les moments qui agissent, & qu'il faut considérer dans l'action de la Rame, sont, 1°. le moment que produit l'effort du Rameur à l'extrêmité *A* du manche où il applique ses forces. 2°. Celui qu'il fait avec ses pieds, ou son corps, dans la direction contraire, sur le fond, ou sur les bancs de l'Embarcation; car il n'y a pas d'action sans une réaction égale & contraire (*Tome I*, 22.) : l'effet de ce moment est le même que s'il agissoit sur le bord même de la Barque. 3°. La résistance de l'eau contre toute la carene de l'Embarcation, laquelle peut de même être considérée comme une force agissante sur le bord même. 4°. La résistance, ou la force qu'exerce la pale dans l'eau. 5°. Le poids de la Rame qui doit être soutenu par le Rameur; car si le centre de gravité de la Rame se trouve hors du bord de l'Embarcation, ce poids agit avec un moment que le Rameur doit alors balancer. 6°. La force avec laquelle l'eau soutient la pale aussi-tôt qu'elle se submerge, ce qui produit un moment favorable au Rameur. 7°. Le moment d'inertie de la Rame, lequel doit aussi être vaincu par le Rameur. Nous négligerons de considérer l'effet de ce moment, parce que nous ferons voir, à la fin, combien l'action qu'il peut produire est petite. 8°. Enfin, le moment d'inertie du corps du Rameur, ou des Rameurs. *Léonard Euler* a fait entrer ce moment dans son calcul; mais nous négligerons également de le considérer, parce que le moment qui résulte du mouvement du corps du Rameur vers l'avant, est égal à celui qui résulte de son mouvement contraire, ou vers l'arriere, & que ces deux moments se compensent mutuellement.

(305.) Soit donc a la longueur du manche, ou la distance du plat bord, ou de *l'apostis*, au point où sont appliquées les forces du Rameur, ou des Rameurs.

V la vîtesse avec laquelle les Rameurs meuvent leurs bras.

K le poids que devroit enlever le Rameur avec la vîtesse V, pour faire un effort équivalent à celui qu'il exerce à l'extrêmité du manche.

m la densité du fluide.

u la vîtesse de l'embarcation.

mRu la résistance à la proue, ou la résistance totale.

x la distance de l'*apostis* au point immobile de la Rame.

b la distance du même apostis au point où se réunissent les forces, ou résistances, de la pale.

V' la vîtesse de ce même point.

$mrV'^{\prime}$ la résistance de chacune des pales.

n le nombre des Rameurs.

T le temps qui s'écoule entre deux palades consécutives, ou entre un coup de Rame & l'autre.

t celui qu'emploient les Rameurs à donner chaque palade.

G la distance de l'apostis au centre de gravité de la Rame.

P le poids de la Rame.

e l'espace, ou le volume qu'occupe la pale dans l'eau.

Cela posé, $\frac{GP}{a}$ sera l'expression du poids que doit soutenir le Rameur, à cause du poids P de la Rame; & $\frac{meb}{a}$ sera celui qui est destiné à lui faire équilibre, ou qui agit en sens contraire, parce que le volume d'eau déplacé par la pale, la soutient dans l'action de Ramer avec une force exprimée par le poids me de ce volume (*Tome I*, 561.); de sorte que le poids total que doit vaincre le Rameur par son effort, sera $= K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}$; nous exprimerons ce poids par k*.

(306.) Quoique la force avec laquelle le Rameur, ou les Rameurs agissent, ne soit que kV; cependant, comme, lorsque l'Embarcation est en mouvement, la vîtesse des bras du Rameur est $V+u$, la force appliquée à l'extrêmité du manche sera $= k(V+u)$, & son moment $= k(a+x)(V+u)$; produit de $k(V+u)$, par la distance $a+x$ de l'extrêmité du manche au point immobile de la Rame.

(307.) Le moment que le Rameur, ou les Rameurs produisent avec leurs pieds, ou leur corps, dans une direction opposée à celle de l'Embarcation, sera $= kux$ **. La résistance de la proue de l'Em-

* Car si la Rame étoit sans pesanteur, & si le fluide n'agissoit pas de bas en haut sur la pale, le Rameur auroit constamment à mouvoir le poids K avec la vîtesse V; mais lorsque la Rame est plongée dans l'eau, & que le Rameur est prêt à produire son action, il a déjà à soutenir le poids $\frac{GP}{a} - \frac{meb}{a}$, en vertu de l'excès de la portion du poids de la Rame, qu'il doit supporter, sur la poussée verticale de l'eau contre la pale: ainsi, le Rameur est dans le même cas que si ses mains étoient constamment chargées du poids $\frac{GP}{a} - \frac{meb}{a}$, lorsqu'il produit chaque palade. Donc il ne doit vaincre, dans cette action, que le poids $K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a} = k$.

** Car l'action du Rameur se transmet à l'embarcation, par la pression de la Rame contre le tolet. Or, il est évident que la vîtesse de ce point est $= u$; ainsi la quantité d'action produite sur lui en vertu du poids k que le Rameur peut vaincre dans la pa-

barcation étant $=mRu$, la portion de cette résistance que doit vaincre chaque Rameur, sera $=\frac{mRu}{n}$; mais le temps pendant lequel la Rame agit, étant seulement $=t$, il est nécessaire, pour vaincre la résistance qui agit pendant tout le temps T qui s'écoule entre une palade & celle qui la suit, il est nécessaire, dis-je, que chaque Rame surmonte une résistance $=\frac{TmRu}{tn}$; & le moment de cette résistance est $=\frac{TmRxu}{tn}$.

---

lade est $=ku$, & son moment par rapport au point sur lequel se fait la rotation de la Rame, sera $=kux$. On peut d'ailleurs s'en convaincre de cette autre maniere ; nous venons de voir que $k(a+x)(V+u)$ est l'expression du moment de la force appliquée à l'extrêmité du manche, parce que cette extrêmité se meut avec la vîtesse $V+u$, & qu'elle est à la distance a du tolet. Or, la vîtesse u étant constante, la vîtesse V varie dans les différents points de la Rame, suivant leurs distances au point d'appui : ainsi, on aura le moment de la partie de l'action qui s'exerce à tout autre point de la Rame, en substituant, dans l'expression du moment, la distance de ce point au tolet, avec la vîtesse qui lui correspond ; mais au tolet $a=0$, & $V=0$: donc le moment de l'action qui s'exerce contre le tolet, est $=k(0+x)(0+u)=kux$.

Ceci posé, comme il n'y a point d'action sans une réaction égale & contraire (Tome I, 22.), il s'ensuit que la réaction s'exerce contre l'agent qui produit l'action : or l'agent est ici le Rameur qui s'appuie contre l'embarcation, soit en pressant ses pieds contre le fond, soit en s'appuyant fortement contre le banc sur lequel il est assis ; donc il transmet cette réaction à l'Embarcation, donc elle est $=kux$, qui est l'expression de l'action contre le tolet. Si l'agent ne tenoit point à l'Embarcation, il est clair qu'il éprouveroit, lui seul, toute la réaction, sans qu'elle en éprouvât rien.

On peut rendre ceci encore plus sensible, par une expérience fort simple. Supposons deux Embarcations en couple l'une de l'autre, mais absolument isolées. Supposons en même temps qu'on garnisse des Avirons sur le bord d'une des deux, mais dont les manches soient assez longs pour atteindre dans l'autre, & que les Rameurs se mettent dans celle-ci. Si l'on fait donner un seul coup d'Aviron, on verra aussi-tôt les deux Embarcations se séparer & marcher en sens contraire ; celle sur laquelle les Avirons sont garnis, ira de l'avant, & celle dans laquelle sont les Rameurs, culera. Si l'on faisoit cette expérience, avec quelque précision, on verroit que, toutes choses d'ailleurs égales, l'Embarcation sur laquelle sont garnis les Avirons, prend plus de vîtesse que si les Rameurs avoient été dedans lorsqu'ils ont donné cette palade. Or, on ne peut douter que c'est la réaction du moment de force transmis à la premiere Embarcation, qui fait culer la deuxieme : car si la palade avoit été donnée par des Rameurs suspendus en l'air, il est clair qu'elle n'auroit pas changé de place. Si on garnissoit pareil nombre d'Avirons sur la deuxieme Embarcation, que nous supposons égale & semblable à la premiere, en mettant aussi des Rameurs dans la premiere ; alors si les deux chiourmes emploient la même force, & que toutes choses soient d'ailleurs égales, les deux Embarcations prendront la même vîtesse qu'en suivant la méthode ordinaire : ainsi il nous paroît démontré, pour les esprits les plus ordinaires, que la réaction est une force qui s'oppose au mouvement de l'Embarcation, & que s'il étoit possible d'isoler le Rameur, il y auroit sans doute beaucoup à gagner pour la vîtesse ; mais cela est absolument impossible

Nous avons insisté beaucoup sur ce point, parce que nous avons vu des personnes, d'ailleurs assez instruites, regarder cette réaction comme chimérique, & comme ne devant point entrer dans le calcul des moments qui influent sur le mouvement progressif de l'Embarcation. Par une méprise singuliere, ils confondoient cette action des pieds des Rameurs contre le fond de l'Embarcation, avec celle que produiroit un homme en appuyant fortement contre le fond, en sens contraire à son mouvement progressif, en se servant d'un bâton, ou autre chose équivalente, action qui ne peut évidemment point influer sur la vîtesse de l'Embarcation.

(308.)

(308.) La résistance de la pale est $= mrV'$, & son moment est $= mrV'(b - x)$. Nous supposerons, dans cette théorie, que les arcs décrits par les mains des Rameurs, & par les centres des pales, soient petits; & par conséquent, que ces points se meuvent à très-peu près parallélement à la route de l'Embarcation, afin d'éviter de faire entrer dans le calcul l'obliquité avec laquelle il seroit nécessaire de considérer leur action; cette supposition est d'ailleurs conforme à la pratique journaliere. Supposant donc tous ces moments en équilibre, nous aurons $k(a+x)(V+u) = kux + \frac{TmRxu}{tn} + mrV'(b-x)$. PLANC. VIII.

(309.) Pour dégager les inconnues que renferme cette équation, nous supposerons que la Rame AB passe dans la situation ab, en tournant sur le point fixe F; de sorte que le point, ou l'appostis C, parvienne en c; nous aurons les triangles semblables, AFa, CFc, & BFb, lesquels donneront ces analogies CF (ou, x) : AF (ou, $a+x$) :: Cc (ou, u) : Aa (ou, $V+u$); d'où l'on tire $x = \frac{au}{V}$: & CF(ou, x):FB(ou, $b-x$) :: Cc(ou, u):Bb(ou, V'), ce qui donne $V' = \frac{(b-x)u}{x}$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation, elle deviendra $ak(V+u)^2 = kau^2 + \frac{TmRau^2}{tn} + \frac{mr(bV-au)^2}{a}$. FIG. 47.

(310.) Cette formule sert pour tous les cas, c'est-à-dire, qu'elle convient tant pour ceux où l'Embarcation est en mouvement, que pour celui où elle est en repos, ou, ce qui revient au même, pour le premier instant où l'on veut commencer à lui faire prendre du mouvement. Dans ce cas, on a $u = 0$; & la formule devient $a^2kV^2 = mrb^2V^2$, ou bien $a^2k = mrb^2$; & comme on doit supposer que les Rameurs emploient toujours une même action, ou que leur force est toujours la même, il s'ensuit qu'on aura, dans tous les cas, $a^2k = mrb^2$, ou $mr = \frac{a^2k}{b^2}$; d'où l'on doit conclure que la quantité r, &, par conséquent, la grandeur de la pale que doit employer le Rameur, ou la quantité dont il doit la plonger dans l'eau, n'est pas arbitraire, mais qu'elle dépend des valeurs de a & b, & de la force k qui est employée dans l'action; de sorte que si le Rameur vouloit submerger davantage sa Rame, ce seroit alors augmenter la pale; & il faudroit, dans ce cas, qu'il augmentât son action k: sans cela, la pale reste constante.

(311.) Substituant maintenant cette valeur de mr dans la derniere formule, elle se changera en celle-ci, $2akVu = \frac{TmRau^2}{tn} - \frac{a^2k}{b^2}u(2bV - au)$;

ou, en divisant par au, $2kV = \frac{TmRu}{tn} - \frac{ak}{b^2}(2bV - au)$; ce qui donne $u = \frac{2kV(a+b)}{\left(\frac{TmR}{tn} + \frac{a^2k}{b^2}\right)b} = \frac{2kVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2ktn}$; c'est l'expression de la vîtesse que doit prendre l'Embarcation; & en substituant de plus la valeur de $k = K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}$, elle deviendra . . . .

$$u = \frac{2Vtnb(a+b)\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2 + a^2tn\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}.$$

(312.) Supposons, par exemple, un Canot armé de 15 avirons à *couple* *; & qu'on ait $a = 4$, $b = 8$, $K = 30$, $GP = 24$, $me = 2$, $T = 3$, $t = 1$, $mR = 60$, (a); $n = 15$; & l'on aura $k = 30 - 6 + 4 = 28$, & $u = \frac{56 . 15 . 8 . 12 . V}{3 . 60 . 64 + 16 . 28 . 15} = \frac{84}{19}V$. Donc, si l'on suppose la vîtesse $V = \frac{3}{2}$ pieds par seconde, on aura la vîtesse u du Canot $= 6$ pieds $\frac{12}{19}$ par seconde, laquelle marche équivaut à 4 milles par heure.

(313.) Si les Rameurs s'efforçoient, pendant un certain espace de temps, au point que K devînt $= 60$, & $V = 2$, on auroit $k = 60 - 6 + 4 = 58$, & $u = \frac{116 . 15 . 8 . 12 . 2}{3 . 60 . 64 + 16 . 58 . 15} = \frac{696}{53} = 13$ pieds $\frac{7}{63}$, vîtesse qui équivaut à 8 milles par heure.

(314.) Supposons le même Canot armé de 9 Avirons à *pointe*, c'est ainsi que les Marins appellent les Avirons dont les manches ont une longueur presque égale à la largeur de l'Embarcation **: & soit $a = 7$, $b = 11$, $n = 9$, les autres quantités étant comme ci-dessus; l'on aura $u = \frac{56 . 9 . 11 . 18 . V}{3 . 60 . 121 + 49 . 28 . 9} = 2\frac{876}{948}V$. Donc, si l'on suppose $V = \frac{3}{2}$ pieds par seconde, on aura $u = 4$ pieds $\frac{122}{316}$ par seconde, ce qui équivaut à 2 milles $\frac{2}{7}$ par heure.

(315.) Si, pendant un certain espace de temps, les Rameurs

---

* On appelle Avirons à *couple*, ceux dont la longueur du manche est moindre que la demi-largeur de l'Embarcation, de sorte qu'on peut armer deux Avirons sur le même banc; c'est ce que les Marins appellent *Nager en Couple*. Les Espagnols appellent ces especes d'Avirons *Remos Pareles*.

(a) Dans un Canot de 37 pieds de longueur, & de 8 pieds de largeur, on a $R = \frac{90}{64}$: & multipliant par 64, poids d'un pied cubique d'eau, on aura $mR = 90$; de laquelle quantité on doit prendre les deux tiers (*Tome I*, 644.) 60, pour avoir la valeur de la résistance absolue.

** Il est clair qu'on ne peut armer qu'un seul Aviron à pointe sur chaque banc de Rameur; c'est ce que les Marins appellent *Nager en pointe*. Les Espagnols appellent ces Avirons *Remos de Punta*.

portoient leurs efforts jusqu'à rendre $K=60$, & $V=2$, on auroit $u=\frac{116.9.11.18.2}{3.60.121+49.58.9}=8$ pieds$\frac{8}{11}$; ce qui équivaut à 5 milles $\frac{1}{6}$ par heure.

(316.) De la valeur de u qu'on a trouvée (312.), il suit, 1°. que la vîtesse de l'Embarcation sera toujours proportionnelle à la vîtesse V, avec laquelle les Rameurs meuvent leurs bras, ou les manches de leurs Avirons : 2°. que la même vîtesse u augmentera, si l'on augmente la force k qu'emploient les Rameurs, sans diminuer la vîtesse V : 3°. que la même vîtesse u augmentera encore, si le rapport $\frac{t}{T}$ augmente, ainsi que le nombre n des Rameurs; & enfin que cette même vîtesse diminuera à mesure que la résistance mR de la proue deviendra plus grande.

(317.) Toutes ces conséquences sont généralement connues des Marins: mais il nous reste à en examiner d'autres que nos formules fournissent également. La quantité $k=K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}$, peut augmenter, non seulement avec la force K du Rameur, mais encore en diminuant le moment GP, ce qu'on peut obtenir de deux manieres. 1°. En diminuant le poids de la partie extérieure de la Rame le plus qu'il sera possible; car, par là, non seulement on diminue P, mais on diminue aussi G. 2°. En augmentant le poids de la partie intérieure, ou du manche de la Rame. A la vérité, en employant ce moyen, on augmente P, mais on diminue beaucoup davantage G; & de cette maniere on peut parvenir jusqu'à rendre $GP-meb=0$; auquel cas toute la force du Rameur s'emploîra avec utilité. Les Marins ont déjà pris le parti de laisser beaucoup de bois au manche de leurs Avirons, & prétendent que cette grosseur leur est commode; mais je ne crois pas qu'ils aient jamais imaginé que cela pût contribuer à augmenter la vîtesse de l'Embarcation. Ils pourroient même obtenir cet avantage à un plus haut degré, en ajoutant quelque poids à l'extrêmité du manche, comme du plomb qu'on pourroit même incruster dans le bois, & en augmentant ce poids jusqu'au point de rendre $GP-meb=0$, ou jusqu'à ce que la pale étant plongée dans l'eau, comme elle l'est ordinairement dans l'action de la Rame, on trouve que le centre de gravité soit sur l'apostis, c'est-à-dire, dans le point C, où la Rame s'appuie sur le plat-bord de l'Embarcation; on auroit, dans ce cas, $k=K$, & l'on obtiendroit ainsi toute l'augmentation qu'il est possible d'obtenir, sans préjudicier au Rameur; c'est-à-dire, sans que son travail en fût augmenté.

(318.) Supposons, dans les exemples précédents, que $GP-meb=0$, ou que $k=K$, on aura $u=\frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2+a^2Ktn}$. Substituant donc les va-

leurs données dans le premier exemple relatif aux Avirons à couple, on aura $u = \frac{60 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2}}{3 \cdot 60 \cdot 64 + 16 \cdot 30 \cdot 15} = 6$ pieds $\frac{12}{13}$ par seconde, laquelle marche équivaut à 4 milles $\frac{2}{13}$ par heure : c'est $\frac{2}{13}$ de mille de plus qu'auparavant ; & dans le cas où les Rameurs feroient tous leurs efforts, comme dans l'*Art.* 313, on auroit $u = \frac{120 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2}{3 \cdot 60 \cdot 64 + 16 \cdot 60 \cdot 15} = 13$ pieds $\frac{1}{3}$ par seconde, ce qui équivaut à 8 milles par heure ; c'est à peu près le même sillage qu'auparavant.

(319.) En voyant que la quantité kV, ou la quantité d'action qu'emploie le Rameur, se trouve dans le numérateur de la formule, tandis qu'on voit seulement la quantité k dans le dénominateur, on pourroit croire que plus on augmentera V, en diminuant k, plus l'Embarcation acquerra de vîtesse ; mais il faut observer qu'en supposant $k = 0$, la vîtesse u de l'Embarcation devient aussi zéro : donc il y a nécessairement une valeur de kV qui donne la plus grande vîtesse u possible. Pour trouver cette valeur, il est nécessaire de supposer que le Rameur emploie toujours un même effort, & chercher la raison suivant laquelle la vîtesse V augmente, ou diminue, en diminuant, ou augmentant le poids K ; car, ayant déterminé cette raison, on trouvera facilement la plus grande raison qui est celle qu'on cherche. Supposons qu'un homme puisse soutenir, ou être près de soutenir un poids Q, mais non davantage ; il est clair que ce poids doit être regardé comme la masse que que nous devons supposer qu'il puisse tirer, mais sans pouvoir lui donner aucune vitesse. Supposons aussi que la plus grande vîtesse avec laquelle le même homme puisse mouvoir ses bras, sans tirer aucun poids, soit de W pieds par seconde : or, comme il est évident qu'à mesure qu'il diminue la vîtesse avec laquelle il meut ses bras, il pourra lever, ou tirer un plus grand poids, ce poids sera comme la diminution de cette vîtesse, & nous pourrons former cette équation, $\frac{W}{Q} = \frac{W - V}{K}$ * ;

* Pour rendre ceci sensible, concevons la vîtesse extrême W, avec laquelle un homme ne peut mouvoir ses membres & son corps sans devenir incapable de tout effort, divisée en un certain nombre de dégrés égaux de vîtesse que nous appellerons w. Concevons pareillement le poids extrême Q, qu'il peut vaincre sans cependant lui donner de vitesse, divisé en un pareil nombre de poids égaux, dont chacun soit représenté par q. Il paroît évident qu'à mesure que la vîtesse W diminuera, le poids que l'homme pourra enlever augmentera aussi d'un dégré : ainsi la suite des vîtesses sera . . . .
$W \cdot W - w \cdot W - 2w \cdot W - 3w \ldots\ldots W - W$; & celle des poids correspondants,
$0 \cdot q \cdot 2q \cdot 3q \ldots\ldots Q$; d'où l'on voit que les poids que l'homme pourra enlever suivent la même proportion que les diminutions des vîtesses : car on a $w : 2w : 3w :: q : 2q : 3q$. Mais on a supposé (305.) que le Rameur peut mouvoir le poids K avec la vîtesse V, & lorsque la vîtesse extrême W est réduite à V, la diminution de la vîtesse est $W - V$: donc, d'après ce qu'on vient de dire, on aura cette

d'où l'on tire $V = W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$. Si K étoit $= 0$, on auroit $V = W$ & si l'on avoit $V = 0$, il en résulteroit $K = Q$. Ces valeurs doivent s'évaluer d'après les efforts dont les Rameurs sont capables. Un homme peut soutenir 225 livres, & même plus, & il peut mouvoir ses mains, lorsqu'elles ne sont chargées d'aucun poids, avec une vîtesse de 6 à 7 pieds par seconde; mais seulement pendant peu de temps, & non pendant plusieurs heures, comme le travail des Rameurs l'exige.

Pour un travail continuel, il nous paroît convenable de supposer $V = 3\left(\frac{81-K}{81}\right)$, ou bien telle autre expression qui soit fondée sur des observations bien faites sur la force des Rameurs qu'on emploîroit; mais, en général, nous aurons toujours de la même maniere $V = W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$, W ainsi que Q exprimant des quantités qui soient réellement supportables pendant beaucoup de temps.

(320.) Substituant donc cette valeur de V dans celle qu'on a trouvée ci-dessus pour u, & nous aurons $u = \frac{2Ktnb(a+b)W(Q-K)}{Q(TmRb^2+a^2Ktn)}$, dont la différencielle, en supposant K variable, étant égalée à zéro, nous donnera la plus grande valeur de K, telle que l'effort du Rameur, étant exprimé par cette valeur, il donnera à l'Embarcation la plus grande vîtesse qu'il est possible; ainsi, nous aurons $(Q-2K)(TmRb^2 + a^2Ktn) = a^2tnK(Q-K)$, ce qui donne $a^2tnK^2 + 2TmRb^2K = TmRb^2Q$; équation du second degré, dont les racines donneront $K = -\frac{TmRb^2}{a^2tn} \pm \frac{TmRb^2}{a^2tn}\left(1 + \frac{a^2tnQ}{TmRb^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(321.) Supposons maintenant $Q = 81$, & les autres quantités telles que nous les avons supposées dans le premier exemple relatif aux Avirons à couple; c'est-à-dire, $T = 3$, $t = 1$, $a = 4$,

---

proportion $W : W - V :: Q : K$; d'où l'on tire $\frac{W}{Q} = \frac{W-V}{K}$; expression qui se réduit à zéro, lorsque $V = W$, & qui donne $Q = K$ lorsque $V = 0$, ainsi que cela doit être.

Quoique cette démonstration explique d'une maniere satisfaisante la loi que l'Auteur établit, nous ne pouvons dissimuler quelle porte sur un principe qui pourroit bien n'être pas rigoureusement vrai; car il nous semble qu'on peut douter que les diminutions égales de la vîtesse extrême, doivent produire des augmentations égales dans le poids enlevé, & réciproquement. En effet, la diminution de la force à mesure que la vîtesse augmente, est évidemment causée par les efforts que les Rameurs sont obligés de faire pour mouvoir leur propre corps; de sorte que plus ils emploient de force pour produire cet effet, moins il leur en reste pour agir sur les Rames. D'ailleurs, la liberté des mouvements de l'homme ne peut qu'occasionner beaucoup de variation dans leur dégré d'énergie: il nous semble impossible de renfermer cette variabilité dans des formules, & d'en faire l'objet d'un calcul rigoureux. Ces effets nous paroissent dépendre entiérement de la constitution physique, & même morale de l'homme; ainsi, le seul moyen d'approcher de la vérité, autant qu'il est en nous, est de consulter l'expérience. Au reste, il paroît, par tout ce qu'on a fait sur ce sujet, que la loi exprimée par la formule de l'Auteur, n'est pas éloignée de celle de la nature, & cela suffit pour l'objet dont il s'agit ici.

$b = 8$, $mR = 60$, & $n = 15$; & on aura à peu près $K = 31$; & ſuppoſant $W = 3$, on aura $V = 3\left(\frac{81 - 31}{81}\right) = 1$ pied $\frac{5}{6}$: de ſorte que le Rameur doit être capable de tirer un poids de 31 livres avec une vîteſſe de 1 pied $\frac{5}{6}$ par ſeconde. La valeur de u ſera dans un tel cas $= \frac{62.1\frac{5}{6}.15.8.12}{3.60.64 + 16.31.15} = 8$ pieds $\frac{5}{8}$ par ſeconde ; vîteſſe équivalente à 5 milles $\frac{4}{7}$ par heure, à peu près.

(322.) Pour le cas où les Rameurs voudroient s'efforcer pendant un court intervalle de temps, de maniere à produire tout l'effort dont ils ſont capables, nous pouvons ſuppoſer $V = 4\left(\frac{180 - K}{180}\right)$, ou $Q = 180$, & l'on aura, à peu près, $K = 54$, & $V = 2\frac{4}{5}$: ce qui donne $u = \frac{108.2\frac{4}{5}.15.8.12}{3.60.64 + 16.54.15} = 17$ pieds $\frac{4}{5}$ par ſeconde ; vîteſſe équivalente à 10 milles $\frac{2}{3}$ par heure.

(323.) Pour le cas des Avirons à pointe, dans lequel nous avons ſuppoſé $a = 7$, $b = 11$, $n = 9$, $T = 3$, $t = 1$, & $mR = 60$; ayant $Q = 81$, on aura à peu près $K = 31$, & ſuppoſant $W = 3$, on aura $V = 3\left(\frac{81 - 31}{81}\right) = 1$ pied $\frac{5}{6}$, d'où l'on tirera $u = \frac{62.1\frac{5}{6}.15.8.12}{3.60.121 + 49.31.9} = 5$ pieds $\frac{4}{7}$ par ſeconde ; vîteſſe qui équivaut à 3 milles $\frac{3}{7}$ par heure.

(324.) Suppoſant que les Rameurs s'efforcent pendant un petit intervalle de temps ; nous pouvons faire $Q = 180$; ce qui donne à peu près $K = 57$, & $V = 4\left(\frac{180 - 57}{180}\right) = 2$ pieds $\frac{13}{18}$, & $u = \frac{114.2\frac{13}{18}.9.11.18}{3.60.121 + 49.57.9} = 11$ pieds 7 par ſeconde ; vîteſſe qui correſpond à 7 milles $\frac{8}{15}$ par heure.

(325.) Dans les grandes vîteſſes, lorſque les Rameurs cherchent à produire tout l'effort dont ils ſont capables, il auroit été néceſſaire d'avoir égard à la réſiſtance qui provient de la dénivellation du fluide ; car la réſiſtance que nous avons employée, & que nous avons exprimée par $mR = 60$, eſt ſeulement celle qui ſuit la raiſon des ſimples vîteſſes : mais, dans le cas même où nous avons trouvé la vîteſſe $u = 17$ pieds $\frac{4}{5}$, la dénivellation ne peut produire, dans la réſiſtance $mR = 60$, qu'une augmentation de $3\frac{1}{5}$, & en conſéquence, la vîteſſe 17 pieds $\frac{4}{5}$ ſe réduit à 17 pieds $\frac{7}{10}$; de ſorte que les 10 milles $\frac{2}{3}$ par heure, qui correſpondent à cette vîteſſe, ſe réduiſent ſeulement à 10 milles $\frac{2}{5}$; ce qui fait $\frac{4}{15}$ milles de moins. Dans les autres cas, qui ſont ceux qui peuvent ſe préſenter le plus ſouvent dans la pratique, cette différence eſt beaucoup plus petite, & peut, par conſéquent, être négligée, pour ne pas compliquer davantage le calcul.

(326.) Les valeurs de a & de b présentent aussi le cas d'une plus grande vîtesse : car, en faisant $b = 0$, on aura également $u = 0$; & si l'on augmente beaucoup b, la valeur de K deviendra négative, &, en conséquence, la vîtesse u. La quantité a doit être déterminée d'après la disposition la plus commode pour le Rameur, & d'après la largeur de l'Embarcation. Plus la Rame approchera d'être horisontale, le manche étant à la hauteur de la poitrine, plus le Rameur maniera sa Rame avec facilité. Mais, pour qu'elle demeure sensiblement horisontale, il est nécessaire que a & b soient d'une longueur suffisante, au moins la premiere doit avoir toute la longueur possible. Il n'y a que deux manieres de déterminer la longueur qu'on peut lui donner ; car ou elle doit être de la moitié de la largeur de l'Embarcation, pour nager en couple ; ou elle doit être de presque toute cette largeur, pour nager en pointe : mais, comme, dans ce cas, on diminue de moitié le nombre des Rames, il n'est pas nécessaire de beaucoup d'attention reconnoître que la premiere disposition est la plus avantageuse, toutes les fois que l'Embarcation ne sera pas assez petite pour y mettre obstacle. Supposons donc qu'on ait déjà trouvé la relation entre b & a, & que b soit $= ah$, h étant une constante, ou une quantité dépendante de n dans la formule $u = \frac{2KVtnb\,(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$; après la substitution, cette formule deviendra $u = \frac{2KVtn\,(1+h)h}{TmRh^2 + Ktn}$. On voit de là que, quelle que soit la valeur de h, quoiqu'elle dépende de n, comme cette derniere est seulement dans le numérateur de l'expression, ainsi qu'on le verra par la suite (328.), plus le nombre des Rames sera considérable, plus la vîtesse u sera grande. Il faut cependant observer que cette disposition ne doit pas avoir lieu dans les Embarcations fort petites, parce que le doublement de l'équipage forme une charge extrêmement pesante pour elles ; ce qui augmente beaucoup la résistance mR de la proue, & produit, par conséquent, une diminution dans la vîtesse u : cette disposition pourra cependant toujours avoir lieu, lorsqu'un seul Rameur pourra faire mouvoir deux Rames à la fois.

(327.) Quelle que soit la disposition qu'on emploie, nous sçavons déjà que la partie a doit avoir en longueur la moitié de la largeur de l'Embarcation, ou la largeur entiere. Nous sçavons aussi que cette partie de la Rame doit être rendue aussi pesante qu'il sera possible, afin qu'elle puisse contre-balancer le poids de la partie extérieure : ainsi, il ne nous reste plus qu'à déterminer la relation que a & b doivent avoir entr'elles, en supposant la premiere de ces quantités constante, ou donnée. Considérant donc

b comme une variable, on remplira cet objet en différenciant l'équation $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$, & en égalant sa différencielle à zéro, ce qui donnera $(a + 2b)(TmRb^2 + a^2Ktn) = 2TmRb^2(a+b)$, d'où l'on tirera $\frac{b}{a} = \frac{Ktn}{TmR} \pm \frac{Ktn}{TmR}\left(1 + \frac{TmR}{Ktn}\right)^{\frac{1}{2}}$; c'est la relation la plus avantageuse qu'il puisse y avoir entre b & a, pour obtenir la plus grande vîtesse u; mais toujours d'après la supposition que la partie extérieure de la Rame est en équilibre avec l'intérieure.

(328.) Cette relation ne peut donc être constante: elle dépend de la force K que les Rameurs emploient, & du rapport $\frac{t}{T}$; quantités extrêmement variables. Plus ces quantités seront grandes, de même que le nombre n des Rames, plus la partie b doit être grande à l'égard de la partie a; &, au contraire, elle doit être plus petite à proportion que mR, ou la résistance, sera plus grande. Dans les Embarcations semblables mR est comme les racines quarrées des cinquiemes puissances de leurs dimensions linéaires (188.), & n est simplement comme ces dimensions: de sorte que la plus grande de deux Embarcations semblables données, n'a pas besoin que b soit aussi grand par rapport à a, ou, ce qui revient au même, il faut que la partie extérieure de la Rame soit plus courte, à l'égard de la partie intérieure.

(329.) Supposons $K = 31$, $T = 3$, $t = 1$, $n = 15$, $mR = 60$, comme nous l'avons fait dans l'exemple du Canot armé avec des Avirons à couple (321.), & nous aurons $\frac{b}{a} = \frac{31.15}{3.60} + \ldots \frac{31.15}{3.60}\left(1 + \frac{3.60}{31.15}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{31}{12} + \frac{31}{12}\left(1 + \frac{12}{31}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou, à peu près, $\frac{b}{a} = 5\frac{5}{8}$: de sorte que si nous faisons $a = 4$, comme dans le même exemple, nous aurons $b = 22\frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans l'équation $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$, & faisant $V = 1\frac{5}{6}$, on aura $u = \frac{62.1\frac{5}{6}.15.22\frac{1}{2}.26\frac{1}{2}}{3.60.(22\frac{1}{2})^2 + 16.31.15} = 10$ pieds $\frac{11}{13}$ par seconde, ce qui équivaut à 6 mille $\frac{2}{3}$ par heure; c'est 1 mille $\frac{1}{3}$ de plus que dans l'exemple cité.

(330.) Mais ceci est calculé sans avoir égard à l'autre *maximum* qui dépend de la valeur de K: pour les comprendre tous les deux dans la même formule, il est nécessaire d'éliminer une des deux inconnues K ou b, par le moyen des équations mêmes qui ont donné les plus grandes valeurs de ces quantités. De l'équation (327.), $(a + 2b)(TmRb^2 + a^2Ktn) = 2TmRb^2(a+b)$, on tirera

tirera $K = \frac{TmRb^2}{atn(a+2b)}$. Substituant cette valeur dans l'équation $a^2TnK^2 + 2TmRb^2K = TmRb^2Q$, (320.), on aura $aTmRb^2 + 2TmRb^2(a+2b) = Qatn(a+2b)^2$, & après avoir fait les réductions, & avoir ordonné, on aura

$$b^3 + \tfrac{3}{4}ab^2 - \frac{Qtna^2}{TmR}b - \frac{Qtna^3}{4TmR} = 0^*:$$
$$- \frac{Qatn}{TmR}b^2$$

équation dont la racine positive exprimera la valeur la plus avantageuse de b, & donnera la valeur la plus avantageuse de $K = \frac{TmRb^2}{atn(a+2b)}$ qui a lieu avec elle.

(331.) Retournons donc au cas des Avirons à couple, & à la supposition de la continuité du travail des Rameurs; cas dans lequel nous avons fait $Q = 81$, $a = 4$, $T = 3$, $t = 1$, $n = 15$, $mR = 60$; substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $b^3 - 24b^2 - 108b - 108 = 0$, dont la racine positive est à peu près $b = 28$; quantité qui surpasse de 5 pieds ½ celle qu'on a trouvée ci-dessus. La valeur de K est donc $= \frac{3.60.28.28}{4.15.60} = 39\frac{1}{5}$: & en substituant cette valeur dans l'équation $V = 3\left(\frac{81-K}{81}\right)$, elle donne $V = 1\frac{54}{100}$. Ces trois valeurs étant substituées dans l'équation $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$, donnent $u = \frac{78\frac{2}{5}.1\frac{54}{100}.28.15.32}{3.60.28.28 + 16.39\frac{1}{6}.15} =$ 10 pieds $\frac{78}{100}$ par seconde; vîtesse équivalente à 6 milles ½ par heure; c'est un peu plus que dans l'exemple précédent.

(332.) Mais tous les avantages que présentent ces résultats, portent sur la supposition que les parties intérieure & extérieure de la Rame se font mutuellement équilibre; & on voit clairement l'impossibilité d'obtenir cet équilibre, b étant $= 28$. On pourroit seulement produire cet effet en faisant tout le manche de fer, & l'unissant ensuite à la partie extérieure de la Rame, par des empâtures ou autrement : mais en prenant ce parti, chaque manche peseroit à peu près deux quintaux, & le Canot seroit alors surchargé de 30 quintaux, ce qui rendroit la résistance $mR = 64$, au lieu de 60 que nous avions auparavant: cette disposition, bien loin d'augmenter la marche, la diminueroit de ⅜ de mille par heure, car elle se réduiroit seulement à 6 milles ⅛. Or, on peut obtenir à peu près cette même vîtesse, en se servant d'une Rame ordinaire toute de bois, en faisant seulement $b = 9$, & on peut

* Cette équation a essentiellement une racine positive, puisque son dernier terme est négatif. (Voyez, pour la démonstration, la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Article* 201.).

très-bien mettre cette longueur en équilibre avec la partie intérieure en grossissant le manche suivant la maniere usitée par les Anglais; ainsi, on est dispensé de faire usage de ce contrepoids excessif. On doit donc conclure de-là que toute autre longueur plus grande que celle $b=9$, seroit préjudiciable à cause qu'elle auroit besoin d'un contre-poids; & si l'on ne fait pas usage de ce contre-poids, le même inconvénient arrive, c'est-à-dire, que la marche est diminuée.

(333.) Pour s'assurer de ce que nous venons de dire, il est nécessaire de chercher les valeurs avantageuses de K & de $\frac{b}{a}$, non dans l'équation $u=\frac{2KVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2Ktn}$, qui correspond au cas unique, dans lequel la Rame est équilibrée, mais dans l'équation générale $u=\frac{2Vtnb(a+b)\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2+a^2tn\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}$; ou, en substituant la valeur de $V=\left(\frac{Q-K}{Q}\right)W$, dans celle $u=$ . . . . $\frac{\frac{2Wtnb(a+b)}{Q}(Q-K)\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2+a^2tn\left(K-\frac{GP}{a}+\frac{meb}{a}\right)}$. Faisons maintenant, pour simplifier le calcul $\frac{GP-meb}{a}=A$, & supposant ensuite que K est une quantité variable, égalons à zéro la différencielle de l'équation, & nous aurons $K^2+2\left(\frac{TmRb^2}{a^2tn}-A\right)K=\frac{TmRb^2}{a^2tn}(Q-A)-A^2$: équation d'où l'on tirera la valeur la plus avantageuse de K, dont il convient de faire usage. Substituant cette valeur dans celle de u, & différenciant cette derniere en faisant varier b, on en déduira une équation qui donnera de même la valeur la plus avantageuse de b; ou bien, sans substituer la valeur la plus avantageuse de K, dans celle de u, on différenciera de nouveau cette derniere, en faisant varier b, & on égalera les deux différencielles (*Tome I*, 736.). De quelque maniere qu'on procede, on parviendra toujours à une équation très-composée, que nous pouvons nous dispenser de calculer, en considérant que si l'on augmente seulement d'un pied la valeur 9 qu'on a trouvée pour b; c'est-à-dire, si l'on suppose $b=10$, il en résultera $\frac{GP-meb}{a}=A=3$; substituant cette valeur de A dans l'équation $K^2+2\left(\frac{TmRb^2}{a^2tn}-A\right)K=$ . . . . $\frac{TmRb^2}{a^2tn}(Q-A)-A^2$, & faisant, comme ci-dessus, $Q=81$, $mR=60$, $T=3$, $t=1$, $a=4$, & $n=15$; on trouvera $K=33$,

& $V = 3\left(\frac{81-33}{81}\right)$: quantités qui, étant ſubſtituées dans la valeur de $u = \frac{2Vtnb(a+b)\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}{TmRb^2 + a^2tn\left(K - \frac{GP}{a} + \frac{meb}{a}\right)}$, donnent $u =$ 8 pieds $\frac{3}{4}$ par ſeconde ; vîteſſe équivalente à 5 milles $\frac{1}{4}$ par heure ; c'eſt environ 1 mille de moins que dans le cas de $b = 9$, les parties de la Rame étant en équilibre. On ne peut donc mieux faire que de s'en tenir à cette diſpoſition, qui eſt, ſans contredit, la plus avantageuſe ; c'eſt-à-dire qu'on doit ſe borner à mettre en équilibre la partie extérieure de la Rame avec l'intérieure, par le bois ſeul dont elle eſt formée ; & dans ce cas, on aura à peu près $b = \frac{9}{4}a$. Cependant ſi l'équation $b^3 + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{Qa^2tn}{TmR}b - \frac{Qa^3tn}{VTmR} = 0$, donnoit une

$- \frac{Qatn}{TmR}b^2$

moindre valeur pour b, il faudroit s'arrêter à celle-ci, & équilibrer la Rame, en diminuant alors la groſſeur du manche. Au reſte, la valeur de K ſera (320.) $= -\frac{TmRb^2}{a^2tn} + \frac{TmRb^2}{a^2tn}\left(1 + \frac{a^2tnQ}{TmRb^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, celle de V (319.) $= W\left(\frac{Q-K}{Q}\right)$; & enfin (318.) celle de $u = \frac{2KVtnb(a+b)}{TmRb^2 + a^2Ktn}$.

(334.) Dans une Galere de 40 Rames, on a $mR = 640$, la longueur du manche $= 12$ pieds ; mais cependant la diſtance de l'apoſtis au centre des forces des Rameurs, eſt ſeulement $= 9$ pieds, parce que les cinq Rameurs qui ſont attachés à chaque Rame occupent environ 7 pieds $\frac{1}{2}$ du manche. On a de plus $T = 4$, $t = 1$, $Q = 405$, qui eſt le produit de 81 par 5, & $W = 3$, comme ci-deſſus. D'après toutes ces données, l'équation qui donne la valeur de b, devient $b^3 - 50b^2 - 513b - 1156 = 0$; d'où l'on tire $b = 60$ pieds, environ : mais cette longueur étant plus grande que $\frac{9}{4}a = \frac{9}{4}.12$ pieds $=$ 27 pieds, il faut s'en tenir à cette derniere, & faire la diſtance b de l'apoſtis au centre des pales $= 27$ pieds. La valeur de b étant ainſi déterminée, l'équation qui donne la valeur de K, ſe changera en $K = -64.9 + 64.9\left(1 + \frac{9.5}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = 180$; ce qui donnera $V = 3\left(\frac{405-180}{405}\right) = 1\frac{2}{3}$; d'où il réſulte enfin $u = \frac{360.1\frac{2}{3}.40.27.36}{4.640.27.27 + 81.180.40} =$ 9 pieds $\frac{1}{2}$ par ſeconde ; c'eſt le nombre de pieds que fera la Galere dans chaque ſeconde ; vîteſſe équivalente à 5 milles $\frac{7}{10}$ par heure.

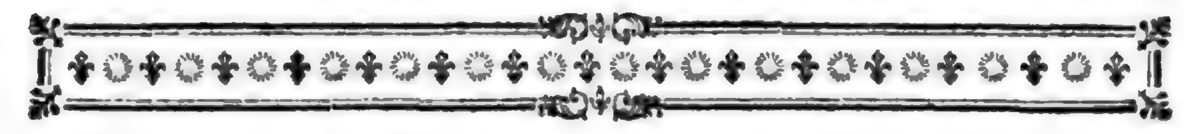
(335.) Il ne nous reſte plus maintenant, pour terminer ce *Chapitre*, que de faire voir, comme nous l'avons promis (304.), que l'inertie de la Rame miſe en mouvement peut être négligée dans le calcul.

Pour cela, supposons que π exprime le poids de la partie extérieure de la Rame, & g la distance de son centre de gravité à l'apostis; nous pourrons représenter son inertie par $\frac{g^2\pi V}{fa}$; & pareillement $\frac{h^2\Pi V}{Fa}$ sera celle de la partie intérieure, Π exprimant son poids, & h la distance de son centre de gravité à l'apostis. Ces deux forces doivent être surmontées par le Rameur, aussi bien que celles qu'on a déjà considérées. Il faut donc en tenir compte, & pour cela les introduire dans l'équation de l'*Art.* 309. Supposant donc $\left(\frac{g^2\pi}{fa}+\frac{h^2\Pi}{Fa}\right)V=P$, cette équation sera $2akVu=\frac{TmRau^2}{tn}-\frac{a^2ku}{b^2}(2bV-au)+P$, qui se réduit à $u=\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(1+\left(1-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{k^2V^2tna(b+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, ou $u=\ldots$ $\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(2-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{2k^2V^2tna(b+a)^2}\right)$. Mais $\frac{2kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}$ est la valeur de u que nous avons trouvée ci-dessus; nommant donc celle-ci w, on aura $u=w-\frac{Pb}{kVa(b+a)w}$; &, par conséquent, la différence de u à w, ou $w-u=\frac{Pb}{kVa(b-a)w}=\frac{b\left(\frac{g^2\pi}{f}+\frac{h^2\Pi}{F}\right)}{ka^2(b+a)w}$; mais $\frac{g^2\pi}{f}+\frac{h^2\Pi}{F}$ est à peu près $=\frac{1}{5}a^2k$: donc on aura $w-u=\frac{b}{5(b+a)w}$, ou, en faisant $b=\frac{9}{4}a$, $w-u=\frac{9a}{20aw}=\frac{9}{20w}$; de sorte que lorsque $w=9$, on aura $w-u=\frac{1}{20}$ de pied; quantité négligeable *.

---

* On a traduit littéralement tout cet *Article*, quoique le calcul en paroisse fort peu exact, l'Auteur parvient à l'équation $u=\ldots\ldots$ $\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(1-\left(1-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{k^2V^2tna(b+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$; & d'abord, pour simplifier l'expression, il extrait la racine de la partie radicale, & se contente des deux premiers termes de la série que donne cette extraction; & en cela, il a raison: car le second terme du radical est évidemment plus petit que le premier. Si on en vouloit une démonstration, on remarqueroit, avec l'Auteur, que $\frac{2kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}$ est la valeur de u trouvée dans l'*Art.* 311; ainsi, en exprimant par w cette valeur, on aura $\frac{1}{w}=\frac{TmRb^2+a^2ktn}{2kVtnb(b+a)}$. Multipliant de part & d'autre par $\frac{2bP}{akV(b+a)}$, on aura $\frac{2bP}{akV(b+a)w}=\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{k^2V^2tnb(b+a)^2}$; mais comme l'observe l'Auteur, P est à peu près $=\frac{1}{5}akV$, substituant cette valeur dans le premier membre, & faisant $b=\frac{9}{4}a$, il deviendra $=\frac{18}{65}\cdot\frac{1}{w}$; quantité qui est évidemment une fraction tant que w sera plus grand que $\frac{18}{65}$. Ainsi, le second terme du radical sera fractionnaire, & la série qui exprimera la valeur de ce radical ne peut manquer d'être convergente, tant que l'Embarcation aura une vitesse de plus des $\frac{18}{65}$ d'un pied par seconde: ce sera le plus grand nombre des cas, & sur-tout celui dont il est ici question.

La valeur de u devient donc, après l'extraction de la racine, $=\ldots\ldots$ $\frac{kVtnb(b+a)}{TmRb^2+a^2ktn}\left(2-\frac{P(TmRb^2+a^2ktn)}{2k^2V^2tna(b+a)^2}\right)=\ldots\ldots$



LIVRE QUATRIEME.

Des Actions & des Mouvements du Navire.

CHAPITRE I.

De la Marche, ou du Mouvement progressif, du Vaisseau, par l'impulsion du vent sur les voiles, & du Rumb de vent que cette impulsion l'oblige de suivre.

(336.) Nous distinguerons trois sortes de Mouvements progressifs dans le Vaisseau : l'un dirigé suivant la quille, que nous appellerons *Mouvement direct ;* l'autre suivant la perpendiculaire à la quille, que nous appellerons *Mouvement latéral ;* & le troisieme, qui est composé des deux précédents, & qui, par conséquent, exprime le véritable Rumb que suit le Vaisseau, que nous appellerons *Mouvement oblique.* La considération de ces trois Mouvements nous fournira les connoissances suffisantes pour déterminer la marche, & le Rumb de vent que suit le Vaisseau ; mais cependant il est nécessaire d'en considérer un autre, peut être le plus essentiel de tous ; c'est celui que les Marins appellent l'*Élancement vers l'origine du vent* * ; c'est-à-dire, le Mouvement par lequel le Navire *gagne au vent*, ou par lequel il se dirige directement vers l'origine du vent. Car quoique ce mouvement soit le résultat des

---

$\frac{2kVtnb(b+a)}{T m R b^2 + a^2 ktn}\left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{P(T\pi R b^2 + a^2 ktn)}{k^2 V^2 tna (b+a)^2}\right) = w\left(1 - \frac{bP}{2aVk(b+a)w}\right) =$ $w - \frac{bP}{2aVk(b+a)}$. Donc $w - u = \frac{bP}{2aVk(b+a)} = \frac{b\left(\frac{g^2\pi}{f} + \frac{h^2\Pi}{F}\right)}{2a^2k(b+a)} = \frac{\ldots}{10(b+a)}$, en faisant $\frac{g^2\pi}{f} + \frac{h^2\Pi}{F} = \frac{1}{5}a^2k$. Supposant enfin $b = \frac{9}{4}a$, on aura $w - u = \frac{9a}{10 \cdot 13a} = \frac{9}{130} = \frac{1}{15}$ de pieds environ ; quantité qui ne dépend point de la valeur de w, comme le dit l'Auteur, mais de la valeur de $\frac{g^2\pi}{f} + \frac{h^2\Pi}{F}$, & de la relation entre b & a.

* En Espagnol, *Salida á Barlovento.*

autres, il ne dépend pas ſeulement du plus grand, ou du moindre Mouvement direct, mais de la combinaiſon de celui-ci avec le Mouvement latéral. Tous ces Mouvements proviennent de l'action que le vent communique au Vaiſſeau, en agiſſant ſur les voiles, ſur le corps du Vaiſſeau, ſur les agrès, & ſur les autres choſes ſur leſquelles il produit une impulſion. Ils proviennent auſſi du choc des lames, & de la force des courants; mais nous nous propoſons ſeulement, dans ce *Chapitre*, de déterminer ceux qui réſultent de l'action du vent ſur les voiles. Preſque tous les Auteurs qui ont traité cette matiere, à l'exception de quelques-uns, tels que MM. *Parent*, & *Jacques Bernoulli*, ont fondé leurs raiſonnements non-ſeulement ſur le faux principe des réſiſtances des fluides, mais encore ſur la ſuppoſition que la vîteſſe du vent eſt infinie à l'égard de celle que prend le Vaiſſeau. Ils ſe ſont arrêtés naturellement à cette idée, parce qu'elle facilite le calcul; mais cette ſuppoſition eſt ſi fort éloignée de la vérité, qu'on verra, dans les *Chapitres* ſuivants, avec grand étonnement, ſans doute, que le Navire peut prendre, ayant ſa voilure bien diſpoſée, & même qu'il prend, en effet, une vîteſſe preſque égale à celle du vent qui le pouſſe. C'eſt une vérité que l'expérience confirme, & qu'on démontrera en faiſant voir dans quelle erreur on a été juſqu'ici, particuliérement ſur la vîteſſe du vent, qu'il étoit néceſſaire de ſuppoſer énorme, pour accorder l'expérience avec les réſultats du calcul.

(337.) La force que fait le vent ſur les voiles, ſuivant la direction de la quille, après avoir mis le Vaiſſeau en mouvement, & lui avoir donné, ſuivant cette direction, toute la vîteſſe poſſible, eſt en équilibre avec la réſiſtance directe que l'eau oppoſe à la proue. La même choſe arrive pour la vîteſſe latérale, ce qui nous donne deux équations, qui ſont celles qui doivent nous fournir les connoiſſances qui ſont l'objet de nos recherches. La premiere de ces forces, celle du vent ſur les voiles, a été trouvée (272 & 280.) $= \frac{1}{20} m V A^2 G \, \mathit{ſin}\, \alpha . \mathit{ſin}\, (\beta - \delta)$ *; mais il faut obſerver que cette force n'a lieu qu'en tant que le Vaiſſeau, ou ſes voiles, n'ont aucun mouvement: auſſi-tôt qu'elles ſe meuvent, cette force diminue, parce que la vîteſſe relative avec laquelle le vent choque la voile, diminue pareillement de toute celle que

* Cette expreſſion eſt celle de l'*Art.* 272, en mettant A^2 pour la ſurface de toutes les voiles, & en faiſant $G = \frac{\mathit{ſin}\, \frac{1}{2} (\Pi - \gamma)}{\mathit{Arc}\, \frac{1}{2} (\Pi - \gamma)}$, comme il eſt preſcrit à l'*Article* 280.

prend le Vaisseau dans cette direction. Supposons que QN représente la quille du Navire, Q la poupe, & N la proue, HI la vergue, KE la direction du vent, EF la direction oblique que prend le Vaisseau. Du point F soit abaissé la perpendiculaire FN; & si EF représente la vîtesse oblique du Vaisseau, EN représentera sa vîtesse directe, & FN sa vîtesse latérale : de sorte que les trois lignes EF, EN, & FN, seront entr'elles comme ces trois vîtesses. Soit tiré de plus les droites GNT, KI, perpendiculaires à la voile, & si KE représente la vîtesse V absolue du vent, $KI = V \sin \alpha$ représentera celle avec laquelle il tombe perpendiculairement sur la vergue, celle-ci étant supposée sans mouvement. Si l'on tire maintenant FG parallélement à la vergue, TG exprimera la vîtesse que prend la vergue, suivant une direction qui lui est perpendiculaire. Donc la vîtesse relative avec laquelle le vent frappe perpendiculairement la vergue, sera $= KI - TG = V \sin \alpha - TG$; & c'est de cette expression que nous devons faire usage, au lieu de $V \sin \alpha$ seul. PLANCHE IX. FIG.

(338.) Pour trouver cette vîtesse, soit A^2 la surface de toutes les voiles.

V la vîtesse du vent.

u la vîtesse directe du Vaisseau.

v sa vîtesse latérale.

w sa vîtesse oblique.

W la vîtesse avec laquelle le Vaisseau gagne dans le vent.

α l'angle que la direction du vent forme avec la vergue.

β l'angle que forme la vergue avec la quille.

γ l'angle que forme la direction du vent avec la quille.

Cela posé, β exprimant l'angle NET, & EN étant $= u$, on aura $NT = u \sin \beta$; & par la similitude des triangles NET, FNG, on aura aussi $NG = v \cos \beta$, à cause que $FN = v$; donc $NT + NG = TG = u \sin \beta + v \cos \beta$; donc la vîtesse avec laquelle le vent frappe perpendiculairement la vergue, sera $= V \sin \alpha - u \sin \beta - v \cos \beta$, & la force que fait la voile dans le sens de la quille (337.), $= \frac{1}{20} m A^2 G \sin (\beta - \delta) (V \sin \alpha - u \sin \beta - v \cos \beta)$. Cette force est à celle qu'elle exerce latéralement (272.), comme $\sin (\beta - \delta)$ est à $\cos (\beta - \delta)$: donc la force latérale avec laquelle les voiles agissent, sera $= \frac{1}{20} m A^2 G \cos (\beta - \delta) (V \sin \alpha - u \sin \beta - v \cos \beta)$.

(339.) Les forces, ou résistances, qu'éprouve le Vaisseau, tant par la proue, ou directement, que par le côté, ou perpendiculairement, ont été déterminées ci-devant (*Liv. II*, *Chap. V*) ; mais, pour suivre le calcul dans toute sa généralité, nous supposerons la

PLANC. IX. premiere de ces résistances $= mru$, & la seconde $= mRv$, r & R exprimant les quantités qu'on a trouvées dans le *Chapitre* cité. Ainsi, nous aurons, d'après cela, ces deux équations, ...
$mru = \frac{1}{20} mA^2G \sin(\beta - \delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta - v \cos\beta)$, & ...
$mRv = \frac{1}{20} mA^2G \cos(\beta - \delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta - v \cos\beta)$. La premiere donne $v = \frac{GA^2 \sin(\beta-\delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta) - 20ru}{GA^2 \sin(\beta-\delta)\cos\beta}$, & la seconde donne aussi $v = \frac{GA^2 \cos(\beta-\delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta)}{GA^2 \cos(\beta-\delta)\cos\beta + 20R}$. Donc on aura ....
$\frac{GA^2 \sin(\beta-\delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta) - 20ru}{GA^2 \sin(\beta-\delta)\cos\beta} = \frac{GA^2 \cos(\beta-\delta)(V \sin\alpha - u \sin\beta)}{GA^2 \cos(\beta-\delta)\cos\beta + 20R}$; d'où l'on tire $u = \frac{GA^2RV \sin\alpha . \sin(\beta-\delta)}{GA^2R \sin(\beta-\delta)\sin\beta + r\cos(\beta-\delta)\cos\beta + 20Rr} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{GA^2RV \sin\alpha . \sin(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta . \sin(\beta-\delta) + r(GA^2 \cos\delta + 20R)}$; c'est l'expression de la vîtesse directe que doit prendre le Vaisseau. Si nous substituons sa valeur dans l'une ou l'autre des valeurs de v, nous aurons $v = \ldots$
$\frac{GArV \sin\alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta . \sin(\beta-\delta) + r(GA^2 \cos\delta + 20R)}$; c'est l'expression de la vîtesse latérale que doit prendre pareillement le Vaisseau.

(340.) Nous aurons donc, d'après cela, $\frac{v}{u} = \frac{r \cos(\beta-\delta)}{R \sin(\beta-\delta)} = \ldots$
$\frac{r}{R \tan(\beta-\delta)}$: mais, comme ce rapport $\frac{v}{u}$, ou $\frac{FN}{EN}$ exprime la tangente de l'angle FEN, que les Marins appellent *l'angle de la Dérive*, si nous appellons cet angle θ, on aura $\tan\theta = \frac{r}{R \tan(\beta-\delta)}$.

(341.) Faisant attention que les vîtesses u & v sont entre elles, comme $R \sin(\beta-\delta)$ est à $r \cos(\beta-\delta)$, si l'on prend ces expressions pour les valeurs de ces vîtesses, on aura $(R^2 \sin(\beta-\delta)^2 + r^2 \cos(\beta-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$ pour l'expression de la vîtesse oblique w, & la vraie vîtesse w se trouvera, par cette analogie, $R \sin(\beta-\delta)$ est à ....
$(R^2 \sin(\beta-\delta)^2 + r^2 \cos(\beta-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}$, comme $\frac{A^2GRV \sin\alpha . \sin(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta . \sin(\beta-\delta) + r(GA^2 \cos\delta + 20R)}$ est à $w = \frac{GA^2V \sin\alpha \, (R^2 \sin(\beta-\delta)^2 + r^2 \cos(\beta-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}}{GA^2(R-r)\sin\beta . \sin(\beta-\delta) + r(GA^2 \cos\delta + 20R)}$.

(342.) Il ne nous reste plus maintenant qu'à trouver la vîtesse W avec laquelle le Vaisseau gagne dans le vent, ou avec laquelle il s'approche de l'origine du vent. Pour y parvenir, supposons que la direction du vent soit représentée par KE, que EN représente la vîtesse directe, & NF la vitesse latérale ; en élevant, perpendiculairement à la direction KE, la droite EX, que les Marins appellent
FIG. 47. *la perpendiculaire du vent*, & tirant NX parallélement à la même direction, & FG perpendiculaire à cette derniere, alors XG représentera

tera la vîtesse avec laquelle le Navire s'éleve dans le vent *. Pour trouver NX; nous avons le triangle rectangle NEX, dans lequel l'angle N est $= \gamma$, à cause qu'il est égal à l'angle NEK, & l'hypotenuse $EN = \frac{GA^2 RV \sin\alpha.\sin(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}$, qui est la vîtesse directe: donc $NX = \frac{GA^2 RV \cos\gamma \sin\alpha.\sin(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}$. En procédant de la même maniere, dans le triangle NFG semblable au précédent, & dans lequel on a la vîtesse latérale $NF = \frac{GA^2 rV \sin\alpha.\cos(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}$; on aura $NG = \ldots\ldots \frac{GA^2 rV \sin\gamma.\sin\alpha.\cos(\beta-\delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}$, donc $XG = NX - NG = W = \frac{GA^2 V \sin\alpha\,(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta) - r\sin\gamma.\cos(\beta-\delta))}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}$.

(343.) On peut simplifier les expressions de toutes ces vîtesses, & faciliter les calculs, si on élimine l'angle α, en substituant la valeur de son sinus exprimée en sinus & cosinus des angles γ & β; car, attendu que $\gamma = \alpha + \beta$, (271.), on aura $\sin\alpha = \sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta$. Ainsi ces valeurs deviendront ......

$$u = \frac{GA^2 RV \sin(\beta-\delta)\,(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}.$$

$$v = \frac{GA^2 rV \cos(\beta-\delta)\,(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta)}{GA^2(R-r)\sin\beta\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}.$$

$$w = \frac{GA^2 V\,(R^2\sin(\beta-\delta)^2 + r^2\cos(\beta-\delta)^2)^{\frac{1}{2}}\,(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta)}{GA^2(R-r)\sin\beta\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}.$$

$$W = \frac{GA^2 V\,(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta) - r\sin\gamma.\cos(\beta-\delta))\,(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta)}{GA^2(R-r)\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+r(GA^2\cos\delta+20R)}.$$

(344.) Pour que ces expressions puissent nous servir, tant pour les cas où l'on navigue vent largue, que pour ceux où l'on navigue à la bouline, on doit observer que puisque le terme qui contient $\cos\gamma$ est négatif, dans le cas de la bouline, comme on l'a exprimé dans les formules, il sera positif, dans le cas du vent largue: par conséquent, en changeant seulement le signe du terme où se trouve ce cosinus, elles exprimeront les vîtesses pour ce cas **. Mais il est essentiel d'observer que pour éviter toute con-

---

* Car si le Vaisseau ne gagnoit pas au vent, il suivroit la direction EX de la perpendiculaire du vent: donc la vîtesse avec laquelle il s'éloigne de EX, en gagnant vers l'origine du vent, sera celle avec laquelle il s'éleve dans le vent. Or, en vertu de la vîtesse directe EN, & de la vîtesse latérale FN, il parvient au point F dans le même temps qu'il auroit employé à parcourir séparément les espaces EN, NF, en vertu de ces deux vîtesses respectives. Donc la distance du point F à la perpendiculaire du vent, c'est-à-dire, XG, est l'expression de la vîtesse avec laquelle le Vaisseau s'éleve dans le vent.

** Car dans le cas de la bouline on a $\gamma < 90°$, & $\cos\gamma$ est positif; ainsi le terme où se trouve ce cosinus étant soustrait de celui qui le précede, ce terme devient négatif;

fuſion, nous renfermerons dans le cas de la bouline, tous les cas quels qu'ils ſoient, où l'angle γ eſt aigu, ou moindre que 90°, en le meſurant vers la proue; & dans le cas du vent largue, tous ceux où il eſt plus grand que 90°; de ſorte que lorſque $\gamma = 90$, on aura $cof\ \gamma = 0$; & lorſque $\gamma = 180°$, ce qui eſt le cas dans lequel on navigue vent arriere, alors $cof\ \gamma = 1$.

(345.) La premiere connoiſſance que nous fourniſſent ces formules, eſt que ces quatre vîteſſes ſeroient en raiſon directe de la vîteſſe V du vent, en ſuppoſant la même quantité de voiles, & leur diſpoſition auſſi la même, ſi la vîteſſe V, en variant, ne faiſoit pas varier en même temps $G = \frac{fin\ \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}{Arc\ \frac{1}{2}(\Pi - \pi)}$, (280.), ainſi que $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, (270.). La quantité V augmentant, Π augmente (269.), & π diminue, par conſéquent G diminue en même temps*: & comme Π augmente dans une plus grande raiſon que π ne diminue, il s'enſuit que δ augmente: donc en vertu de ces deux raiſons, la valeur de u doit être moindre qu'elle ne ſeroit ſans ces altérations; & par conſéquent elle ne peut augmenter dans la même raiſon que V. On doit entendre la même choſe de la vîteſſe oblique w, & de la vîteſſe W avec laquelle le Vaiſſeau gagne au vent; mais la vîteſſe latérale v augmente, au contraire, dans une plus grande raiſon.

(346.) Pareillement, les valeurs de G & de δ variant par la différente courbure de la voile, & cette courbure variant ſuivant la tenſion de la voile, & la qualité de la toile dont elle eſt formée (265), il s'enſuit que plus la toile ſera d'un tiſſu fort & ſerré; c'eſt-à-dire, moins elle ſera diſpoſée à prendre une grande courbure, & plus la voile ſera tendue, plus les vîteſſes directe, oblique, & pour gagner au vent, ſeront grandes, & plus, au contraire, la vîteſſe latérale ſera petite.

(347.) Comme la quantité R multiplie tout le numérateur dans la vîteſſe directe, & ſeulement une partie du dénominateur; & que la quantité r ſe trouve ſeulement dans le dénominateur; il s'enſuit que plus le rapport $\frac{R}{r}$ ſera grand, plus cette vîteſſe ſera petite. Dans l'expreſſion de la vîteſſe avec laquelle le Vaiſſeau gagne au vent, le numérateur diminue, & le dénominateur augmente à meſure que r augmente; donc cette vîteſſe ſera d'autant plus petite que r ſera

---

mais dans le cas du vent largue γ eſt > 90°, ainſi $cof\ \gamma$ eſt négatif, & le terme où il ſe trouve ſera poſitif par l'effet de la ſouſtraction.

* Car Π augmentant & π diminuant, $\Pi - \pi$ devient plus grand; & comme les arcs croiſſent dans une plus grande raiſon que leurs ſinus, le dénominateur de la valeur de G devient plus grand à l'égard du numérateur; ainſi G diminue de valeur.

plus grande : de sorte que si r devenoit $= \frac{R \cos\gamma . \sin(\beta - \delta)}{\sin\gamma . \cos(\beta - \delta)} = \frac{R \tan(\beta - \delta)}{\tan\gamma}$, cette vîtesse seroit nulle, & le Vaisseau ne pourroit aucunement gagner au vent ; ou, ce qui revient au même, pour que le Vaisseau puisse gagner au vent, il faut qu'on ait $\tan(\beta - \delta) > \frac{r}{R} \tan\gamma$.

(348.) Comme la quantité A^2, qui exprime la surface de toutes les voiles, multiplie tous les termes des numérateurs, tandis qu'elle ne multiplie pas tous ceux des dénominateurs ; il s'ensuit que plus on déferlera de voile, plus en général les quatre vîtesses ci-dessus deviendront grandes. La vîtesse directe & l'oblique augmentent au point de devenir égales, & même plus grandes que celle du vent ; & si cela n'arrive pas dans un Vaisseau, on le voit arriver dans d'autres Embarcations. Pour cela, il faut que le coëfficient $GA^2R \sin\alpha . \sin(\beta - \delta)$ du numérateur soit égal, ou plus grand que le dénominateur $GA^2(R - r) \sin\beta . \sin(\beta - \delta) + r(GA^2 \cos\delta + 20R)$ Faisons, pour rendre la réduction plus facile, $\alpha = 90^\circ$, afin (270.) qu'ayant $\delta = \frac{1}{2}(\Pi + \pi) - \alpha$, on ait (274.) $\delta = 0$: alors on verra que, pour que la vîtesse directe soit égale, ou plus grande que celle du vent, il suffira seulement que $GA^2R \sin\beta$ soit $=$, ou $> GA^2R \sin\beta^2 + GA^2 r \cos\beta^2 + 20 Rr$; ou que A^2 soit $=$, ou $> \frac{20 Rr}{GR(\sin\beta - \sin\beta^2) - Gr \cos\beta^2}$. Cette expression manifeste déjà clairement qu'on ne peut pas faire $\sin\beta = 1$, parce que cette expression deviendroit $\frac{20 Rr}{0} = \infty$, & par conséquent, il faudroit que A^2 fût $= \infty$, pour que l'Embarcation eût seulement une vîtesse égale à celle du vent ; ce qui est infiniment éloigné de pouvoir s'obtenir dans la pratique, & même est absolument chimérique. Supposons donc $\sin\beta = \frac{1}{2}$, laquelle valeur n'est pas beaucoup éloignée d'être la plus avantageuse ; & dans cette supposition, pour que la vîtesse du Bâtiment soit égale, ou plus grande que celle du vent, il faudra avoir $A^2 =$, ou $> \frac{80 Rr}{G(R - 3r)}$; ou, en faisant $\pi = 60^\circ$, & par conséquent (274.), $G = \frac{\sin\frac{1}{2}(180^\circ - 2\pi)}{Arc.\frac{1}{2}(180^\circ - 2\pi)} = \frac{1}{2} . \frac{6}{3,14} = \frac{3}{3,14}$, il faudra que A^2 soit $=$, ou $> \frac{251,2 . Rr}{3(R - 3r)}$. Supposons maintenant $R = 3316$, & $r = 294$, comme on l'a trouvé, *Art.* 187, pour le Vaisseau de 60 canons, & nous trouverons $\frac{251,2 . Rr}{3(R - 3r)} = 31484$: mais (280.) ce Vaisseau ne peut déployer que 24400 pieds de voilure ; donc, dans cette disposition, sa vîtesse ne peut jamais parvenir à égaler celle du vent. Il seroit donc nécessaire, pour qu'il acquît cette vîtesse, ou d'augmenter la voilure jusqu'au point que sa sur-

face fût $= 31484$ pieds, ou de diminuer la valeur de $\frac{251,2.Rr}{3(R-3r)}$, en diminuant celle de la résistance r de la proue. Le premier de ces moyens est extrêmement dangereux, comme on le fera voir dans les *Chapitres* suivants. Le second, quoiqu'il ne convienne pas aux Vaisseaux qui doivent éprouver, par la proue, le choc de coups de mer très-violents, comme on le verra plus loin, peut être appliqué avec succès dans d'autres Bâtiments, tels que les Galeres, les Chebecs, & autres Embarcations de cette espece. Pour nous en assurer, faisons $24400 = \frac{251,2.3316r}{3(3316-3r)}$, & nous trouverons $r = 240$, à fort peu près : c'est la valeur que devroit avoir r, au lieu de 294, pour que le Vaisseau pût marcher aussi vîte que le vent ; & attendu que les résistances sont comme les sinus des angles d'incidence, & ces sinus comme les longueurs du Vaisseau, tout le reste demeurant constant, il s'ensuit qu'en augmentant la longueur du Vaisseau dans la raison de 240 à 294, il pourra prendre une vîtesse égale à celle du vent ; & en lui donnant une longueur égale à 4 fois $\frac{1}{2}$ sa largeur, il en pourra prendre une qui surpasse celle du vent. Comme personne n'ignore qu'une Galere a une longueur de plus de sept fois sa largeur, & qu'en outre, sa proue est beaucoup plus fine à proportion, il s'ensuit qu'une Galere, ayant ses voiles bien orientées, marche plus vîte que le vent. Pour ne laisser aucun doute sur ce point, nous n'avons qu'à faire, dans la formule $\frac{251,2.Rr}{3(R-3r)}$, $r = 15$ & $R = 300$, qui sont les valeurs des résistances dans une Galere, & nous trouverons, à fort peu près, $\frac{251,2.Rr}{3(R-3r)} = 1477$; mais, dans une Galere, A^2 est tout au moins de 3000 : donc elle va beaucoup plus vîte que le vent. Dans un grand Chebec, $r = 60$, & $R = 700$; ce qui donne $\frac{251,2.Rr}{3(R-3r)} = 6763$; mais $A^2 = 9000$: donc ce Bâtiment va aussi beaucoup plus vîte que le vent. Au reste, il faut bien observer que tout ce que nous venons de dire ne peut avoir lieu qu'autant que les vents sont doux & modérés, & qu'ils permettent à ces Embarcations de porter toute leur voilure ; car aussi-tôt qu'on est obligé de ferrer des voiles, A^2 diminue, & l'équation ci-dessus ne peut plus avoir lieu. Il y a, dans les Vaisseaux, une autre circonstance qui s'oppose à ce qu'ils puissent jouir de cet avantage, c'est de ne pouvoir faire $\sin \beta = \frac{1}{2}$, ou $\beta = 30°$: car on a vu (275.) que, dans un Vaisseau, lorsque l'angle β est le moins ouvert, il est encore de 35°, & qu'il n'est pas possible de le faire plus petit. Dans les Galeres, les Chebecs, & en général dans tous les Bâtiments qui portent des voiles

latines, cet angle peut être beaucoup moindre que 30°, & en cela les voiles latines ont de l'avantage sur les voiles quarrées.

(349.) Les valeurs des angles γ & β, qu'on doit employer, présentent encore beaucoup de variétés & d'avantages; mais l'étendue de cet objet nous oblige à en réserver l'examen pour un autre *Chapitre*: nous nous bornerons, dans celui-ci, à comparer les formules à la pratique habituelle de la Marine, & nous en ferons voir la parfaite conformité.

(350.) En naviguant vent en poupe, on a $\gamma = 180°$; & comme (177.), $\beta = \frac{10}{23}(\gamma + 27°)$, & $\gamma = \alpha + \beta$, nous aurons $\beta = 90°$, & $\alpha = 90°$; ce qui (270.) donne $\delta = \frac{1}{2}(180°) - \alpha = 0$. Ces valeurs étant substituées dans l'expression de la vîtesse directe, elle deviendra $u = \frac{GA^2V}{GA^2 + 20r}$; c'est la vîtesse que prendra l'Embarcation en allant vent arriere. Supposons maintenant que le Vaisseau de 60 canons, navigue par un vent modéré, avec la misaine $= 2610$, le grand hunier $= 3640$, le grand perroquet $= 1500$, deux bonnettes de hune $= 2200$, & deux bonnettes basses $= 3000$, la somme des surfaces de ces voiles sera $= 12950 = A^2$. Substituant cette valeur avec celle de $r = 294$, & faisant $G = 1$, à cause qu'on suppose le vent modéré (280.), on aura la vîtesse u du Vaisseau $= \frac{12950\,V}{12950 + 5880} = \frac{12950\,V}{18830}$, ou, à peu près, $u = \frac{69}{100}V$. Si la vîtesse du vent étoit telle qu'il parcourût 10 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit $6\,\frac{9}{10}$ dans le même temps; vîtesse qui est équivalente à 4 milles $\frac{1}{5}$ par heure: & si le vent parcouroit 15 pieds par seconde le Vaisseau en parcourroit $10\,\frac{7}{20}$ dans le même temps; ce qui équivaut à 6 milles $\frac{1}{5}$ par heure. Le vent augmentant davantage de vîtesse, il est alors nécessaire de diminuer la valeur de G: supposons-la $= \frac{7}{8}$, on aura $u = \frac{\frac{7}{8}.12950\,V}{\frac{7}{8}.12950 + 5880} = \frac{11331\,V}{17211}$, ou, à peu près, $u = \frac{66}{100}V$; valeur qui est moindre que la précédente seulement de $\frac{3}{100}V$. Si donc, avec la même quantité de voiles, le vent parcouroit 20 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit $13\,\frac{1}{5}$ dans le même temps; ce qui équivaut à 7 milles $\frac{9}{10}$ par heure. Enfin, si l'on pouvoit porter la même voilure, le vent ayant une vîtesse de 25 pieds par seconde, le Vaisseau parcourroit 16 pieds $\frac{1}{2}$ dans le même temps; vîtesse équivalente à 9 milles $\frac{9}{10}$ par heure: mais c'est ce que l'on ne voit pas dans la pratique, & fournit une preuve évidente que lorsque le vent a une vîtesse de 25 pieds par seconde, il n'est pas possible que le

Vaiſſeau porte toutes ſes voiles. En conſervant ſeulement la miſaine & le grand hunier, la quantité A^2 ſe réduit à 6250; & par conſéquent u devient $= \frac{\frac{7}{8} \cdot 6250\, V}{\frac{7}{8} \cdot 6250 + 5880} = \frac{5469}{11349} V$, ou à peu près $u = \frac{48}{100} V$. Si donc le vent parcouroit 25 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau en parcourroit 12, ce qui eſt équivalent à 7 milles $\frac{1}{5}$ par heure; & ſi le vent parcouroit 30 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau en parcourroit 14 $\frac{2}{5}$, ce qui revient à 8 milles $\frac{64}{100}$ par heure. Prenant les trois ris dans le grand hunier, la ſurface de cette voile ſe réduit à 2280, & l'on a $A^2 = 4890$, par conſéquent u ſera $= \frac{\frac{7}{8} \cdot 4890\, V}{\frac{7}{8} \cdot 4890 + 5880} = \frac{4279}{10159} V$, ou à peu près $u = \frac{42}{100} V$. Si on ſuppoſe maintenant la vîteſſe du vent de 30 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau en parcourra 12 $\frac{3}{5}$ dans le même temps; ce qui eſt équivalent à 7 milles $\frac{56}{100}$ par heure: & ſi la vîteſſe du vent devenoit de 35 pieds, celle du Vaiſſeau ſeroit de 14 $\frac{7}{10}$; ce qui répond à 8 milles $\frac{82}{100}$ par heure. Enfin, le grand hunier étant ſerré, & la miſaine demeurant ſeule, on aura $A^2 = 2610$; par conſéquent $u = \frac{\frac{7}{8} \cdot 2610\, V}{\frac{7}{8} \cdot 2610 + 5880} = \frac{2284}{8164} V$, ou à peu près $u = \frac{28}{100} V$: ſi donc le vent parcouroit 40 pieds par ſeconde, le Navire en parcourroit 11 $\frac{1}{5}$ dans le même temps; ce qui répond à 6 milles $\frac{72}{100}$ par heure: ſi le vent parcourroit 50 pieds par ſeconde, le Navire en parcourroit 14 dans le même temps; ce qui répond à 8 milles $\frac{4}{5}$ par heure: enfin, ſi le vent parcouroit 60 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau en parcourroit 16 $\frac{4}{5}$; ce qui répond à 10 milles $\frac{8}{100}$ par heure: mais c'eſt ce qu'on ne verra que très-rarement; d'où l'on doit conclure qu'un vent dont la vîteſſe eſt de 60 pieds par ſeconde eſt un vent très-violent.

(351.) Dans la navigation vent largue, il y a différents cas eſſentiels à conſidérer; examinons d'abord celui dont il a été parlé à l'*Art.* 278, cas dans lequel ayant $\gamma = 134^{\circ}$, on a $\beta = 70^{\circ}$, & $\alpha = 64^{\circ}$. Avec un petit vent on a l'angle $\delta = 1^{\circ}\, 37'$, & avec un vent fort, le même angle devient $= 4^{\circ}\, 40' \frac{1}{4}$: dans le premier cas, $G = \frac{4}{5}$, & dans le ſecond $G = \frac{78}{100}$. Suppoſons maintenant que le Vaiſſeau navigue avec la grande voile $= 3520$, la miſaine $= 2610$, le grand hunier $= 3640$, le petit hunier $= 2860$, l'artimon $= 1300$, le perroquet de fougue $= 1720$, le grand perroquet $= 1500$, le petit perroquet $= 1130$, & le foc $= 1060$, la ſomme des ſurfaces de toutes ces voiles eſt $= 19340$: & en retranchant de cette ſomme la quantité 1660 pour tenir compte de

la partie de la misaine que couvre la grande voile, de celle que le grand hunier couvre du petit hunier, & le perroquet de fougue du grand hunier, après la soustraction il restera 17680 pour la valeur de A^2. Comme cet appareil répond au cas d'un petit vent, la valeur de δ correspondante, est $= 1^\circ\ 37'$, & celle de $G = \frac{4}{7}$: substituant donc ces valeurs dans la formule, avec celles de $r = 294$, & de $R = 3316$, on aura . . . .

$$u = \frac{\frac{4}{7}.\ 17680.\ 3316.\ V \sin(68^\circ\ 23')\sin 64^\circ}{\frac{4}{7}.17680.3316 \sin 70^\circ.\sin(68^\circ 23') + \frac{4}{7}.17680.294.\cos 70^\circ.\cos(68^\circ 23') + 20.3316.294}$$

$= \frac{3919}{6100} V$; ou à peu près $u = \frac{64}{100} V$. Si le vent avoit une vîtesse 10 pieds par seconde, le Vaisseau en prendroit une de 6 pieds $\frac{3}{7}$ dans le même temps; ce qui équivaut à 3 milles $\frac{84}{100}$ par heure; & s'il avoit une vîtesse de 15 pieds, le Vaisseau en prendroit une de 9 pieds $\frac{3}{7}$, ce qui répond à 5 milles $\frac{76}{100}$ par heure. Le vent augmentant de vîtesse, nous devons faire $\delta = 4^\circ\ 40'$, & $G = \frac{78}{100}$; en conséquence, u sera

$$= \frac{\frac{78}{100}.\ 17680.\ 3316.\ V \sin(65^\circ\ 20')\sin 64^\circ}{\frac{78}{100}.\ 17680.3316.\sin 70^\circ.\sin(65^\circ 20') + \frac{78}{100}.17680.294 \cos 70^\circ.\cos(65^\circ 20') + 20.3316.294}$$

$= \frac{3735}{5913} V$, ou, à peu près, $u = \frac{63\frac{1}{6}}{100} V$; quantité qui est seulement moindre que la précédente de $\frac{1}{120} V$: ainsi on peut négliger cette différence, comme étant petite. Si donc le vent parcouroit 20 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit 12 $\frac{64}{100}$ dans le même temps; ce qui répond à 7 milles $\frac{58}{100}$ par heure; & si la vîtesse du vent étoit de 25 pieds par seconde, le Navire parcourroit 15 pieds $\frac{4}{7}$ dans le même temps; ce qui répond à 9 milles $\frac{48}{100}$ par heure. Le vent augmentant davantage, il est nécessaire de serrer les deux perroquets & le foc, dont les surfaces réunies montent à 3690 pieds quarrés; ainsi il restera $A^2 = 13990$, & l'on aura $u =$ . . . .

$$\frac{\frac{78}{100}.\ 13990.\ 3316.\ V \sin(65^\circ\ 20')\sin 64^\circ}{\frac{78}{100}.\ 13990.3316.\sin 70^\circ.\sin(65^\circ 20') + \frac{78}{100}.\ 13990.294.\cos 70^\circ.\sin(65^\circ 20') + 20.3316.294},$$

ou, à peu près, $u = \frac{57}{100} V$. Si donc le vent parcouroit 25 pieds par seconde, le Navire en parcourroit 14 $\frac{1}{4}$; ce qui donne 8 milles $\frac{51}{100}$ par heure; & si le vent parcouroit 30 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit 17 $\frac{1}{10}$; ce qui répond à 10 milles $\frac{26}{100}$ par heure. Le perroquet de fougue étant serré, & prenant les trois ris dans les huniers, A^2 devient $= 9950$, & $u =$ . . . .

$$\frac{\frac{78}{100}.\ 9950.\ 3316.\ V \sin(65^\circ\ 20')\sin 64^\circ}{\frac{78}{100}.\ 9950.\ 3316.\sin 70^\circ.\sin(65^\circ 20') + \frac{78}{100}.9950.294.\cos 70^\circ.\cos(65^\circ 20') + 20.3316.294}$$

ou, à fort peu près, $= \frac{50}{100} V$. Si donc le vent parcouroit 35 pieds

par seconde, le Navire en parcourroit $17\frac{1}{2}$; ce qui répond à 10 milles $\frac{1}{2}$ par heure; & s'il pouvoit porter la même quantité de voiles, le vent ayant une vîtesse de 40 pieds par seconde, le Vaisseau en prendroit une de 20 pieds; ce qui revient à 12 milles par heure. Portant seulement les deux basses voiles, on aura $A^2 = 5200$, ayant déduit 930 de la somme de leurs surfaces pour la quantité dont la grande voile couvre la misaine, & la vitesse u sera =

$$\frac{\frac{78}{100}.5200.3316.V \sin(65^\circ 20') \sin 64^\circ}{\frac{78}{100}.5200.3316.\sin 70^\circ.\sin(65^\circ 20') + \frac{78}{100}.5200.294.\cos 70^\circ.\cos(65^\circ.20') + 20.3316.294},$$

$= \frac{35}{100} V$, à fort peu près. Si donc le vent parcouroit 40 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit 14; ce qui équivaut à 8 milles $\frac{2}{5}$ par heure; & si le vent parcouroit 50 pieds, le Vaisseau en parcourroit $17\frac{1}{2}$; ce qui répond à 10 milles $\frac{1}{2}$ par heure.

(352.) Dans la navigation à la bouline, on a (275.), $\gamma = 65^\circ$, $\alpha = 25^\circ$, & $\beta = 40^\circ$: avec un petit vent on a de plus $\delta = 8^\circ\, 10'\frac{1}{4}$, & avec un vent fort, $\delta = 20^\circ\, 3'\frac{1}{4}$: dans le premier cas, $G = \frac{\sin \frac{1}{2}(53^\circ\, 19'\frac{1}{4})}{Arc \frac{1}{2}(53^\circ\, 19'\frac{1}{4})} = \frac{96}{100}$; & dans le second, $G = \frac{\sin \frac{1}{2}(87^\circ\, 52'\frac{1}{2})}{Arc \frac{1}{2}(87^\circ\, 52'\frac{1}{2})} = \frac{90}{100}$. Supposant que le Vaisseau navigue avec la grande voile = 3520, la misaine = 2610, le grand hunier = 3640, le petit hunier = 2860, l'artimon = 1300, le perroquet de fougue = 1720, le grand perroquet = 1500, le petit perroquet = 1130, le foc = 1060, le faux foc = 410, la grande voile d'étai, la voile d'étai de hune, & la contre voile d'étai = 2110, les voiles d'étai d'artimon, du perroquet de fougue & du grand perroquet = 1200; la somme des surfaces de toutes ces voiles sera = 23050 = A^2. Cette valeur de A^2 étant substituée dans la formule avec celle de $G = \frac{96}{100}$, & de $\delta = 8^\circ\, 20'$, à cause qu'on suppose le vent modéré, & y substituant aussi les autres valeurs qu'on a déjà trouvées, on aura $u = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{96}{100}.23050.3316.V\sin(31^\circ 40')\sin 25^\circ.}{\frac{96}{100}.23050.3316.\sin 40^\circ.\sin(31^\circ 40') + \frac{96}{100}.23050.294\cos 40^\circ.\cos(31^\circ 40') + 20.3316.294}$$

$= \frac{1628}{4850} V$, ou $u = \frac{355}{1000} V$, à fort peu près. Il suit de là que, si le vent parcouroit 10 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit $3\frac{55}{100}$ dans le même temps; ce qui revient à 2 milles $\frac{1}{10}$ par heure: & si le vent parcouroit 15 pieds, le Vaisseau en parcourroit $5\frac{1}{3}$; ce qui répond à 3 milles $\frac{2}{10}$ par heure.

Le vent venant à augmenter, le Vaisseau ne peut plus porter toute sa voilure; il est alors nécessaire de serrer les petites voiles, de diminuer également la quantité G, & d'augmenter δ. Supposons $G = \frac{92}{100}$, $\delta = 15^\circ$, & qu'on retranche les perroquets, les voiles d'étai

d'étai d'artimon, de perroquet de fougue, la contre-voile d'étai & la voile d'étai de grand perroquet, & qu'on prenne, de plus, un ris dans les huniers; la quantité A^2 deviendra, par ces suppositions, = 17765, & u sera = ...

$$\frac{\frac{93}{100} . 17765 . 3316 V \sin 25^\circ . \sin 25^\circ}{\frac{93}{100} . 17765 . 3316 \sin 40^\circ . \sin 25^\circ + \frac{93}{100} . 17765 . 294 \cos 40^\circ . \cos 25^\circ + 20 . 3316 . 294}$$

$= \frac{9785}{37753} V = \frac{26}{100} V$, à très-peu près. Si le vent parcouroit 20 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit $5 \frac{1}{5}$; ce qui équivaut à 3 milles $\frac{12}{100}$ par heure: & si le vent parcouroit 25 pieds, le Vaisseau en parcourroit $6 \frac{1}{4}$; ce qui équivaut à 3 milles $\frac{9}{10}$ par heure.

Le vent augmentant davantage, on fera $G = \frac{9}{10}$, $\delta = 21^\circ$; & le Vaisseau ne portant plus que les deux basses voiles, les huniers avec les trois ris pris, l'artimon, & le faux foc; on aura $A^2 = 11900$; & $u =$

$$\frac{\frac{9}{10} . 11900 . 3316 . V \sin 19^\circ . \sin 25^\circ}{\frac{9}{10} . 11900 . 3316 . \sin 40^\circ . \sin 19^\circ + \frac{9}{10} . 11900 . 294 . \cos 40^\circ . \cos 19^\circ + 20 . 3316 . 294}$$

$= \frac{489}{2874} V$, ou, à près, $u = \frac{17}{100} V$. Si donc le vent parcouroit 35 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit $5 \frac{21}{100}$; ce qui équivaut à 3 milles $\frac{17}{100}$ par heure; & si le vent en parcouroit 40, le Vaisseau en parcourroit $6 \frac{4}{5}$, qui répondent à 4 milles $\frac{8}{100}$ par heure. Restant sous les deux basses voiles, on a $A^2 = 6130$ (280.); ce qui donne $u = \frac{103}{1000} V$: donc si le vent parcouroit, comme ci-dessus, 40 pieds par seconde, le Vaisseau en parcouroit $4 \frac{12}{100}$, qui équivalent à 2 milles $\frac{1}{4}$ par heure (*a*).

(*a*) Les vîtesses réelles du vent ne peuvent être fort éloignées de celles que nous assignons: ce qui étoit cependant nécessaire pour soutenir l'ancien systême des résistances. M. *Mariotte* (*Traité du Mouvement des Eaux*, *Part.* 1, *Disc.* 3) assure avoir mesuré la vîtesse du vent, & dit: que le vent qui parcourt 24 pieds par seconde, est déjà suffisamment violent; de sorte que ce n'est pas sans peine qu'on marche contre sa direction. M. *Clare*, de la Société Royale de Londres (*The Motion of Fluids*, *page* 261), dit la même chose, même en parlant du pied Anglais. M. *Derham*, de la même Société, qui a fait aussi diverses expériences sur ce sujet, dit (*Philos. Transac. N°.* 313) qu'un vent qui parcourt 66 pieds Anglais par seconde, est une tempête violente; & s'il en parcourt davantage, c'est un ouragan. Pour vérifier ces assertions, j'ai fait moi-même, accompagné de quelques Officiers, différentes expériences à *Cadix*, en jettant en l'air des plumes très-légeres, & les abandonnant au vent; & j'ai observé, dans beaucoup d'occasions, la même chose que M. *Mariotte*. J'ai constamment trouvé que le vent, qui parcourt 20 pieds Anglais par seconde, est un vent déjà assez fort, & qu'avec un tel vent les Navires, allant à la bouline, peuvent à peine porter leurs huniers entiérement hauts. J'en voyois cependant, dans le même temps, entrer & sortir de la Baie; mais ils étoient alors à l'abri de la mer, sans cela, ils auroient été forcés de diminuer leurs huniers, en prenant des ris. Les Barques qui passent *del Puerto* à *Cadix*, ne se hasardent pas à sortir lorsque le vent souffle avec cette vîtesse; c'est un fait que j'ai toujours observé. Cette vîtesse de 20 pieds Anglais par seconde, est donc trop forte pour ces Embarcations; & la vîtesse qu'elles prennent dans leur navigation, doit être produite par des

(353.) Nous pouvons nous dispenser pour le présent de chercher la vîtesse latérale v, & même la vîtesse oblique w, à cause que

---

vents plus modérés. Suivant ce que j'ai observé journellement dans cette Ville, la vîtesse ordinaire des brises d'été est de 10 à 15 pieds Anglais par seconde.

M. *Bouguer*, dans le *Liv. III*, *Sect. II*, *Chap. I*, de son *Traité du Navire*, cherche la relation entre les vîtesses du vent, & celles que prend le Vaisseau, d'après la supposition que les résistances des fluides suivent la loi reçue jusqu'à présent des Géométres; & il trouve que dans le cas où l'on va vent arriere, ou vent largue, $u = \frac{100}{336} V$; c'est-à-dire, que la vîtesse du Vaisseau n'est pas même le tiers de celle du vent; & cela en supposant même le Vaisseau des meilleurs voiliers Le calcul ne donne cependant encore ce résultat qu'en supposant la densité de l'eau seulement 576 fois plus grande que celle de l'air : car en la supposant 1100 fois plus grande, il en résulte $u = \frac{100}{419} V$; c'est-à-dire, que la vîtesse que peut prendre le Navire n'est pas même le quart de celle du vent. Si nous supposons donc le rapport des densités de l'air & de l'eau, tel que nous l'avons employé dans notre calcul, afin de le comparer avec celui de M. *Bouguer*, il en résulte, à fort peu près, $u = \frac{1}{4} V$; vîtesse équivalente à $\frac{3}{10} V$ milles par heure *. Supposons maintenant que ce Vaisseau, étant aussi bon voilier qu'il est possible, fasse 10 milles par heure avec un vent largue, ce qui est une marche fort ordinaire, parce que des Vaisseaux de cette espece en font jusqu'à 11, & même davantage; & nous aurons $\frac{3}{10} V = 10$: ce qui donne $V = \frac{100}{3} = 66,6$, de sorte que, pour que le Vaisseau fasse 10 milles par heure, il faut que le vent parcoure 66,6 pieds par seconde; c'est-à-dire, qu'il faut un ouragan, comme l'assure M. *Derham*; conséquence opposée à toutes les expériences, & même dans ce cas il est bon d'observer que le Vaisseau est supposé ne porter rien moins que 15474 pieds Français quarrés de voilure, lesquels répondent à 17500 pieds Anglais : or, il est absolument impossible qu'il pût porter cette quantité de voiles avec un vent aussi violent.

Outre les expériences dont je viens de parler, j'en ai encore fait d'autres, dans la vue d'en comparer les résultats avec la marche des Bâtiments. Tandis qu'on mesuroit à terre la vîtesse du vent, laquelle se trouvoit de 10 pieds ½ à 11 pieds par seconde, un Canot avec ses deux voiles, & naviguant vent largue, employa 30 minutes à aller depuis la jettée de *Cadix*, jusqu'à se mettre par le travers du Château de *Sainte Catherine del Puerto*. Cette distance prise sur un plan exact de la Baie, est de 16600 pieds Anglais : ce qui donne 9 pieds $\frac{2}{9}$ pour la quantité dont le Canot avançoit par seconde : c'est-à-dire, que la vîtesse du Canot étoit à celle du vent, à peu près, comme 21 est à 25, ou comme 21 est à 23 : rapport bien éloigné de celui qui résulte de l'ancien systéme; mais qui est très-conforme à la théorie que nous suivons maintenant. On peut au reste répéter cette même expérience tous les jours. De *Cadix al Puerto*, il y a 5 milles, & les Barques font journellement ce trajet en 3 & 5 quarts d'heure, avec un vent qui parcourt 10 à 15 pieds par seconde. La vîtesse que prennent ces Barques répond donc à 6 pieds $\frac{2}{3}$, ou 11 pieds $\frac{1}{9}$ par seconde, & est les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{20}{27}$ de celle du vent; rapport qui est de même bien éloigné de celui que donne l'ancien systéme. La formule qui détermine la vîtesse du Navire d'après ce systême, se trouve dans l'*Article* 13 des *Œuvres Posthumes* de *Jacques Bernoulli*. Ce Géométre est le premier qui ait observé que la vitesse du vent n'est pas infinie à l'égard de celle du Vaisseau : observation vraiment importante, & que beaucoup d'autres Géometres après lui n'ont pas admise, malgré son utilité. Comme cet Auteur suppose que le vent frappe toujours la voile perpendiculairement; nous pouvons donner ici la formule générale par les principes que nous avons déjà établis.

Nous avons trouvé (338.) que la vîtesse perpendiculaire du vent est $= V \sin a -$

---

* On évalue ici le mille à 6000 pieds Anglais; mais suivant les mesures prises à l'équateur & au cercle polaire, il est un peu plus grand.

le calcul, pour l'une & l'autre, differe très-peu de celui que nous avons fait pour la vîtesse directe. Pour avoir l'une & l'autre de ces

---

$u\sin\beta - v\cos\beta$: or, selon l'ancienne théorie, la force perpendiculaire à la voile est comme son aire A^2, multipliée par le quarré de la vitesse, c'est-à-dire, par $(V\sin\alpha - u\sin\beta - v\cos\beta)^2$, & par la densité de l'air, qui (258.) est $= \frac{m}{1030}$: cette force sera donc comme $\frac{mA^2}{1030}(V\sin\alpha - u\sin\beta - v\cos\beta)^2$; & la force dans la direction directe comme $\frac{mA^2\sin\beta}{1030}(V\sin\alpha - u\sin\beta - v\cos\beta)^2$. Mais si a^2 désigne la surface plane qui, étant mue perpendiculairement, éprouveroit la même résistance que la proue, la force ou résistance de cette surface, ou de la proue, sera, selon le même systême, $= ma^2u^2$: donc, dans la plus grande marche du Vaisseau, c'est-à-dire, lorsque sa vîtesse est parvenue à l'uniformité, on aura $\frac{mA^2\sin\beta}{1030}(V\sin\alpha - u\sin\beta - v\cos\beta)^2 = ma^2u^2$. Par la même raison, si a^2 exprime la surface plane qui, mue perpendiculairement, éprouveroit autant de résistance que le côté du Vaisseau, on aura $\frac{mA^2\cos\beta}{1030}(V\sin\alpha - u\sin\beta - v\cos\beta)^2 = m\mathrm{a}^2v^2$: de la premiere équation on tire $V\sin\alpha - u\sin\beta - \frac{(1030)^{\frac{1}{2}}au}{A\sin\beta^{\frac{1}{2}}} = v\cos\beta$; cette valeur étant substituée dans la seconde, la réduit à $\frac{a^2u^2\cos\beta}{\sin\beta} = \mathrm{a}^2v^2 = \frac{\mathrm{a}^2}{\cos\beta^2}\left(V\sin\alpha - u\sin\beta - \frac{(1030)^{\frac{1}{2}}au}{A\sin\beta^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, ce qui donne $u = \frac{A\mathrm{a}V\sin\alpha.\sin\beta^{\frac{1}{2}}}{A(\mathrm{a}\sin\beta^{\frac{3}{2}} + a\cos\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}}a\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}v\sin\beta^{\frac{1}{2}}}{a\cos\beta^{\frac{1}{2}}}$: & par conséquent $v = \frac{AaV\sin\alpha.\cos\beta^{\frac{1}{2}}}{A(\mathrm{a}\sin\beta^{\frac{3}{2}} + a\cos\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}}\mathrm{a}a}$: & la vîtesse oblique $w =$ $\frac{AV\sin\alpha(\mathrm{a}^2\sin\beta + a^2\cos\beta)^{\frac{1}{2}}}{A(\mathrm{a}\sin\beta^{\frac{3}{2}} + a\cos\beta^{\frac{3}{2}}) + (1030)^{\frac{1}{2}}\mathrm{a}a}$.

L'aire du maître couple du Vaisseau de 60 canons qui nous a servi d'exemple; c'est-à-dire, l'aire de la partie qui est submergée dans le fluide, est à peu près de 620 pieds quarrés; & supposant que ce Vaisseau soit un voilier de l'espece moyenne, nous devons prendre a^2 entre un septieme & un huitieme de 620, ou faire $a^2 = 81$, ce qui donne $a = 9$. La résistance du côté du Navire étant à peu de chose près onze fois plus grande que celle de la proue, on aura $\mathrm{a}^2 = 900$, & $\mathrm{a} = 30$. En outre, la racine de 1030, est, sans erreur sensible, $= 32$: donc, en substituant ces valeurs, on aura, pour le Vaisseau de 60 canons, $u = \frac{30AV\sin\alpha.\sin\beta^{\frac{1}{2}}}{A(30\sin\beta^{\frac{3}{2}} + 9\cos\beta^{\frac{3}{2}}) + 8640}$. Dans le cas où l'on navigue vent en poupe, on a $\sin\alpha = 1$, $\sin\beta = 1$, & $\cos\beta = 0$: donc u deviendra $= \ldots$: $\frac{30AV}{30A + 8640} = \frac{AV}{A + 288}$. Si nous faisons maintenant (350.), $A^2 = 12950$, ce qui est la quantité de voile correspondante à un petit vent, & supposant $G = 1$, ou la voile plane, comme on le peut faire dans cette circonstance, on aura, à peu près, $A = 114$; ce qui donne $u = \frac{114V}{402}$, ou, à peu près, $u = \frac{28}{100}V$; d'où l'on voit que la vîtesse du Vaisseau ne sera que très-peu plus de la quatrieme partie de celle du vent. Si le vent parcouroit 10 pieds par seconde, le Vaisseau en parcourroit 2 $\frac{4}{9}$, ce qui est équivalent à 1 mille $\frac{47}{100}$ par heure; & s'il parcouroit 15 pieds, le Vaisseau en parcourroit 4 $\frac{1}{5}$, ce qui répond à 2 milles $\frac{12}{100}$ par heure. Le vent venant à augmenter, G diminue, & nous pouvons supposer $u = \frac{1}{4}V$; mais on sçait, par des expériences répétées, qu'un Vaisseau portant toutes ses voiles, fait 6 à 7 milles par heure, ce qui est une vîtesse de 10 à 13 pieds par seconde:

deux vîtesses, il suffit de trouver la valeur de l'angle θ de la dérive, au moyen de l'équation $tang\,\theta = \frac{r}{R\, tang\,(\beta - \delta)}$, qu'on a donnée à l'*Art.* 340. Lorsqu'on navigue vent arriere, cet angle est zéro; & vent largue, il peut être négligé, lorsque l'angle β est grand. Le Vaisseau naviguant à la bouline, on a $\beta = 40^\circ$, & avec un petit vent, $\delta = 8^\circ\, 20'$: donc, dans le Vaisseau de 60 canons, on aura $tang\,\theta = \frac{294}{3316\, tang\,(31^\circ 40')}$ $= 0,1442$, ou $\theta = 8^\circ\, 12' \frac{1}{4}$. Avec un vent fort, $\delta = 21^\circ$; donc on aura $tang\,\theta = \frac{294}{3316\, tang\, 19^\circ} = 0,25758$, ou $\theta = 14^\circ\, 27' \frac{1}{3}$: bien entendu que nous faisons ici abstraction des coups de mer, dont l'effet est d'augmenter beaucoup ces angles, particuliérement le dernier, parce que c'est par un vent fort que la mer devient grosse; &, dans ces circonstances, l'angle θ a coutume d'augmenter jusqu'à 50 ou 60 degrés. C'est cet effet, que la pratique manifeste journellement, qui a porté un Géometre à censurer sans motif, & à regarder comme mauvaise la disposition qu'un Navigateur avoit donnée à la voilure de son Navire *.

(354.) D'un autre côté, les Marins n'ayant pas une connoissance parfaite des causes qui peuvent faire varier l'angle de la dérive, se sont imaginés que les voiles hautes sont plus propres que les basses, pour tenir le Vaisseau au vent; car on observe effectivement qu'il en arrive ainsi: mais on vient de voir clairement dans l'*Article* précédent que les basses voiles étant les seules qu'un vent violent per-

---

donc on devroit avoir $12 = \frac{1}{4} V$; & par conséquent $V = 48$ pieds: ainsi la vîtesse que devroit avoir le vent pour donner une semblable vitesse au Vaisseau, devroit être de 48 pieds par seconde; ce qui contredit toutes les expériences. Le Vaisseau demeurant seulement sous la misaine, on a $A^2 = 2610$, & $A = 51$: ce qui donne $u = \frac{51\, V}{51 + 288} = \frac{51}{339} V$; mais avec cette voile le Vaisseau fait communément 9 milles par heure, on a donc $u = 15 = \frac{51}{339} V$: donc $V = 100$, à peu près; vitesse d'un ouragan terrible, qui, certainement, ne permettroit pas de porter la misaine. Le Vaisseau naviguant à la bouline avec toutes ses voiles, on a $A^2 = 23050$, $\alpha = 25^\circ$, & $\beta = 40^\circ$; ainsi l'on aura $u = \frac{131}{1000} V$; de sorte que la vîtesse du vent étant même de 20 pieds par seconde, le Vaisseau ne feroit qu'un peu plus d'un mille & demi par heure.

* C'est sans doute de M. *Pitot* que l'Auteur veut parler; car il prétend, *page* 64 de sa *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, que le Capitaine *Cowley* n'avoit pas bien disposé ses voiles dans la circonstance qu'il cité, à cause qu'il y avoit 22° 30' de *dérive*. Les réflexions de cet Académicien ne nous paroissent absolument pas fondées. Nous croyons même qu'il y avoit alors 33° 45' de dérive, & que M. *Pitot* à pris l'expression du traducteur, *Nord-quart-à l'Ouest* pour le *Nord-Nord-Ouest*; mais il est à présumer que c'est le *Nord quart Nord-Ouest*, que les Anglais appellent le *North by West*: car on trouve cette faute dans presque toutes les traductions des Voyageurs Anglais, qui ont été faites par des hommes qui n'entendoient pas la Marine. Au reste, nous n'avons pas l'original Anglais pour vérifier ce passage.

mette de porter, l'effet observé vient seulement de la plus grande violence du vent, ou de la plus grande courbure que les voiles ont dans cette circonstance, & non de leur situation particuliere en hauteur. On peut ajouter à cela, que les basses voiles, comme plus larges, sont plus susceptibles que les hautes de prendre une grande courbure (267), d'où s'ensuit, par conséquent, une plus grande valeur de δ.

(355.) La vîtesse avec laquelle le Vaisseau gagne au vent, est (342.), $W = \frac{GA^2 V \sin\alpha\, (R \cos\gamma . \sin(\beta-\delta) - r \sin\gamma . \cos(\beta-\delta))}{GA^2 R \sin\beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos\beta . \cos(\beta-\delta) + 20Rr}$; & de cette même équation, nous avons déduit (347.) que, pour que le Vaisseau puisse gagner au vent, il est nécessaire d'avoir $tang\,(\beta-\delta) > \frac{r}{R}\ tang\,\gamma$ Mais on a (275 & 352.), $\gamma = 65°$: donc, pour qu'on puisse gagner au vent, dans la pratique ordinaire des Marins, il est nécessaire d'avoir $tang\,(\beta-\delta) > 0{,}18712$, ou $\beta-\delta > 10°\ 19'$. Lorsque le vent est violent, on a $\delta = 21°$, & faisant $\beta = 40°$, il vient $\beta-\delta = 19°$: donc, même avec un vent fort, le Vaisseau devroit gagner au vent, suivant la pratique des Marins; & cela auroit lieu, en effet, si ce n'étoient les coups de mer, qui l'obligent à perdre beaucoup plus qu'il ne gagne. En substituant dans la valeur de W les valeurs trouvées (352.), nous aurions bien la vîtesse avec laquelle il s'éleve au vent; mais nous pouvons déduire cette vîtesse beaucoup plus facilement, en faisant attention que les formules donnent $u : W :: R \sin(\beta-\delta) : R \cos\gamma . \sin(\beta-\delta) - r \sin\gamma . \cos(\beta-\delta)$; ainsi, l'on aura $W = \frac{u(R \cos\gamma . \sin(\beta-\delta) - r \sin\gamma . \cos(\beta-\delta))}{R \sin(\beta-\delta).} = u\left(\cos\gamma - \frac{r \sin\gamma}{R\, tang(\beta-\delta)}\right)$. Faisant donc, pour le Vaisseau de 60 canons, $\gamma = 65°$; $\beta = 40°$; $r = 294$; & $R = 33162$, on aura $W = u\left(0{,}4226 - \frac{0{,}0834}{tang(40°-\delta)}\right)$. Dans le cas d'un petit vent, le Vaisseau portant toutes ses voiles, nous avons trouvé (352.), $u = \frac{335}{1000} V$, & $\delta = 8°\ 20$: donc on aura $W = \frac{335}{1000} V \left(0{,}4226 - \frac{0{,}0834}{tang\,(31°\ 40')}\right) = \frac{96279}{1000000} V$, ou, à peu près, $u = \frac{96}{1000} V$. Si donc le vent parcouroit 10 pieds par seconde, le Vaisseau s'éleveroit dans le vent avec uue vîtesse de $\frac{96}{100}$ de pied; ce qui revient à $\frac{176}{1000}$ d'un mille par heure : de sorte que, pendant 5 heures, le Vaisseau s'éleveroit dans le vent de 2 milles $\frac{88}{100}$: & si le vent parcouroit 15 pieds par seconde, le Vaisseau s'éleveroit dans le vent, pendant les mêmes 5 heures, de 4 milles $\frac{32}{100}$. Dans le cas où nous avons supposé la voilure réduite à 17765 pieds quarrés, & où nous avons supposé de plus (352.), $\delta = 15°$, on aura $W = u\left(0{,}4226 - \frac{0{,}0834}{tang\ 25°}\right)$; ou parce qu'on a trouvé, pour ce cas, $u = \frac{26}{100} V$, on aura $W =$

$\frac{26}{100} V(0,4226 - 0,1789) = \frac{63362}{1000000} V$. Si donc le vent parcouroit 20 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau gagneroit au vent avec une vîteſſe de 1 pied $\frac{267}{1000}$; ce qui répond à $\frac{76}{100}$ de mille par heure; de ſorte que, dans 5 heures, il gagneroit au vent de 3 milles $\frac{4}{5}$. Si la vîteſſe du vent étoit de 25 pieds, le Vaiſſeau gagneroit au vent 4 milles $\frac{3}{4}$ dans le même temps de 5 heures. Enfin, dans le dernier cas où il reſteroit ſeulement 11900 pieds de voilure, δ étant $= 21^\circ$, on a trouvé $u = \frac{17}{100} V$: donc on aura $W = \frac{17}{100} V \left(0,4226 - \frac{0,0834}{tang\ 19^\circ}\right) = \frac{30668}{1000000} V$. Dans ce cas, ſi la vîteſſe du vent étoit de 35 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau s'éleveroit au vent avec une vîteſſe de 1 pied $\frac{17}{1000}$, ce qui répond à $\frac{644}{1000}$ de mille par heure; de ſorte que, dans 5 heures, il gagneroit au vent 3 milles $\frac{22}{100}$: & ſi le vent parcouroit 40 pieds, le Vaiſſeau s'éleveroit au vent, dans le même temps, de 3 milles $\frac{68}{100}$; bien entendu que, dans tout ceci, on fait abſtraction des coups de mer qui, dans ces derniers cas, produiſent un effet très-conſidérable : on n'a pas non plus égard à l'impulſion, ou à la force avec laquelle le vent agit ſur le corps du Vaiſſeau, ſur ſa mâture & ſes agrès, action qui ne laiſſe pas de produire une perte de vîteſſe aſſez ſenſible *.

(356.) Nous avons dit dans l'*Art.* 347, que plus le rapport $\frac{R}{r}$ eſt grand, plus la vîteſſe directe u eſt grande : mais, malgré la légitimité de cette conſéquence, elle doit cependant être limitée au cas où il s'agit de la comparaiſon de différents Vaiſſeaux, dans leſquels ce rapport varie beaucoup : mais il n'en eſt pas de même lorſque ce rapport varie ſeulement par la quantité plus ou moins grande dont le Vaiſſeau s'enfonce dans l'eau. Pour ſe convaincre de cette vérité, il ſuffit de faire attention que, lorſque le Vaiſſeau eſt moins ſubmergé, le rapport $\frac{R}{r}$ eſt plus grand que lorſqu'il l'eſt davantage; car, dans le Vaiſſeau de 60 canons, ſuppoſé calé de 6 pouces de moins, nous avons trouvé (185.), $\frac{R}{r} = \frac{3198}{282}$, au lieu de $\frac{3316}{294}$, que nous avons employé ci-devant. Cependant, ſi l'on ſubſtitue cette derniere valeur, dans le cas où le Vaiſſeau navigue à la bouline avec toutes ſes voiles, on trouvera ſeulement $\frac{1}{100}$ d'augmentation dans la valeur de u; ce qui répond à $\frac{1}{1000}$ de mille par heure; quantité abſolument inſenſible dans la pratique, & de laquelle même on doit perdre beaucoup, par la plus grande inclinaiſon que prendra le Vaiſſeau; ce qui lui fait ſubmerger ſous le vent des parties plus renflées, &

---

* C'eſt ce que les Marins Eſpagnols appellent la *Ventola*. Je ne ſçache pas que les François aient un mot pour exprimer cette action.

d'une plus grande capacité, d'où il doit résulter une plus grande valeur pour r.

(357.) Si l'on réduit en série la valeur de la vîtesse directe u, on aura $u = \frac{V \sin \alpha}{\sin \beta}\left(1 - \frac{r(A^2 \cos \beta . \cos(\beta - \delta) + 20 R)}{A^2 R \sin \beta \sin(\beta - \delta)} + \frac{r^2 (A^2 \cos \beta . \cos(\beta - \delta) + 20 R)^2}{(A^2 R \sin \beta . \sin \beta(-\delta))^2} - \&c.\right)$*
D'où l'on voit que cette vîtesse augmente non seulement par la diminution du rapport $\frac{r}{R}$, mais aussi, par la diminution des quantités r & R, lors même qu'elles diminuent l'une & l'autre dans la même raison, & cela doit être effectivement, puisque la valeur $\frac{20 r R}{A^2 R \sin \beta . \sin (\beta - \delta)} = \frac{20 r}{A^2 \sin \beta . \sin (\beta - \delta)}$ diminue toujours.

(358.) Les quantités qui composent cette série, peuvent nous servir aussi pour examiner & fixer les rapports dans lesquels devroient être les principales dimensions du Vaisseau, comme la longueur, la largeur & le creux, pour qu'il pût prendre la plus grande marche qu'il est possible, en supposant la capacité de sa carene constante, ou, ce qui est la même chose, en supposant que l'une des dimensions diminuant, l'autre augmente dans la même raison. Pour cela, soit e la longueur, m la largeur, & p le creux du Vaisseau; faisant attention que la résistance qu'éprouvent les petits quadrilateres dans lesquels on a divisé la surface de la carene, est (176.) comme leur largeur multipliée par leur hauteur, par la racine quarrée de la profondeur à laquelle ils sont submergés, & par le sinus de l'angle d'incidence, cette résistance sera comme $m . p . p^{\frac{1}{2}} . \frac{m}{\sqrt{e^2 + m^2}}$** $= \frac{m^2 . p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2 + m^2}}$ pour la proue; & comme $e . p . p^{\frac{1}{2}} . \frac{e}{\sqrt{e^2 + m^2}} = \frac{e^2 p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2 + m^2}}$ pour le côté. Ainsi, nous aurons $\frac{r m^2 p^{\frac{3}{2}}}{h \sqrt{e^2 + m^2}}$, pour l'expression de la nouvelle résistance de la proue, lorsque les dimensions du Navire ont éprouvé le changement dont il s'agit; r exprimant la résistance avant le changement, & h étant l'expression de ce qu'étoit la quantité $\frac{m^2 p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2 + m^2}}$, aussi avant ce changement, c'est-à-dire, lorsqu'elle étoit formée sur les dimensions primitives. On aura pareillement $\frac{R e^2 p^{\frac{3}{2}}}{H \sqrt{e^2 + m^2}}$ pour l'expres-

* C'est l'expression de l'*Article* 339 que l'Auteur réduit en série; mais il suppose tacitement $G = 1$, c'est-à-dire, que le vent est modéré, ou que les voiles sont planes.

** Voyez *Tome I*, *Article* 632, & combinez cet *Article* avec la doctrine du *Chapitre V*, *Livre I*, *Tome II*, *Article* 65, & suivants; vous verrez que l'expression du sinus d'incidence est telle que l'Auteur la donne ici, en substituant en place des différencielles, les quantités finies auxquelles elles sont proportionnelles, & qui en sont les intégrales: ainsi, cette expression ne peut manquer d'être proportionnelle à la résistance.

ſion de la nouvelle réſiſtance latérale. Ces quantités ſubſtituées en place de r & R dans le ſecond terme de la ſérie, c'eſt-à-dire, dans

$$\frac{r.(A^2 \cos\beta \cos(\beta-\delta)+20R)}{A_2 R \sin\beta . \sin(\beta-\delta)}$$, ce terme deviendra $$\frac{\frac{rm^2}{h}\left(A^2 \cos\beta.\cos(\beta-\delta)+\frac{20Re^2p^{\frac{3}{2}}}{H\sqrt{e^2+m^2}}\right)}{\frac{A^2Re^2}{H}\sin\beta.\sin(\beta-\delta)}:$$

Suppoſant, avec les Marins, que les dimenſions de la voilure ſuivent la raiſon des largeurs des Navires, il faut ſubſtituer dans cette expreſſion $\frac{m^2A^2}{M^2}$ pour A^2 ſeul, M exprimant la largeur du Vaiſſeau avant d'en avoir changé les dimenſions, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt dans ſes proportions primitives, & elle ſe changera en $\frac{r}{h \sin\beta . \sin(\beta-\delta)}\left(\frac{Hm^2 \cos\beta.\cos(\beta-\delta)}{Re^2}+\frac{20\, p^{\frac{3}{2}}M^2}{A^2\sqrt{e^2+m^2}}\right)$; quantité qui doit être un *minimum* pour que le Vaiſſeau acquiere la plus grande marche poſſible *. Or, ce *minimum* s'obtient, comme on le voit, en jettant les yeux ſur l'expreſſion, en augmentant à l'infini la longueur e, & en diminuant le creux p. Donc, à meſure qu'on allonge un Vaiſſeau, & qu'à proportion on lui donne moins de creux, il devient de plus en plus bon voilier. On obtient pareillement le même *minimum*, en augmentant la longueur e, & en diminuant la largeur m; car l'expreſſion même $\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^2+m^2}}$ diminue encore, à cauſe que e eſt plus grand que m: donc le Vaiſſeau deviendra meilleur voilier en augmentant ſa longueur & en diminuant ſa largeur. Enfin, ſuppoſant la longueur e conſtante, & faiſant varier la largeur m, & le creux p, on voit que dans le cas où $\cos\beta = 0$, c'eſt-à-dire, lorſque le Vaiſſeau marchera vent arriere, plus ſa largeur ſera grande, & ſon creux petit, plus il acquerra la qualité d'être bon voilier (a) ; mais, au contraire,

* Car plus le ſecond terme de la ſérie ſera petit, plus la valeur de la viteſſe u qu'elle repréſente ſera grande, attendu que ce terme eſt négatif.

(a) L'expreſſion correſpondante à celle-ci, qu'on déduit de l'ancien ſyſtéme des réſiſtances, ſuivant la formule de la *Note* de l'*Article* 352, *page* 229, réduite en ſérie, eſt $\frac{a}{h \sin\beta^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{Hm^2 \cos\beta^{\frac{3}{2}}}{a\, e^2}+\frac{(1030)^{\frac{1}{2}} m M p}{A\sqrt{e^2+m^2}}\right)$; d'où l'on voit que $\cos\beta$ étant $= 0$, il ne reſte que le ſecond terme, dont le numérateur mMp demeure conſtant, tandis que la largeur m & le creux p varient; & s'il y a quelque variation dans ce terme, elle ne peut venir que de la variation de m dans le dénominateur, laquelle eſt preſque inſenſible dans la pratique, à cauſe de la grande valeur de e à l'égard de m. Il n'en eſt pas de même dans notre ſyſtéme des réſiſtances, on a déjà vu que le numérateur du ſecond terme eſt $= 20\, p^{\frac{3}{2}} M^2$, lequel diminue avec $p^{\frac{3}{2}}$; diminution qui devient très-ſenſible dans la pratique, comme on l'obſerve réellement.

lorſque

lorſque le Vaiſſeau navigue à la bouline, en cherchant la moindre valeur qu'on puiſſe donner à m, on trouve qu'elle doit être ſeulement de deux pieds, ou à peu près; quantité extrêmement petite: ainſi, pour les vents très-largues, il eſt bon que le Navire ait plus de largeur & moins de creux; & pour les vents très-près, c'eſt tout le contraire. Au reſte, il réſulte de cette ſolution, qu'il eſt plus convenable pour la marche, de s'arrêter à de petites largeurs, & à de petites profondeurs, en augmentant les longueurs le plus qu'il eſt poſſible: car dans le cas même où l'on navigue vent arriere, l'altération qui peut réſulter de l'augmentation de m dans la quantité $\sqrt{c^2 + m^2}$, eſt fort petite; mais outre que dans cette conſtruction, le Vaiſſeau ſeroit très-ſujet à s'arquer, ce qui eſt très-préjudiciable, il y auroit encore beaucoup plus d'inconvénients pour les roulis & les tangages, comme on le verra par la ſuite.

(359.) Il y a encore d'autres variations dans la marche des Vaiſſeaux, que les Marins ont fort bien obſervées, mais ſans être parvenus à en connoître la cauſe; on peut même ajouter que les Géometres ne l'ont pas indiquée juſqu'à préſent. Les réſiſtances r & R, dans les Vaiſſeaux ſemblables, ſont (188.) comme les racines quarrées des cinquiemes puiſſances des largeurs; c'eſt-à-dire, comme $M^{\frac{5}{2}}$ eſt à $m^{\frac{5}{2}}$, en exprimant ces largeurs par M & m: mais les voilures ſont comme M^2 eſt à m^2: donc ſi l'on ſubſtitue ces valeurs, en place de leurs équivalentes, dans le ſecond terme de la ſérie, ce terme deviendra, pour le premier Navire, $= \frac{M^{\frac{1}{2}}(M^2 \cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20 M^{\frac{5}{2}})}{M^2 M^{\frac{5}{2}} \sin\beta . \sin(\beta - \delta)} = \frac{\cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20 M^{\frac{1}{2}}}{\sin\beta . \sin(\beta - \delta)}$; & pour le ſecond, $= \frac{\cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20 m^{\frac{1}{2}}}{\sin\beta . \sin(\beta - \delta)}$; d'où l'on voit que ce terme eſt plus petit dans le petit Vaiſſeau; & conſéquemment que celui-ci doit mieux marcher.

Rappellons-nous maintenant que, dans toute la théorie de ce *Chapitre*, nous n'avons point eu égard à la réſiſtance qui provient de la dénivellation du fluide, à cauſe que cette réſiſtance devient négligeable, lorſque les vents ne ſont pas forts, & que les Vaiſſeaux ſont grands. Cette réſiſtance eſt en général pour les Vaiſſeaux dont les carenes ſont ſemblables, ſeulement comme les ſimples largeurs M & m: ainſi, en ſubſtituant ces valeurs pour r & R dans le ſecond terme de la ſérie, ainſi que M^2 pour A^2, ce terme deviendra, pour le premier Vaiſſeau, $= \frac{M(M^2 \cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20 M)}{M^3 \sin\beta . \sin(\beta - \delta)} = \frac{M \cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20}{M \sin\beta . \sin(\beta - \delta)}$; & pour le ſecond, $= \frac{m \cos\beta . \cos(\beta - \delta) + 20}{m \sin\beta . \sin(\beta + \delta)}$; d'où l'on voit que ce terme eſt plus

grand dans le Vaiſſeau le plus petit; & conſéquemment que ce Vaiſſeau doit aller moins bien à cet égard. Il réſulte de ces deux raiſons combinées entr'elles, qu'avec de petits vents, les petits Bâtiments, tels que les Frégates & autres, doivent mieux marcher, & que les grands ont l'avantage de la marche lorſque les vents ſont violents.

Juſqu'ici nous avons traité cette théorie, en ſuppoſant toujours le Navire de niveau, c'eſt-à-dire, ſans qu'il éprouve de tangage, ou de rotation ſur un axe. C'eſt dans cette ſuppoſition que nous avons calculé les réſiſtances dont nous nous ſommes ſervis; mais auſſi-tôt que le Vaiſſeau a du tangage, il eſt clair que ces réſiſtances changent de valeur, & ne ſont plus les mêmes: par conſéquent les vîteſſes que nous avons aſſignées, & qui dépendent de ces réſiſtances, ne peuvent plus avoir lieu; elles diminueront d'autant plus que les balancements du tangage ſeront plus conſidérables: car alors la proue préſente plus de ſurface à l'action du fluide, & le choc ſe fait en général, ſous des ſinus d'incidence plus grands; deux circonſtances qui augmentent la réſiſtance. On verra dans ſon lieu que, pour les proues aiguës, ces tangages peuvent être une, deux & trois fois plus grands que pour d'autres un peu plus pleines; & par conſéquent, quoique ces proues éprouvent une moindre réſiſtance dans le cas où le Vaiſſeau eſt tranquille, ou qu'il ne tangue pas, il n'en ſera pas de même dans le cas de l'agitation. Dans ce dernier cas, au contraire, la réſiſtance devient beaucoup de fois plus grande, parce que l'eau frappe des ſurfaces beaucoup plus grandes, & ſous des angles preſque droits : donc, dans le cas de l'agitation, le Vaiſſeau qui auroit une proue plus pleine, peut mieux marcher que celui qui auroit une proue aiguë, ſelon qu'on ſuppoſera cette agitation plus ou moins grande. C'eſt d'après cette conſidération que nous ne pouvons admettre, pour la Navigation, la proue de moindre réſiſtance, que les Géométres ont prétendu juſqu'ici qu'on devoit employer; car, dans le cas de l'agitation, cette proue étant extrêmement aiguë, perd la qualité d'éprouver moins de réſiſtance.



CHAPITRE II.

Des Angles que les Voiles & le Vent doivent former avec la quille, pour que le Vaiſſeau acquiere la plus grande Viteſſe poſſible.

ASSURÉS déjà de l'exactitude de nos formules, & de leur parfaite conformité avec les faits qu'on obſerve dans la pratique, il eſt néceſſaire d'en continuer l'analyſe, afin d'en tirer tout l'avantage poſſible; car il eſt des vérités qu'une bonne théorie peut ſeule nous enſeigner, & que les Marins ne pourroient jamais découvrir, même dans une infinité de ſiecles d'obſervations.

Si dans la valeur de $u = \frac{GA^2RV \, \sin\alpha . \sin(\beta - \delta)}{GA^2(R-r)\sin\beta . \sin(\beta-\delta) + r(GA^2\cos\delta + 20R)}$, nous faiſons $\sin(\beta - \delta) = 0$, c'eſt-à-dire, ſi nous orientons la voile de maniere que ſon action ſoit perpendiculaire à la quille, on aura $u = 0$. Pareillement, ſi nous faiſons, dans la même formule, $\sin\alpha = 0$, c'eſt-à-dire, ſi nous ſuppoſons la voile orientée de maniere que ſon plan coïncide avec la direction du vent, il en réſultera auſſi $u = 0$; mais dans toutes les ſituations intermédiaires qu'on peut donner à la voile, il eſt certain que u aura une valeur; par conſéquent, depuis la valeur zéro, qui réſulte de la ſuppoſition de $\sin(\beta - \delta) = 0$, la viteſſe ira en augmentant, à meſure que $\sin(\beta - \delta)$ augmentera, & cela juſqu'à un certain point, qui ſera le *maximum*; paſſé ce terme, $\sin(\beta - \delta)$ continuant d'augmenter, u diminuera. Or, nous ſçavons qu'on obtient ce *maximum*, en égalant à zéro la différencielle de l'équation. Faiſant donc $Q = GA^2(R-r)$, $F = r(GA^2\cos\delta + 20R)$, $\sin\alpha = \sin\gamma . \cos\beta - \sin\beta . \cos\gamma$, & $\sin(\beta-\delta) = \sin\beta . \cos\delta - \cos\beta . \sin\delta$, l'équation deviendra $u = \frac{GA^2RV(\sin\gamma . \cos\beta - \cos\gamma . \sin\beta)(\sin\beta . \cos\delta - \cos\beta . \sin\delta)}{Q\sin\beta(\sin\beta . \cos\delta - \cos\beta . \sin\delta) + F}$: & en ſuppoſant δ conſtant, nous aurons, pour le cas de la plus grande marche, ou de la plus grande valeur de u, $(Q\sin\beta(\sin\beta . \cos\delta - \sin\delta . \cos\beta) + F)(\sin(\gamma+\delta)\cos\beta^2 - \sin(\gamma+\delta)\sin\beta^2 - 2\cos(\gamma+\delta)\sin\beta . \cos\beta) = \sin\alpha . \sin(\beta - \delta)(2Q\cos\delta . \sin\beta . \cos\beta - Q\sin\delta . \cos\beta^2 + Q\sin\delta . \sin\beta^2)$ [A], ou, en réduiſant, $Q\sin\gamma(\sin\delta^2 - 2\sin\delta . \cos\delta . \tang\beta + \tang\beta^2 - 2\sin\delta . \cos\delta . \tang\beta^3 + \cos\delta^2 . \tang\beta^4) = \ldots\ldots \frac{F}{\cos\beta^2}(\sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma+\delta)\tang\beta^2 - 2\cos(\gamma+\delta)\tang\beta)$ [B], ou, ce qui eſt la même choſe, $Q\sin\gamma(\sin\delta^2 - 2\sin\delta . \cos\delta . \tang\beta +$

$\cos\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2) = F\sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma+\delta)\,\mathrm{tang}\,\beta^2 - 2\cos(\gamma+\delta)\,\mathrm{tang}\,\beta)$,
[C]: équation qui donne $\mathrm{tang}\,\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{Q\sin\gamma.\sin\delta.\cos\delta \pm F.\cos(\gamma+\delta) + \sqrt{F^2 + QF\sin\gamma.\sin(\gamma-\delta)}}{Q\sin\gamma.\cos\delta^2 + F\sin(\gamma+\delta)}$, [D] * (*a*); c'eſt

---

* Le calcul qui conduit à cette valeur de $\mathrm{tang}\,\beta$ n'a preſque aucune autre difficulté que ſon extrême longueur: ainſi nous nous contenterons d'indiquer l'ordre qu'il faut ſuivre pour y parvenir. Les commençants ne trouveront pas, ſans doute, cette attention de notre part tout-à-fait inutile.

Pour trouver l'équation A, on égalera à zéro la différencielle de la valeur de u, ſuivant les regles ordinaires *de maximis & minimis*, en regardant les angles γ & δ comme donnés & conſtants; mais pour procéder avec ordre, il faut 1°. diviſer par la quantité conſtante GA^2RV. 2°. Faire les opérations indiquées. 3°. Subſtituer $\sin(\gamma+\delta)$ en place de $\sin\gamma.\cos\delta + \cos\gamma.\sin\delta$. 4°. Différencier, & ſubſtituer dans la différencielle $-\cos(\gamma+\delta)$ en place de $\sin\gamma.\sin\delta - \cos\gamma.\cos\delta$. 5°. Réduire les deux parties au même dénominateur, & ſupprimer le dénominateur commun. 6°. Enfin, mettre pour $\sin\beta.\cos\delta - \cos\beta.\sin\delta$ ſa valeur $\sin(\beta-\delta)$, & pour $\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta$ ſa valeur $\sin\alpha$.

On obtient l'équation B en réduiſant l'équation A. Pour cela il faut 1°. Mettre pour $\sin\alpha$ & $\sin(\beta-\delta)$ leurs valeurs, & l'on aura $\sin\alpha.\sin(\beta-\delta) = \sin(\gamma+\delta)\sin\beta.\cos\beta - \cos\gamma.\cos\delta.\sin\beta^2 - \sin\gamma.\sin\delta.\cos\beta^2$. 2°. Faire les opérations indiquées, tranſpoſer tous les termes qui ne feront point affectés de F, & faire la réduction des quantités ſemblables, autant qu'il ſera poſſible. 3°. Pour achever la réduction, on développera les expreſſions $\sin(\gamma+\delta)$ & $\cos(\gamma+\delta)$. 4°. On diviſera les deux membres par $\cos\beta^4$, & l'on ſubſtituera $\mathrm{tang}\,\beta$ & ſes puiſſances, en place de $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ & ſes puiſſances, & l'on aura ....
$Q\sin\gamma(\sin\delta^2 - 2\sin\delta.\cos\delta.\mathrm{tang}\,\beta + \cos\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2 + \sin\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2 - 2\sin\delta.\cos\delta.\mathrm{tang}\,\beta^3 + \cos\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^4)$
$= \frac{F}{\cos\beta^2}(\sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma-\delta)\,\mathrm{tang}\,\beta^2 - 2\cos(\gamma+\delta)\,\mathrm{tang}\,\beta)$; expreſſion qui devient l'équation B en mettant $\mathrm{tang}\,\beta^2$ en place de $(\cos\delta^2 + \sin\delta^2)\,\mathrm{tang}\,\beta^2$, puiſque $\cos\delta^2 + \sin\delta^2 = 1$; mais on laiſſera cette équation ſous cette forme, afin d'avoir plus facilement l'équation C.

En multipliant le premier membre de l'équation B par $\cos\beta^2$ exprimé en $\mathrm{tang}\,\beta$, on aura l'équation C. Or, $\cos\beta^2 = \frac{1}{1+\mathrm{tang}\,\beta^2}$; car on a $\sin\beta^2 = 1 - \cos\beta^2$, & pareillement $\sin\beta^2 = \mathrm{tang}\,\beta^2.\cos\beta^2$: donc $1 - \cos\beta^2 = \mathrm{tang}\,\beta^2.\cos\beta^2$, d'où l'on tire $\cos\beta^2 = \frac{1}{1+\mathrm{tang}\,\beta^2}$. Multipliant donc le premier membre par cette quantité, & ſupprimant le diviſeur $\cos\beta^2$ du ſecond, on aura l'équation même de l'Auteur; car le premier membre devient ....
$\frac{Q\sin\gamma(\sin\delta^2 - 2\sin\delta.\cos\delta.\mathrm{tang}\,\beta + \cos\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2 + \sin\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2 - 2\sin\delta.\cos\delta.\mathrm{tang}\,\beta^3 + \cos\delta^2\,\mathrm{tang}\,\beta^4)}{1+\mathrm{tang}\,\beta^2}$
$= Q\sin\gamma(\sin\delta^2 - 2\sin\delta.\cos\delta.\mathrm{tang}\,\beta + \cos\delta^2.\mathrm{tang}\,\beta^2$.

On parvient aiſément à l'équation D, en reſolvant l'équation du ſecond degré, ſuivant les regles ordinaires de l'algebre. Obſervant de réduire au même dénominateur les parties qui doivent être ſous le radical, & de faire la réduction. Dans cette derniere opération, on remarquera que $FF\sin(\gamma+\delta)^2 + FF\cos(\gamma+\delta)^2 = FF$, que $\sin\gamma^2.\cos\delta^3 + \sin\gamma^2.\cos\delta.\sin\delta^2 = \sin\gamma^2.\cos\delta(\cos\delta^2 + \sin\delta^2) = \sin\gamma^2.\cos\delta$. &c. &c. On remarquera en paſſant qu'on a mis le double ſigne $\pm$ au terme $F\cos(\gamma+\delta)$ quoiqu'il ſoit précédé naturellement du ſigne $-$; attendu que lorſqu'on navigue vent largue, γ eſt $> 90°$, & alors $\cos(\gamma+\delta)$, eſt une quantité négative; or, cette quantité étant ſouſtraite, elle devient poſitive; mais dans le cas de la bouline on a $\gamma < 90°$, alors $\cos(\gamma+\delta)$ eſt poſitif, ainſi le terme $F\cos(\gamma+\delta)$ eſt négatif. On voit auſſi que l'Auteur auroit bien pu mettre toujours le ſigne $-$: mais alors dans les ſubſtitutions numériques on auroit été obligé de ſe rappeller que $\cos(\gamma+\delta)$ eſt négatif dans le cas du vent largue.

(*a*) M. *John Muller*, dans le *Tome VIII* de ſes Ouvrages, intitulé, *Appendix*, or *Supplément to the Treatiſe of Artillery*, *page* 87, cherche les angles les plus avanta-

la valeur de la tangente de l'angle que doit former la voile avec la quille pour que le Vaisseau acquiere la plus grande vîtesse qu'il est possible, en supposant les angles γ & δ donnés, & constants : le signe positif est pour le cas où l'on a $\gamma > 90°$, ou pour lorsqu'on navigue vent largue, & le signe négatif pour le cas où l'on a $\gamma < 90$, ou pour lorsqu'on navigue à la bouline.

(361.) La premiere connoissance que nous donne cette formule est, que la valeur de β n'est pas constante, comme les Géométres l'ont cru jusqu'ici, mais qu'elle dépend des quantités $Q = \ldots$ $GA^2(R-r)$, $F = r(GA^2 \cos\delta + 20R)$, & δ : c'est-à-dire, du rapport entre les résistances de la proue & du côté, de la quantité A^2 des voiles & de leur courbure : de sorte que, plus $\frac{r}{R}$ sera petit, plus l'angle β sera petit. Cet angle devient encore d'autant moins grand à proportion que δ devient plus petit, & que la quantité A^2 est plus grande. Si, par exemple, la résistance de la proue étoit infiniment petite, à l'égard de la résistance latérale, on auroit $F = 0$, & $\tang \beta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \tang \delta$, ou $\beta = \delta$: c'est-à-dire, que la direction de la force de la voile doit être, en ce cas, perpendiculaire à la quille *. Au contraire, lorsque $r = R$, ou que la résistance de la proue est égale à celle du côté, on aura $Q = 0$, & $\tang \beta = \frac{1-\cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = \ldots$ $\operatorname{cosec}(\gamma+\delta) - \operatorname{cotang.}(\gamma+\delta) = \tang\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$ **, ou $\beta = \frac{\gamma+\delta}{2}$.

geux que doivent former le Vaisseau, le vent & les voiles, pour obtenir la plus grande marche. Sa conclusion est très-différente de celle que *Jean Bernoulli* donne dans ses Ouvrages (*Tome II, page* 32), quoique tous deux soient partis du même principe erroné sur les résistances. Cette différence vient de ce que *Jean Bernoulli* a supposé constant, comme nous l'avons fait ici, l'angle que forme le Navire avec le vent, & a supposé variable l'angle du Navire avec la voile, comme cela doit être, puisque l'angle du rumb de vent est donné. Au contraire, M. *Muller* suppose l'angle du Navire avec le vent variable, & fait constant celui du Navire avec la voile. Par cette raison, la différencielle qu'on doit égaler à zéro n'est pas $s\sqrt{1-x^2} - xy$, comme le dit M. *Muller*, mais $x^2(2s^2-y^2)^2 = 9y^2s^2(1-x^2)$, ou $y^4 - y^2(1+\frac{5}{3}x^2) + \frac{4}{9}x^2 = 0$: équation qui est la même que celle donnée par *Jean Bernoulli*. Si l'on suppose avec M. *Muller* que l'angle formé par la voile avec le Navire, ou avec la quille, est constant, il n'y a pas de doute que le vent qui tombe perpendiculairement sur la voile sera le plus avantageux, puisque c'est celui qui agit avec plus de force sur elle ; aussi ce résultat est-il celui que doit trouver, & que trouve en effet, M. *Muller*.

* Cela est évident ; car, pour que la résistance de la proue soit nulle relativement à la résistance latérale, il faut que la vitesse directe soit nulle à l'égard de la vitesse latérale, ou que la voile agisse perpendiculairement à la quille (360.).

** On peut trouver ces expressions de différentes manieres, nous allons en donner une, purement analytique, $\frac{1-\cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{1}{\sin(\gamma+\delta)} - \frac{\cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$; mais $\frac{1}{\sin(\gamma+\delta)} = \ldots$ $\operatorname{cosec}(\gamma+\delta)$, & $\frac{\cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = \operatorname{cotang}(\gamma+\delta)$. Donc, &c.

Pareillement, si $A^2 = 0$, on a $Q = 0$, & par conséquent $\beta = \frac{\gamma + \delta}{2}$: & si A^2 étoit $= \infty$, comme, dans ce cas, Q est beaucoup de fois plus grand que F, on peut négliger, dans la formule, toutes les quantités où F se trouve sans Q, & elle deviendra $tang\, \beta = tang\, \delta + \left(\frac{F \sin(\gamma+\delta)}{Q \sin\gamma . \cos\delta^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou, parce que dans ce même cas on doit avoir $\delta = 0$, $tang\, \beta = \sqrt{\frac{F}{Q}}$. D'où l'on voit que c'est seulement lorsque γ sera extrêmement petit, ou que $\gamma = 2\sqrt{\frac{F}{Q}}$, que β peut avoir la même valeur dans les deux cas. Dans tout autre cas, β sera d'autant plus petit que la quantité A^2 sera plus grande.

(362.) Naviguant vent en poupe, on a $\sin\gamma = 0$, & $\delta = 0$; donc on aura $tang\, \beta = \infty$, ou $\beta = 90°$; c'est-à-dire, qu'on doit orienter la voile de maniere qu'elle forme des angles droits avec la quille; c'est aussi ce que pratiquent les Marins, & par conséquent la plus grande vîtesse est la même que celle qu'on obtient dans la pratique ordinaire.

(363.) Ce n'est plus la même chose lorsqu'on navigue vent largue. Examinons le cas de l'*Art.* 351, dans lequel nous avons supposé $\gamma = 134°$, & dans lequel, avec un petit vent, on a $\delta = 1° 37'$, $G = \frac{4}{7}$, $A^2 = 17680$, $r = 294$, & $R = 3316$. L'usage des Marins, dans ces circonstances, est de faire $\beta = 70°$. D'après ces données, la valeur de Q est $= 42743168$, & celle de $F = 23654753$, & par conséquent, $tang\, \beta =$ . . . . , ...

$$\frac{42743168 \sin\gamma . \sin\delta . \cos\delta + 23654753 \cos(\gamma+\delta) + \sqrt{(23654753)^2 + (42743168)(23654753) \sin\gamma . \sin(\gamma-\delta)}}{42743168 \sin\gamma \cos\delta^2 + 23654753 \sin(\gamma+\delta)}$$

$= \frac{867098 + 16905477 + 33117589}{30722390 + 16545436} = \frac{56695905}{47267826}$; ou $\beta = 50° 11'$: cet angle est moindre de $19° 49'$ que celui qu'emploient les Marins dans leur pratique ordinaire. Si nous substituons maintenant cette valeur de β & celle de α qui en résulte, laquelle est $= 83° 49'$, en place de $\beta = 70°$, & de $\alpha = 64°$ que nous avons employées (351.) pour trouver la valeur de u, nous aurons $u =$ . . . .

$$\frac{\frac{4}{7} . 17680 . 3316 . V \sin(48° 34') \sin(83° 49')}{\frac{4}{7} . 17680 . 3316 . \sin(48° 34') \sin(50° 11') + \frac{4}{7} . 17680 . 294 . \cos(48° 34') \cos(50° 11') + 20 . 3316 . 294}$$

Quant à la seconde valeur, on peut également la déduire du premier membre. Le numérateur $1 - \cos(\gamma+\delta) = \sin . verse\, (\gamma+\delta)$; ainsi, le premier membre $= \frac{\sin\, verse\, (\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$. Or, les plus légeres connoissances de la Trigonométrie font voir que $\sin(\gamma+\delta) : \sin . verse\, (\gamma+\delta) :: 1 : tang\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$. Donc $\frac{\sin . verse\, (\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{1 - \cos(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} = tang\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$. On auroit pu également le déduire de la seconde expression.

$= \frac{3495872}{4920895} V$, ou, à peu près, $u = \frac{71}{100} V$. D'où l'on voit qu'en se servant de ces angles avantageux, la vitesse du Vaisseau seroit $= \frac{71}{100} V$, au lieu de $\frac{64}{100} V$, comme on l'a trouvé (351.), en se servant des angles qu'emploient les Marins; c'est-à-dire que la vîtesse du Vaisseau seroit de $\frac{7}{100} V$ plus grande qu'elle ne l'est aujourd'hui. Ainsi, si le vent parcouroit 15 pieds par seconde, le vaisseau feroit $\frac{9}{20}$ de mille de plus par heure; ce qui, joint aux 5 milles $\frac{76}{100}$ qu'il faisoit dans la premiere disposition, donnera 6 milles $\frac{21}{100}$ pour le chemin qu'il fera dans une heure. Si le vent parcouroit 25 pieds par seconde, le Vaisseau feroit $\frac{3}{4}$ de mille de plus par heure; ce qui, joint aux 9 milles $\frac{48}{100}$ qu'il faisoit déjà, donnera 10 milles $\frac{23}{100}$. Dans le cas où le vent est fort, on a $\delta = 4^\circ\ 40'$, & $G = \frac{78}{100}$: donc, en supposant que le Vaisseau navigue seulement avec ses deux basses voiles, on aura (351.), $A^2 = 5200$; ce qui donne $Q = \frac{78}{100} . 5200 (3316 - 294) = 12257232$, $F = 294 (\frac{78}{100} . 5200 . cos (4^\circ\ 40') + 20 . 3316) = 20681130$, & $tang\ \beta = \ldots\ldots$

$$\frac{12257232 . sin\ \gamma\ sin\ \delta . cos\ \delta + 20681130 (cos (\gamma + \delta) + \sqrt{20681130 (20681130 + 12257232\ sin\ \gamma . sin (\gamma - \delta)})}{12257232\ sin\ \gamma . cos\ \delta^2 + 20681130\ sin\ (\gamma + \delta)}$$

$= \frac{714971 + 13108305 + 23412361}{8787882 + 15996270} = \frac{37235637}{24784152}$. Donc $\beta = 56^\circ\ 21'$; cet angle, comme on le voit, est seulement de $6^\circ\ 10'$ plus grand que celui que nous avons trouvé auparavant: de sorte que le Vaisseau naviguant avec toutes ses voiles, ou naviguant seulement avec les deux basses voiles, dans le cas de $\gamma = 134^\circ$, il n'en résulte, dans l'angle β, que la petite différence de $6^\circ\ 10'$. Si nous mettons cette nouvelle valeur de β, & celle qui résulte pour α, qui est $= 77^\circ\ 39'$, celle de $G = \frac{78}{100}$, celle de $A^2 = 5200$, & celle de $\delta = 4^\circ\ 40'$, dans la formule qui exprime la valeur de u, on aura $u = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{78}{100} . 5200 . 3316\ V\ sin\ (77^\circ\ 39')\ sin (51^\circ\ 41')}{\frac{78}{100} . 5200 . 3316\ sin (56^\circ\ 21')\ sin (51^\circ\ 41') + \frac{78}{100} . 5200 . 294 . cos (56^\circ\ 21')\ cos (51^\circ\ 41') + 20 . 3316 . 294}$$

$= \frac{10308383}{28692121} V$, ou, à très-peu près, $u = \frac{36}{100} V$; c'est seulement $\frac{1}{100} V$ de plus que la vîtesse que nous avons trouvée, *Art.* 351: de sorte que, lors même que le vent parcourroit 50 pieds par seconde, on ne gagneroit que $\frac{1}{10}$ de mille par heure; ce qui, avec les 10 milles $\frac{1}{4}$ que fait le Vaisseau, lorsqu'il est disposé suivant l'usage des Marins, fait en tout 10 milles $\frac{1}{3}$ pour la marche du Vaisseau avec l'angle le plus avantageux.

(364.) Quoique, lorsqu'on navigue à la bouline, la valeur de l'angle β soit limitée dans les Vaisseaux, & qu'il soit difficile de la

faire varier beaucoup ; il y a cependant des moyens de le diminuer en partie, si cela est nécessaire : & dans les autres Embarcations il y a aussi quelques corrections à faire ; c'est pourquoi nous allons chercher l'angle β qui produit la plus grande vîtesse, en supposant l'angle $\gamma = 65^\circ$, & nous nous servirons, dans cette recherche, des exemples donnés à l'*Art.* 352. Nous avons trouvé dans cet *Article*, qu'avec un petit vent, en négligeant les fractions, on a $\delta = 8^\circ\, 20'$, $G = \frac{96}{100}$, & $A^2 = 23050$; ce qui donne $Q = \frac{96}{100}.23050.(3316 - 294) = 66870816$, $F = 294\left(\frac{96}{100}.\ 23050 \cos(8^\circ\, 20') + 20.3316\right) = 25937987$, & par conséquent $\tang \beta = \ldots$

$$\frac{66870816 \sin\gamma.\sin\delta.\cos\delta - 25937987 \cos(\gamma-\delta) + \sqrt{25937987(25937987 + 66870816 \sin\gamma \sin(\gamma-\delta))}}{60870816 \sin\gamma.\cos\delta^2 + 25937987 \sin(\gamma-\delta)}$$

$= \frac{9028113 - 7439096 + 44563459}{59191247 + 24848320} = \frac{46152475}{84035507}$; ou $\beta = 28^\circ\, 47'$: c'est l'angle que doit former la vergue avec la quille, pour que le Vaisseau acquiere la plus grande marche possible, γ étant $= 65^\circ$, & $A^2 = 23050$. A la vérité, il n'est pas possible, dans les Vaisseaux, de donner à la vergue cette obliquité par rapport à la quille, à moins qu'on ne change l'état actuel de leurs agrès & de leur voilure ; mais dans les Bâtiments qui portent des voiles latines, il est très-facile de le former. Si nous substituons donc cette nouvelle valeur de β, & celle qui en résulte pour α, qui est $= 36^\circ\, 13'$, & faisant de plus $G = \frac{96}{100}$, $A^2 = 23050$, & $\delta = 8^\circ\, 20'$, dans la formule qui exprime la valeur de u, (352.), on aura $u =$

$$\frac{\frac{96}{100}.\ 23050.\ 3316.\ V \sin(36^\circ\, 13') \sin(20^\circ\, 7')}{\frac{96}{100}.23050.3316 \sin(28^\circ\, 47') \sin(20^\circ\, 7') + \frac{96}{100}.23050.\ 294.\cos(28^\circ\, 47') \cos(20^\circ\, 7') + 20.\ 3316.\ 294}$$

$= \frac{14910784\ V}{12151977 + 5353993 + 19498080}$; ou, à fort peu près, $u = \frac{403}{1000} V$; c'est $\frac{68}{1000} V$ de plus que ce qu'on a trouvé, *Art.* 352, en faisant l'angle $\beta = 40^\circ$, suivant la pratique des Marins : de sorte que si le vent parcouroit 15 pieds par seconde, le Vaisseau feroit $\frac{62}{1000}$ de mille de plus par heure avec l'angle $\beta = 28^\circ\, 47'$; ce qui, avec les 2 milles $\frac{2}{10}$ qu'il faisoit avec le premier angle, donne 2 milles $\frac{86}{100}$ pour le chemin qu'il feroit par heure avec le second.

Avec un vent fort, on a (352.), $\delta = 21^\circ\, 4'$, & $G = \frac{9}{10}$: donc, en supposant que le Vaisseau porte seulement ses deux basses voiles, on aura (280.), $A^2 = 6130$, ce qui donne $Q = \frac{9}{10}.6130(3316 - 294) = 16672375$, $F = 294\left(\frac{9}{10}.6130 \cos(21^\circ\, 4') + 20.3316\right) = 21011668$, & par conséquent, $\tang \beta = \ldots$

$$\frac{16672375 \sin\gamma \sin\delta.\cos\delta - 21011668 \cos(\gamma+\delta) + \sqrt{21011668(21011668 + 16672375 \sin\gamma.\sin(\gamma-\delta))}}{10072375 \sin\gamma.\cos\delta^2 + 21011668 \sin(\gamma-\delta)}$$

$= \frac{5068435 - 1441309 + 25724943}{13157942 + 20962169} = \frac{29352069}{34120111}$, ou, à peu près, $\beta = 40^\circ\, 42'$;

angle

gle qui est de $12^\circ\ 55'$ plus grand que celui qu'on a trouvé ci-dessus, lorsque le Vaisseau porte toutes ses voiles, & qui est, à peu près, le même que celui dont se servent les Marins. Si nous substituons dans la valeur de u cette nouvelle valeur de β, & celle qui en résulte pour α, qui est $= 24^\circ\ 18'$, & faisant de plus $G = \frac{9}{10}$, $A^2 = 6130$, & $\delta = 21^\circ\ 4'$, on aura $u = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{9}{10}.6130.3316.V \sin(24^\circ\ 18') \sin(19^\circ\ 38')}{\frac{9}{10}.6130.3316.\sin(40^\circ\ 42') \sin(19^\circ 38') + \frac{9}{10}.6130.294.\cos(40^\circ\ 42') \cos(19^\circ 38') + 20.3316.294}$$

$= \frac{2529537\,V}{4008383 + 1158201 + 19498080}$, ou, à peu près, $u = \frac{103}{1000} V$. Ce résultat est le même que celui qu'on a trouvé, *Art.* 352, d'après l'usage des Marins; & cela devoit arriver, attendu que l'angle β que donne la théorie, est presque le même angle que celui qu'ils emploient dans les Vaisseaux.

(365.) Ayant donc résolu le problême où il s'agit de déterminer les angles β les plus avantageux qu'il convient d'employer, il nous faut maintenant déterminer l'ouverture qu'il convient de donner aux angles γ, pour procurer au Vaisseau le plus de vîtesse qu'il est possible, & ce sera le *maximum maximorum.* L'objet de cette recherche pourra paroître étrange à plusieurs Lecteurs; car, quoiqu'on ait toujours cru que le vent largue est, de tous les vents, celui qui donne le plus d'avantages pour la marche, on ne fondoit cependant cette opinion que sur ce qu'avec le vent largue on porte plus de voiles, ou qu'elles présentent plus de surface au vent, & ne se couvrent point les unes & les autres, comme il arrive lorsqu'on navigue vent arriere. En effet nous avons déjà vu (350.), que dans ce cas A^2 est seulement $= 12950$, tandis que, vent largue (351.), cette même quantité est $= 17680$, & qu'elle devient même $= 23050$, si le vent devient plus largue (352.). Mais on étoit loin d'imaginer que même avec la même voile, ou la même quantité de voiles dehors, le vent largue pût donner une plus grande marche, comme en effet cela arrive. Nous pouvons cependant nous convaincre de cette vérité, sans aller plus loin, en appliquant seulement la valeur de la vîtesse u, au cas où l'on fait la valeur de α constante, ou que $\sin \alpha = 1$, car ayant par-là $\delta = 0$, nous aurons $u = \frac{GA^2RV \sin \beta}{GA^2R \sin \beta^2 + GA^2r \cos \beta^2 + 20Rr}$: d'où l'on voit que la vîtesse du Vaisseau naviguant d'un vent largue, sera à sa vîtesse d'un vent arriere, comme $\frac{\sin \beta}{GA^2R \sin \beta^2 + GA^2r \cos \beta^2 + 20rR}$ est à $\frac{1}{GA^2R + 20Rr}$: ou comme $\frac{(GA^2R + 20Rr) \sin \beta}{GA^2R \sin \beta^2 + GA^2r \cos \beta^2 + 20Rr}$ est à l'u-

nité; ou bien en faisant $GA^2 = 12000$, $R = 3300$, & $r = 300$, comme $\frac{(12.33 + 2.33.3)\, sin\, \beta}{12.33\, sin\, \beta^2 + 12.3\, sin\, \beta^2 + 2.33.3}$ est à l'unité, c'est-à-dire, en réduisant, comme $\frac{33\, sin\, \beta}{20\, sin\, \beta^2 + 13}$ est à l'unité: de sorte que toutes les fois que $\frac{33\, sin\, \beta}{20\, sin\, \beta^2 + 13}$ sera plus grand que l'unité, le Vaisseau marchera davantage vent largue que vent arriere; & cela avec la même surface de voile exprimée par GA^2. Or, en faisant $sin\, \beta = \frac{4}{7}$, on a $\frac{33\, sin\, \beta}{20\, sin\, \beta^2 + 13} = \frac{26\frac{2}{7}}{25\frac{4}{7}}$: donc, l'angle α étant $= 90°$, $sin\, \beta = \frac{4}{7}$, & $GA^2 = 12000$, le Vaisseau marchera avec plus de vitesse vent largue que vent arriere.

(366.) Nous sçavons donc qu'il y a une certaine *disposition* du vent, par laquelle le Vaisseau marchera le plus qu'il est *possible*. Pour trouver quel est ce vent, il faut différencier la valeur de $u = \frac{GA^2RV\, sin\,(\beta - \delta)\,(sin\, \gamma . cos\, \beta - cos\, \gamma . sin\, \beta)}{GA^2R\, sin\, \beta . sin\,(\beta - \delta) + GA^2r\, cos\, \beta . (cos\, \beta - \delta) + 20\, Rr}$, en supposant β constant, & seulement γ variable, & égaler ensuite la différencielle à zéro. On aura par ce calcul $cos\, \gamma . cos\, \beta + sin\, \gamma . sin\, \beta = 0$, ou $cos\,(\gamma - \beta) = cos\, \alpha = 0$, & $sin\, \alpha = 1$; ce qui manifeste déjà que le vent le plus favorable à la marche est celui qui tombe perpendiculairement sur la vergue, comme nous l'avons supposé dans l'*Article* précédent; & par conséquent, on a, dans ce cas, $\delta = 0$. De la même équation $cos\, \gamma . cos\, \beta + sin\, \gamma . sin\, \beta = 0$, il résulte aussi $1 = -\, tang\, \gamma . tang\, \beta$, ou $tang\, \beta = -\frac{cos\, \gamma}{sin\, \gamma}$; & la valeur de $tang\, \beta$ étant substituée dans l'équation qui donne la valeur la plus avantageuse de β (360.), & faisant $\delta = 0$, on aura $-\frac{cos\, \gamma}{sin\, \gamma} = \frac{-F\, cos\, \gamma + \sqrt{F^2 + QF\, sin\, \gamma^2}}{Q\, sin\, \gamma + F\, sin\, \gamma}$; ou $-Q\, cos\, \gamma = \sqrt{F^2 + QF\, sin\, \gamma^2}$: d'où l'on tire, en quarrant, $Q^2\, cos\, \gamma^2 = F^2 + FQ\, sin\, \gamma^2 = F^2\, cos\, \gamma^2 + (F^2 + QF)\, sin\, \gamma^2$, ou $(Q^2 - F^2)\, cos\, \gamma^2 = (F^2 + QF)\, sin\, \gamma^2$; ce qui donne $tang\, \gamma^2 = \frac{Q - F}{F}$: c'est la valeur du quarré de la tangente du véritable angle γ que doit former le vent avec la quille, pour que le Vaisseau ait la plus grande marche qu'il est possible; & si au lieu de Q & de F nous substituons leurs valeurs (360.), on aura $tang\, \gamma^2 = \frac{GA^2(R - r)}{(GA^2 + 20\, R)\, r} - 1$.

(367.) Cette valeur n'est donc pas constante, elle dépend, comme on voit, des quantités r, R, A^2 & G; ainsi elle varie, non-seulement dans les différents Navires, ou Embarcations, mais encore dans le même Navire lorsqu'on change sa voilure, ou lorsque la force du vent varie; de sorte que moins la résistance

r de la proue ſera grande à l'égard de la réſiſtance latérale R; plus l'angle le plus avantageux ſera ouvert. Cet angle augmentera encore à meſure que les quantités A^2 ou G deviendront plus grandes; c'eſt-à-dire, à meſure que le Navire portera plus de voile, ou que le vent ſera moins fort : ainſi, pour ſçavoir quand le vent arriere ſera le plus avantageux, on ſuppoſera $tang\,\gamma = 0 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, & l'on aura, pour ce cas, $GA^2(R-r) = (GA^2 + 20R)r$, ce qui donne $GA^2 = \frac{20Rr}{R-2r}$: de ſorte que lorſqu'on aura $GA^2 = \frac{20Rr}{R-2r}$, ce ſera le vent arriere qui fera marcher le Vaiſſeau avec le plus de vîteſſe qu'il eſt poſſible; & à meſure qu'on augmentera la voilure, ce ſera un autre vent, faiſant un angle de plus en plus ouvert avec la quille, qui lui procurera la plus grande marche.

Dans le Vaiſſeau de 60 canons, qui nous ſert d'exemple, on a $R = 3316$, & $r = 294$, &, par conſéquent, on aura $\frac{20Rr}{R-2r} = \frac{19498080}{2728} = 7147$: & en faiſant (351.), $G = \frac{4}{5}$, on aura $A^2 = 8934$, c'eſt la voilure qu'il doit porter pour que le vent arriere ſoit le plus avantageux. Auſſi-tôt que ce Vaiſſeau en porte davantage, ce ſera un autre vent faiſant un angle plus ouvert. Pour trouver le cas dans lequel cet angle doit être le plus ouvert qu'il eſt poſſible, nous ſuppoſerons $A^2 = 17680$, (351.), qui eſt toute la voilure que le Vaiſſeau porte d'un vent largue; ſubſtituant cette valeur dans l'équation $tang\,\gamma^2 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, & faiſant $G = \frac{4}{5}$, $R = 3316$, & $r = 294$, on aura $tang\,\gamma^2 = \frac{\frac{4}{5}.17680(3022)}{\frac{4}{5}.17680.294+19498080} - 1$; ce qui donne à très-peu près $\gamma = 138^\circ\ 4'$; de ſorte que le vent doit faire avec la quille un angle ouvert, par la poupe, de $41^\circ\ 56'$, pour que le Vaiſſeau marche avec le plus de vîteſſe qu'il eſt poſſible, en portant toutes ſes voiles, ou A^2 étant $= 17680$. Nous venons de voir que le Vaiſſeau portant ſeulement 8934 pieds quarrés de voilure, c'eſt le vent arriere qui eſt le plus avantageux, ou que $\gamma = 180^\circ$: il s'enſuit donc que tous les angles intermédiaires entre 180° & $138^\circ\ 4'$ correſpondent aux voilures intermédiaires entre 8934 & 17680. Avec des voilures moindres que 8934, c'eſt également le vent arriere qui eſt le plus avantageux; car dans ce cas $tang\,\gamma$ devient imaginaire, attendu que dans l'équation $tang\,\gamma^2 = \frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r} - 1$, la quantité $\frac{GA^2(R-r)}{(GA^2+20R)r}$ eſt < 1.

(368.) Ayant l'angle γ le plus avantageux, nous pouvons trouver la plus grande vîteſſe parmi les plus grandes, ou le *maximum maximorum* de la vîteſſe; nous y parviendrons en ſubſtituant dans la valeur de u les valeurs correſpondantes de α & de β. Nous avons déjà dit (366.) que $\sin \alpha = 1$; & nous avons trouvé, dans le même *Article*, que $tang\ \beta = -\frac{1}{tang\ \gamma}$, ou $tang\ \beta^2 = \ldots \frac{1}{tang\ \gamma^2} = \frac{F}{Q-F}$: donc $\frac{\sin \beta^2}{\cos \beta^2} = \frac{F}{Q-F}$; ce qui donne $\sin \beta = \sqrt{\frac{F}{Q}}$ *, & $\cos \beta = \left(\frac{Q-F}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}$. Le *maximum maximorum* ſera donc, d'après cela, $u = \frac{GA^2RV \cdot \sqrt{\frac{F}{Q}}}{GA^2R.\frac{F}{Q} + GA^2r.\frac{Q-F}{Q} + 20\,Rr} = \frac{GA^2RV.\sqrt{QF}}{GA^2RF + GA^2r(Q-F) + 20\,QRr}$.

Si l'on fait maintenant, dans le Vaiſſeau de 60 canons, $G = \frac{4}{7}$, $A^2 = 17680$, $R = 3316$, $r = 294$, $Q = GA^2(R-r)$, & $F = GA^2r + 20\,Rr$, le *maximum maximorum* des vîteſſes u ſera $= \frac{34891360}{47411745}V$; ce qui donne à peu près $u = \frac{74}{100}V$; vîteſſe qui eſt plus grande de $\frac{10}{100}$ que celle que nous avions trouvée à l'*Art.* 351, avec preſque le même vent, & cela pour avoir fait, dans cet *Article*, ſuivant la pratique des Marins, $\beta = 70°$, & $\alpha = 64°$, tandis qu'ici nous avons fait $\beta = 48°\ 4'$, & $\alpha = 90°$. Si donc le vent parcouroit 15 pieds par ſeconde, le Vaiſſeau en parcourroit $11\frac{1}{10}$ dans le même temps, ce qui répond à 6 milles $\frac{66}{100}$ par heure, ou $\frac{9}{10}$ de mille de plus que nous n'avons trouvé, *Article* 351.

Mais ce n'eſt pas dans les Vaiſſeaux que cette différence ſe fait plus remarquer, elle devient plus ſenſible à meſure que le rapport $\frac{R}{r}$ devient plus grand. Dans un Chebec, on a, (348.), $A^2 = 9000$, $R = 700$, $r = 60$, & en faiſant $G = \frac{4}{7}$, on trouve $\beta = 26°\ 41'$, $\gamma = 116°\ 41'$, & le *maximum maximorum* des vîteſſes $u = \frac{16865496}{10319998}V$, ou à fort peu près $u = \frac{163}{100}V$: c'eſt-à-dire, que la vîteſſe du Chebec eſt une fois & environ deux tiers celle du vent. Si le vent parcouroit 15 pieds par ſeconde, le Chebec en parcourroit $24\frac{41}{100}$ dans le même temps; vîteſſe équivalente à 14 milles $\frac{67}{100}$ par heure. Si, au contraire, on fait $\beta = 60°$, & $\alpha = 56°\ 41'$, comme le font ordinairement les Marins, il en réſulte $u = \frac{99}{100}V$; laquelle vîteſſe équivaut à 8 milles $\frac{1}{4}$ par

---

* On trouve cette valeur en ſubſtituant pour $\cos \beta^2$ ſa valeur $1 - \sin \beta^2$, & en dégageant $\sin \beta^2$. La valeur de $\cos \beta$, ainſi que la ſeconde expreſſion du *maximum maximorum* des vîteſſes, eſt fautive dans l'original.

heure, le vent parcourant 15 pieds par seconde; c'est 6 $\frac{4}{5}$ de moins que ci-dessus. Cette différence est tellement considérable, qu'elle mérite la plus grande attention de tout bon Navigateur: il est vrai que l'angle $\beta = 26^\circ 41'$ qu'il faut former, est bien aigu; mais avec la voile latine il n'y a aucune difficulté pour parvenir à le former, & quand il y s'en présenteroit quelqu'une on ne devroit pas moins faire tout ce qui est possible de faire pour en approcher autant que faire se peut.

(369.) L'examen de la vîtesse latérale $v = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{GA^2rV \cos(\beta-\delta)(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta)}{GA^2R \sin(\beta-\delta)\sin\beta + GA^2r\cos(\beta-\delta)\cos\beta + 20Rr}$, considérée relativement à l'altération qu'elle peut recevoir de la variation de l'angle β, ne nous retiendra pas si long-temps, car on voit, par la formule, que plus ce angle sera petit, plus cette vîtesse sera grande. En effet, $\sin\gamma.\cos\beta.\cos(\beta-\delta)$ augmente dans le numérateur par la diminution de β, tandis que $\cos\gamma.\sin\beta.\cos(\beta-\delta)$ diminue davantage dans les angles aigus, qui sont ceux qui nous importent ici, & que le dénominateur diminue en même temps. De-là, il suit qu'avec les angles les plus avantageux, il y aura plus de dérive qu'avec ceux dont on a coutume de faire usage dans la Marine; mais cette différence n'est pas tellement considérable qu'elle mérite qu'on fasse aucune altération aux angles trouvés, en leur donnant plus d'ouverture. Pour s'en convaincre, il suffira de chercher, dans les deux cas, la valeur de $\tang\theta = \frac{r}{R\tang(\beta-\delta)}$, (353.). Substituant donc, dans cette formule, l'angle avantageux $\beta = 28^\circ 47'$, (364.), avec $\delta = 8^\circ 20'$, on aura $\tang\theta = \ldots\ldots$ $\frac{294}{3316\tang(20^\circ 27')}$, ou $\theta = 13^\circ 22\frac{1}{2}$; mais ce même angle a été trouvé (353.), $= 8^\circ 12\frac{1}{2}$, en se conformant à l'usage des Marins: donc la différence n'est que de $5^\circ 10'$; quantité négligeable, sur-tout lorsqu'il ne s'agit pas de gagner au vent.

(370.) La vîtesse oblique exige encore moins que nous nous y arrêtions; il y a trop peu de différence entre elle & la vîtesse directe, pour nous obliger à nous étendre davantage sur ce point, & à en faire l'objet d'une considération particuliere.

(371.) Enfin, il ne nous reste plus qu'à considérer la vîtesse avec laquelle le Vaisseau gagne au vent, & à examiner quels sont les avantages qu'on peut tirer, sur ce point, de la disposition des voiles. La formule de cette vîtesse est (343.) $W = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{GA^2V(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta) - r\sin\gamma.\cos(\beta-\delta))(\sin\gamma.\cos\beta - \cos\gamma.\sin\beta)}{GA^2R\sin\beta.\sin(\beta-\delta) + GA^2r\cos\beta.\cos(\beta-\delta) + 20Rr}$. Prenant sa différencielle, en supposant β variable, & γ constant, afin de trou-

ver la valeur de β la plus avantageuſe, il en réſulte ....

$$\begin{aligned}&(R\cos\gamma\cos(\beta-\delta)+r\sin\gamma.\sin(\beta-\delta))(\sin\gamma.\cos\beta-\cos\gamma.\sin\beta)(Q\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+F)\\&-(\sin\gamma.\sin\beta+\cos\gamma.\cos\beta)(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta)-r\sin\gamma\cos(\beta-\delta))(Q\sin\beta.\sin(\beta-\delta)+F)\\&-Q(\cos\beta.\sin(\beta-\delta)+\sin\beta.\cos(\beta-\delta))(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta)-r\sin\gamma.\cos(\beta-\delta))\\&(\sin\gamma.\cos\beta-\cos\gamma.\sin\beta)=0\end{aligned}$$

, en ſuppoſant, comme ci-devant, $GA^2(R-r)=Q$, & $GA^2 r\cos\delta+20\,Rr=F$. Cette équation, après la réduction, & après avoir ordonné, donne

$$\left.\begin{matrix}Q\left\{\begin{matrix}R\,\text{tang}\,\gamma\\-r\,\text{tang}\,\gamma^2.\text{tang}\,\delta\\r\,\text{tang}\,\gamma\\r\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta^2\end{matrix}\right.\\F\left\{\begin{matrix}R\,\text{tang}\,\gamma\\R\,\text{tang}\,\delta\\r\,\text{tang}\,\gamma\\r\,\text{tang}\,\gamma^2.\text{tang}\,\delta^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\}\text{tang}\,\beta^2\left.\begin{matrix}+Q\left\{\begin{matrix}-2R\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta\\-2r\,\text{tang}\,\gamma^2\end{matrix}\right.\\+F\left\{\begin{matrix}-Q\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta\\+2R\\-2\,r\,\text{tang}\,\gamma\\-2\,r\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\}\text{tang}\,\beta\left.\begin{matrix}+Q\left\{\begin{matrix}R\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta^2\\r\,\text{tang}\,\gamma^2.\text{tang}\,\delta\end{matrix}\right.\\+F\left\{\begin{matrix}-R\,\text{tang}\,\gamma\\-R\,\text{tang}\,\delta\\-r\,\text{tang}\,\gamma\\r\,\text{tang}\,\gamma^2.\text{tang}\,\delta\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\}=0^{*}.$$

Telle eſt l'équation qui donnera la valeur la plus avantageuſe de l'angle β, en ſuppoſant donnée & conſtante celle de l'angle γ avec lequel on ſe propoſe de naviguer. Mais, ſans nous arrêter à appliquer cette équation à différents exemples, on voit bien, à la ſeule inſpection de la valeur de W, que l'avantage de gagner au vent ne dépend pas ſeulement de la valeur de β. Si l'on ſuppoſe $\text{tang}\,\gamma=\infty$, ou ſi l'on navigue ſur la perpendiculaire du vent, il eſt bien certain qu'on ne gagne nullement au vent, & qu'au contraire on perd, attendu que la valeur de W devient négative. Cette vîteſſe devient pareillement négative, ſi nous ſuppoſons $\gamma=0$ **; d'où l'on doit conclure qu'il y a auſſi une valeur de γ qui donne la plus grande vîteſſe W pour gagner au vent. Pour trouver cette valeur, nous retournerons à différencier la formule, mais en ſuppoſant β conſtant, & γ variable; ce qui donne

$$\begin{aligned}&(\cos\gamma.\cos\beta+\sin\gamma.\sin\beta)(R\cos\gamma.\sin(\beta-\delta)-r\sin\gamma.\cos(\beta-\delta))\\&-(R\sin\gamma.\sin(\beta-\delta)+r\cos\gamma.\cos(\beta-\delta))(\sin\gamma.\cos\beta-\cos\gamma.\sin\beta)=0;\end{aligned}$$

d'où l'on tirera, après avoir fait la réduction, & après avoir ordonné,

$$\text{tang}\,\beta^2+\frac{(R+r)(1-\text{tang}\,\gamma^2-2\,\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\delta)}{2R\,\text{tang}\,\gamma+r\,\text{tang}\,\delta(1-\text{tang}\,\gamma^2)}\text{tang}\,\beta-\frac{R\,\text{tang}\,\delta(1-\text{tang}\,\gamma^2)+2r\,\text{tang}\,\gamma}{2R\,\text{tang}\,\gamma+r\,\text{tang}\,\delta(1-\text{tang}\,\gamma^2)}=0.$$

---

* Le calcul de cette différencielle, & les différentes opérations qui conduiſent à cette équation, n'ont, comme à l'*Art.* 360, d'autre difficulté que leur extrême longueur. Celle-ci exige, à fort peu près, les mêmes attentions, & qu'on obſerve le même ordre : ainſi, on peut conſulter la Note que nous avons donnée pour cet *Art.* 360.

** Car lorſque $\text{tang}\,\gamma=\infty$, on a $\gamma=90^\circ$, & $\cos\gamma=0$, $\sin\gamma=1$: donc le numérateur de la valeur de W ſe réduit à $GA^2V(-r\cos\beta.\cos(\beta-\delta)$; quantité négative. Dans le ſecond cas, lorſque $\gamma=0$, on a $\sin\gamma=0$, & $\cos\gamma=1$, & le numérateur de la valeur de W ſe réduit à $GA^2V(R\sin(\beta-\delta))(-\sin\beta)$; quantité qui eſt pareillement négative.

Si l'on substitue, dans cette équation, la valeur de β trouvée au moyen de l'équation précédente, & qu'on en tire la valeur de γ, on aura les deux angles avantageux β & γ avec lesquels on gagnera au vent le plus qu'il est possible. Nous omettons de faire ici la substitution, parce que l'équation est trop étendue, & que le calcul qu'elle exige est extrêmement long. Au reste, comme cette substitution ne renferme aucune difficulté, tout le monde peut l'exécuter, les deux équations étant données.

(372.) Pour parvenir à la connoissance parfaite de ce que cette théorie nous enseigne, nous devons l'appliquer au Vaisseau dans les deux cas extrêmes, sçavoir, à celui où il y a peu de vent, & qu'il porte toutes ses voiles, & à celui où il y a beaucoup de vent, & qu'il porte peu de voiles. Dans le premier cas, nous pouvons faire $\delta=0$, & les deux équations se changeront en celles-ci, ...
$tang\,\beta^2+\frac{(R+r)(1-tang\,\gamma^2)}{2R\,tang\,\gamma}\,tang\,\beta-\frac{r}{R}=0$, & . . . .
$tang\,\beta^2+\frac{2(FR-r(Q+F)\,tang\,\gamma^2)}{(Q+F)(R+r)\,tang\,\gamma}\,tang\,\beta-\frac{F\,tang\,\gamma}{Q+F}=0$, ou en substituant (360) les valeurs de $Q=GA^2(R-r)$, de $F=r\,(GA^2\cos\delta+20\,R)$, & faisant $G=1$, $A^2=23050$, (352.), $R=3316$, & $r=294$, elles se changeront en $tang\,\beta^2+\frac{3610(1-tang\,\gamma^2)}{2.3316\,tang\,\gamma}\,tang\,\beta-\frac{294}{3316}=0$; & $tang\,\beta^2+\frac{2.294(8937-2893\,tang\,\gamma^2)}{3610.2893\,tan\,\gamma}\,tang\,\beta-\frac{294.8937\,tang\,\gamma}{3316\,.\,2893}=0$. Ces équations étant résolues, donnent $\gamma=56^\circ$, & β $30^\circ\,33'$; ce sont les angles avantageux que doivent former les vents & les vergues avec la quille, pour que le Vaisseau gagne au vent le plus qu'il est possible, en supposant que le vent soit très-foible, & que le Vaisseau porte tout son appareil. Le premier de ces angles est moindre de 9° que celui dont les Marins se servent, & le second est moindre de $9^\circ\,27'$.

(373.) Pour le second cas extrême, nous ferons (352.), $\delta=21^\circ$, ou $tang\,\delta=0{,}383864$, $G=\frac{9}{10}$, & $A^2=6130$, & les deux équations se changeront dans les deux suivantes . . . .
$tang\,\beta^2+\frac{3610(1-0{,}767728\,tang\,\gamma-tang\,\gamma^2)}{112{,}856(1-tang\,\gamma^2)+6632\,tang\,\gamma}\,tang\,\beta-\frac{1272{,}89(1-tang\,\gamma^2)+588\,tang\,\gamma}{112{,}856(1-tang\,\gamma^2)+6632\,tang\,\gamma}$
$=0$, & $tang\,\beta^2-\frac{2(32089\,tang\,\gamma^2+18784\,tang\,\gamma-23690)}{99823\,tang\,\gamma+tang\,\gamma^2}\,tang\,\beta+$ . . . . .
$\frac{2057\,tang\,\gamma^2-22740\,tang\,\gamma-12932}{99823\,tang\,\gamma+tang\,\gamma^2}=0$, lesquelles, étant résolues, donnent $\gamma=84^\circ$, & $\beta=82^\circ\,14'$: ce sont les angles avantageux, c'est-à-dire, ceux que le vent & les vergues doivent former avec la quille, pour que le Vaisseau gagne au vent le plus qu'il est possible, en

ſuppoſant qu'il ne porte que les deux baſſes voiles, & que le vent ſoit très-fort. Le premier de ces angles eſt plus grand de $19° 16'$ que celui qu'emploient les Marins; & le ſecond de $42° 14'$; c'eſt-à-dire qu'il eſt à peu près double de celui qu'on admet dans la pratique. Cet angle, tout avantageux qu'il eſt, ne doit cependant pas être mis en uſage, & cela pour les raiſons qu'on expoſera par la ſuite.

(374.) Les deux exemples précédents nous donnent la ſolution des deux cas extrêmes, dans leſquels il ſe trouve la plus grande différence dans les angles γ & β; mais les valeurs de ces angles ſe trouvent affectées de l'expreſſion de la force du vent, & de celle de la quantité de voiles. Pour trouver ce qui appartient à la ſeule altération de la voilure, nous pouvons réſoudre les deux équations, en ſuppoſant, comme dans le premier cas, que le vent eſt petit, ou que $\delta = 0$; mais en employant ſeulement la voilure du ſecond cas, c'eſt-à-dire, en faiſant $A^2 = 6130$. Dans ce troiſieme cas, G ſera de même $= 1$; par conſéquent les deux équations ſe reduiront à $tang\ \beta^2 + \frac{3610\,(1 - tang\ \gamma^2)}{2.3316\ tang\ \gamma}\ tang\ \beta - \frac{294}{3316} = 0$, & $tang\ \beta^2 + \frac{2.294\,(7245 - 1201\ tang\ \gamma^2)}{3316.1201\ tang\ \gamma}\ tang\ \beta - \frac{294.7245\ tang\ \gamma}{3316.1201} = 0$. Ces équations étant réſolues, donnent $\gamma = 66° 13'$, & $\beta = 47° 20'$: ce ſont les angles avantageux que doivent former le vent & les vergues avec la quille, pour gagner au vent le plus qu'il eſt poſſible, en ſuppoſant le vent très-foible, & que la ſurface des voiles eſt ſeulement de 6130 pieds quarrés.

(375.) La différence des angles les plus avantageux pour un Vaiſſeau qui porte toute ſa voilure, & pour le même Vaiſſeau qui n'en porte que peu, le vent étant ſuppoſé foible dans ces deux cas, eſt celle de $56°$ & $30° 33'$ à $66° 13'$, & $47° 20'$: c'eſt-à-dire, de $10° 13'$ dans l'angle du vent, & $16° 47'$ dans celui des vergues. Et dans le cas où le Vaiſſeau porte peu de voiles, la différence pour un vent foible & pour un vent fort eſt celle de $66° 13$ & $47° 20$ à $84° 44$, & $82° 14$: c'eſt-à-dire, de $18° 31'$ dans l'angle du vent, & de $34° 54'$ dans celui des vergues: d'où l'on voit que les angles doivent augmenter à meſure que le vent augmente, & que les voiles diminuent; c'eſt une conſéquence évidente de ce qu'on vient de voir dans les *Articles* 372 & 373 où l'on a réſolu les deux cas extrêmes.

(376.) Maintenant, pour faire voir avec clarté l'avantage que peuvent produire ces angles, nous allons chercher la vîteſſe W, avec laquelle le Vaiſſeau gagne au vent, tant en employant ces mêmes angles, qu'en employant ceux dont ſe ſervent les Marins:

&

& pour plus de facilité, nous nous réduirons à confidérer le cas dans lequel le Vaiffeau porte toute fa voilure, & que le vent eft foible, c'eft-à-dire, celui où $\delta = 0$, & $G = 1$: en conféquence, la formule fe réduit à $W = \frac{A^2 V \sin\alpha (R \cos\gamma . \sin\beta - r \sin\gamma . \cos\beta)}{A^2 R \sin\beta^2 + A^2 r \cos\beta^2 + 20 Rr}$; ou, en fubftituant (352.), $A^2 = 23050$, $R = 3316$, & $r = 294$, elle fe réduit à $W = \frac{23050 . V \sin\alpha (R \cos\gamma . \sin\beta - r \sin\gamma . \cos\beta)}{23050 . 3316 \sin\beta^2 + 23050 . 294 \cos\beta^2 + 19498080}$. Subftituant donc dans cette derniere formule les angles avantageux trouvés, *Art.* 372, qui font $\gamma = 56°$, & $\beta = 30° 33'$, on aura $W = \frac{725649}{4427128} V$; ou, à très-peu près, $W = \frac{164}{1000} V$: & en faifant, fuivant l'ufage des Marins, $\gamma = 65°$, & $\beta = 40°$, la formule fe réduit à $W = \frac{678467}{5505534} V$, qui donne, à très-peu près, $W = \frac{125}{1000} V$: de forte qu'en fe fervant des angles avantageux que donne la théorie, on peut gagner au vent prefque un tiers de plus qu'on ne fait en fuivant la pratique ordinaire.

(377.) Ces confidérations nous paroiffent devoir être fuffifantes pour engager les Marins à chercher tous les moyens poffibles de diminuer les angles qu'ils emploient, foit par le moyen des *Droffes*, foit en lâchant tout-à-fait les premiers haubans de l'avant du côté fous le vent : car, comme c'eft feulement dans le cas d'un petit vent qu'on a befoin de rendre ces angles auffi aigus, cette circonftance donne lieu de pouvoir affujettir de nouveau les haubans & les vergues lorfque le vent vient à augmenter, fans que, pour cela, les vergues ceffent de former les angles avantageux dont on auroit befoin ; parce qu'ils fe trouvent augmentés par l'augmentation du vent. Avec les voiles latines, les mêmes angles font encore plus aigus, attendu que, pour les Embarcations qui en font ufage, le rapport $\frac{R}{r}$ eft plus grand : mais la difpofition de leurs vergues permet toujours de les former tels qu'il eft néceffaire.

(378.) On voit clairement que la valeur de β, qu'on a trouvée pour gagner au vent, n'eft pas la même que celle qu'on a trouvée, *Art.* 360, pour faire prendre au Navire la plus grande vîteffe directe ; & cela doit être ainfi, attendu que ces deux valeurs ont été conclues d'équations très-différentes. On ne doit pas, par cette raifon, employer la premiere de ces valeurs, encore qu'on navigue à la bouline, fi ce n'eft dans le cas où il eft queftion de gagner au vent ; lorfqu'il s'agira feulement de la marche du Navire, ce fera la feconde qu'il faudra mettre en pratique.

CHAPITRE III.

De l'Inclinaiſon que prend le Vaiſſeau, par la force que produit le Vent ſur les Voiles.

(379.) NOUS avons déjà donné (*Liv. II*, *Chap. VI.*) l'expreſſion de la force, ou des moments avec leſquels le côté du Navire réſiſte à l'Inclinaiſon : c'eſt dans cette même force, ou réſiſtance, que conſiſte ce qu'on doit nommer légitimement la qualité de *porter la voile* (196, *Note.*), lorſque cette action provient de la force avec laquelle la voile agit. Nous avons auſſi donné (281.) les moments de la voile, & par les principes que nous avons expoſés, il doit y avoir équilibre dans l'Inclinaiſon, lorſque ces deux moments deviennent égaux ; de ſorte que, formant une équation de ces moments, on en tirera la valeur de l'Inclinaiſon. Si les moments du côté étoient infinis, par rapport à ceux de la voile, l'Inclinaiſon ſeroit nulle ; mais, comme la largeur du Vaiſſeau ne peut être très-grande, il eſt clair que les moments du côté doivent être limités, & que par conſéquent l'Inclinaiſon doit néceſſairement avoir lieu. On pourroit cependant la diminuer, en diminuant les moments de la voile, ou en abaiſſant beaucoup le centre de ſes forces (281.) ; mais cette diſpoſition a auſſi des inconvénients qu'il n'eſt pas poſſible d'éviter dans la pratique, particuliérement à la mer ; par conſéquent nous ne pouvons remédier abſolument aux inconvénients de l'Inclinaiſon, qui peuvent même avoir des ſuites funeſtes dans pluſieurs occaſions.

(380.) Les moments avec leſquels le côté du Vaiſſeau réſiſte à l'Inclinaiſon, ſont $= mKU \sin\Delta + \frac{2}{3}(mvkR + \frac{1}{4} mv\int chx^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{4} mv\int fgx^{\frac{3}{2}})$, (197 & 205.), en ſuppoſant que Δ exprime l'angle de l'Inclinaiſon, m la denſité de l'eau, U le volume de fluide que déplace le Vaiſſeau, & v la vîteſſe du Vaiſſeau, qui, dans ce cas, eſt la vîteſſe latérale.

(381.) Les moments avec leſquels la voile agit, ont été trouvés (281.), $= \frac{1}{16} nmVGA^2 \sin\alpha$, n exprimant la hauteur du centre des forces des voiles au-deſſus de l'axe de rotation. Mais ces moments agiſſent ſuivant la direction de l'action des voiles, & ſont pour le cas où, V exprimant la vîteſſe du vent, la voile eſt en repos, ou que le Vaiſſeau eſt ſans aucun mouvement. Il eſt donc néceſſaire de réduire ces moments aux moments latéraux, & au cas dans lequel le Vaiſſeau marche, & que toute la force du vent n'agit pas ſur la voile. La

vîteſſe avec laquelle le vent agit perpendiculairement ſur la voile, a été trouvée (338.), $= V \sin \alpha - u \sin \beta - v \cos \beta$; c'eſt cette quantité que nous devons ſubſtituer, dans la formule, en place de $V \sin \alpha$ ſeul. Pareillement, la force directe avec laquelle la voile agit, eſt à la force latérale qui en réſulte (338.), comme l'unité eſt à $\cos(\beta - \delta)$; donc, pour réduire la force directe à la force latérale, il ne faut que multiplier la premiere par $\cos(\beta - \delta)$: l'expreſſion des moments latéraux avec leſquels la voile agit, ſera donc $=$ . . . .
$\frac{1}{20} nmGA^2 \cos(\beta - \delta)(V \sin \alpha - u \sin \beta - v \cos \beta)$.

(382.) Les quantités u & v expriment les vîteſſes directes & latérales du Vaiſſeau. Or la premiere a été trouvée, (339.), $=$ . .
$\frac{GA^2RV \sin \alpha \sin(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$, & la ſeconde $=$ . . .
$\frac{GA^2rV \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$: ces valeurs étant ſubſtituées dans la formule des moments latéraux, ces moments deviendront $=$
$\frac{1}{20} nmGA^2 \cos(\beta-\delta)\left(V \sin \alpha - \frac{GA^2V \sin \alpha (R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + r \cos \beta . \cos(\beta-\delta))}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}\right)$
$= \frac{nmGA^2VRr \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$; expreſſion qui (255.) ſe réduit à $\frac{\frac{2}{3} nmGA^2VRr \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$. Egalant maintenant ces moments à ceux qu'éprouve le côté du Vaiſſeau, & diviſant les uns & les autres par m, nous aurons l'équation $KU \sin \Delta +$ . . . . .
$\frac{2}{3}(ukR + \frac{1}{2} v \int chx^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} v \int\int fgx^{\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{2}{3} nGA^2VrR \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta 0) + 2 Rr}$;
qui donne le ſinus de l'inclinaiſon du Vaiſſeau, ou $\sin \Delta =$ . . . .

$$\frac{\frac{\frac{2}{3} nGA^2VRr \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr} - \frac{2}{3} v(kR + \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2}\int\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KU}$$

(383.) Cette formule peut beaucoup ſe ſimplifier par un autre moyen ; car les moments latéraux des voiles exprimés par . . . . .
$\frac{nGA^2VRr \sin \alpha . \cos(\beta+\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$, ne ſont autre choſe que le produit de la vîteſſe latérale $v = \frac{GA^2rV \sin \alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R \sin \beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2 r \cos \beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$ multipliée par nR : ainſi, en ſubſtituant cette valeur dans celle de $\sin \Delta$, on aura $\sin \Delta = \frac{\frac{2}{3} v(nR - kR - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}} y + \frac{1}{2}\int\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KU}$; mais (340.), $v =$
$\frac{ru}{R \tang(\beta-\delta)}$, on aura donc auſſi $\sin \Delta = \frac{\frac{2}{3} ru(nR - kR - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}} y + \frac{1}{2}\int\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KUR \tang(\beta-\delta)}$; ou, ſi nous négligeons les trois derniers termes du numérateur, comme l'ont fait juſqu'à préſent tous les Auteurs, on aura $\sin \Delta =$ . . . . .
$\frac{\frac{2}{3} nru}{KU \tang(\beta-\delta)} = \frac{\frac{2}{3} nRv}{KU}$.

(384.) Cette formule nous fait voir, non seulement combien il est important que le centre d'effort des voiles soit peu élevé, ou que la quantité n soit petite, mais elle fait voir aussi de quelle importance il est que les voiles ne soient pas très-courbes, afin que δ n'augmente pas; car plus cette quantité augmentera, ou plus les voiles prendront de courbure, plus l'Inclinaison sera grande (*a*).

(385.) Pour le Vaisseau de 60 canons, qu'on suppose naviguer avec toute la voilure qu'il peut porter à la bouline, on a trouvé (282.), $n = 70\frac{1}{4}$; (187.), $r = 294$; (166.), $K = 9\frac{1}{8}$; (112.), $U = 68650$; & (352.), $tang\,(\beta - \delta) = tang\,(31^\circ\,40') = 0,6188$: donc on aura

(*a*) M. *Bouguer*, dans son *Traité de la Mâture des Vaisseaux*, a cherché le moyen d'empêcher que les Vaisseaux prennent aucune Inclinaison, & cela en abaissant le centre d'effort des voiles, ou en diminuant la valeur de n; & il a donné le nom de *point Vélique* au point où l'on doit placer ce centre, pour qu'effectivement le Vaisseau ne prenne aucune Inclinaison. Notre formule donne beaucoup de facilité pour la détermination de ce point. Pour cela, il n'y a qu'à égaler à zéro le numérateur, c'est-à-dire, former cette équation $nR - kR - \frac{1}{7}\int chx^{\frac{5}{2}}y + \frac{1}{2}\int\int fgx^{\frac{3}{2}} = 0$: car on en tirera $n = \ldots\ldots$ $k + \frac{1}{2}\left(\frac{\int chx^{\frac{5}{2}}y - \int\int fgx^{\frac{3}{2}}}{R}\right)$; c'est l'expression de la hauteur que doit avoir le centre d'effort des voiles, ou le point Vélique au-dessus du centre de gravité pour que le Vaisseau demeure parfaitement droit, soit que le vent soit violent, ou non, soit qu'il y ait beaucoup de voiles dehors, ou qu'il y en ait peu. Mais comme k marque l'élévation du centre de gravité au-dessus de la surface de l'eau, la quantité $\frac{\int chx^{\frac{5}{2}}y - \int\int fgx^{\frac{3}{2}}}{2R}$ sera la hauteur à laquelle le point Vélique doit être au-dessus de la superficie de l'eau. Dans le Vaisseau de 60 canons de notre exemple, on a (204.), $\frac{1}{7}\int chx^{\frac{5}{2}}y = 25398$; $\frac{1}{2}\int\int fgx^{\frac{3}{2}} = 40626$, (200.); & $R = 3316$; donc n sera $= \frac{25398 - 40626}{3316} = -4\frac{1764}{3316}$; c'est-à-dire, que le point Vélique seroit abaissé de 4 pieds $\frac{1}{2}$ au-dessous de la superficie de l'eau: ce qui prouve l'impossibilité d'exécuter ce projet.

Cette difficulté n'a point échappé à M. *Bouguer*, particuliérement dans les Inclinaisons latérales (*Sect. II*, *Chap. III*, §. 3), & pour y apporter remede, il propose de disposer les voiles dans une situation inclinée à l'horison, en éloignant du mât leur extrémité inférieure, avec des *bouts-dehors*. Pour ne pas trop nous retarder, nous ométerons d'exposer les difficultés & les risques sans nombre auxquels une pareille disposition seroit exposée. Nous en userons de même à l'égard de la proposition que fait le même Auteur, (*sect. I*, *Chap. IX*, §. 4) d'augmenter l'envergure jusqu'à lui donner deux fois, ou deux fois & demi la longueur qu'elle a dans l'état actuel des choses; car il n'y a aucun Marin qui n'apperçoive au premier coup d'œil tous les inconvénients de cette envergure excessive. M. *Bouguer* avoue lui-même que les basses-vergues seroient exposées aux coups de mer, & par cette raison il raccourcit celles qui, dans la disposition qu'il propose, devroient porter sur le bord même du Navire. Je crois qu'il auroit proposé la même chose pour les autres vergues, s'il eût sçu qu'il y a des Vaisseaux dont les extrémités des vergues, quoique de la longueur ordinaire, sont souvent noyées sous les eaux, quoiqu'elles soient placées deux fois, ou deux fois & demie, plus haut que cet Auteur n'auroit voulu les placer. Mais nous lui devons la justice de dire qu'il enjoint ensuite (*Sect. I*, *Chap. IX*, §. 4) de ne pas rendre les vergues plus grandes que ne le permet la possibilité de les orienter avec commodité: ce principe joint à d'autres considérations dont nous parlerons par la suite, & sur-tout l'impossibilité de conserver au Vaisseau la qualité de bien gouverner avec un tel appareil, est plus que suffisant pour conserver l'envergure qui est en usage aujourd'hui.

$\text{fin}\ \Delta = \frac{\frac{2}{3} \cdot 70\frac{1}{2} \cdot 294 \cdot u}{9\frac{1}{3} \cdot 68650 \cdot 0,6168} = \frac{331622}{9273321} u$. Si donc la vîteffe du vent étoit de 10 pieds par feconde, on auroit (352.), $u = \frac{335}{100}$, & $\text{fin}\ \Delta = \frac{11109337}{92733210}$; d'où il fuit que l'angle Δ de l'Inclinaifon eft à peu près $= 6° 53'$. Si la vîteffe du vent étoit de 15 pieds par feconde, on auroit $u = \frac{21}{4}$, & $\text{fin}\ \Delta = \frac{6964062}{37093284}$, ou l'angle Δ de l'Inclinaifon $= 10° 49'$, à fort peu près.

(386.) Les trois quantités que nous fupprimons dans la formule, diminuent ces inclinaifons; mais, dans le Vaiffeau de 60 canons, qui nous fert d'exemple, elles font très-négligeables; car, en fubftituant leurs valeurs (205.), on trouvera $\text{fin}\ \Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{\frac{2}{3} \cdot 294 \cdot u(70\frac{1}{2} \cdot 3316 - 4\frac{19}{24} \cdot 3316 - 25398 + 406269)}{9\frac{1}{3} \cdot 68650 \cdot 3316 \cdot 0,6168} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 294 \cdot u(70\frac{1}{2} \cdot 3316 - 661)}{9\frac{1}{3} \cdot 68650 \cdot 3316 \cdot 0,6168}$: d'où l'on voit que la feconde quantité qui réfulte des trois que nous avons omifes, n'eft que $\frac{1}{353}$ de la premiere; & par conféquent qu'elle ne peut diminuer les Inclinaifons précédentes, que de $\frac{1}{353}$; c'eft-à-dire qu'elle ne peut diminuer la premiere que d'un peu plus d'une minute, & la feconde d'environ deux minutes; quantités qui, comme l'on voit, ne méritent aucune confidération. Par conféquent, nous pouvons établir en général, pour ce Vaiffeau, & autres femblables, $\text{fin}\ \Delta = \frac{\frac{2}{3} nru}{KU\ \text{tang}(\beta - \delta)}$; formule qui fe réduit, dans le Vaiffeau de 60 canons, à $\text{fin}\ \Delta = \frac{784\, nu}{2505725\ \text{tang}(\beta - \delta)}$. Dans d'autres Vaiffeaux dont les couples feroient moins pleins dans leurs fonds, la différence des trois quantités négligées peut être négative, & contribuer par conféquent à augmenter l'Inclinaifon, & cela d'autant plus, que les couples feront plus aigus, ou plus taillés.

(387.) Retournant donc aux exemples, & fuppofant toutes les petites voiles ferrées, telles que les perroquets, & même qu'il y ait un ris pris dans les huniers, on a trouvé (372.), $G = \frac{93}{100}$, $\delta = 15°$, & $u = \frac{9785}{37753} V$; & ayant de plus (282.), $n = 63$, on aura $\text{fin}\ \Delta = \frac{784 \cdot 63 \cdot 9785\, V}{2505725 \cdot \text{tang}(25°) 37753} = 0,010958\, V$: de forte que, fi le vent parcouroit 20 pieds par feconde, comme nous l'avons fuppofé, *Art.* 352, on auroit $\text{fin}\ \Delta = \frac{21917}{100000}$, ou, à fort peu près, l'angle de l'Inclinaifon $= 12° 40'$. Si le vent parcouroit 25 pieds par feconde, on auroit $\text{fin}\ \Delta = \frac{273963}{1000000}$, ou, à peu près, l'angle Δ de l'Inclinaifon $=$

15° 54'. Cette inclinaison paroit excessive; car par elle l'eau arriveroit un pied plus haut que les seuillets des sabords de la premiere batterie : ainsi, on doit conclure que la quantité de voiles qu'on a supposé que portoit le Vaisseau, est trop grande; lorsque le vent parcourt 25 pieds par seconde (*a*).

(*a*) Les inclinaisons des Vaisseaux nous donnent lieu maintenant d'exposer une autre absurdité très-évidente qui résulte de l'ancien systême des résistances des fluides, qui a été adopté jusqu'ici, de même que des expériences faites par M. *Mariotte*, dont nous avons parlé dans le *Scolie* de la *Prop. XXVI*, *Liv. II*, *Tome I*, *Art.* 644 : mais pour qu'il ne demeure sur ce point aucun doute, & pour éloigner tout soupçon de partialité, nous ne nous servirons d'aucune des choses qui résultent de celui que nous avons nouvellement proposé.

Dans la Note que nous avons donnée (352.) pour le cas où le Vaisseau est supposé naviguer à la bouline, en portant toute sa voilure qui est de 23050 pieds quarrés, nous avons trouvé cette équation, $u = \frac{131}{1000} V$, qui est précisément celle qui résulte de l'ancienne théorie. Supposons donc que le Vaisseau, avec cet appareil, puisse faire 6 milles par heure; cela est un peu difficile, mais il vaut mieux supposer ce qu'il y a de plus avantageux, pour qu'il n'y ait plus moyen de revenir sur la conséquence : on aura donc, dans ce cas, $u = 10 = \frac{131}{1000} V$, ce qui donnera $V = \frac{10000}{131}$, c'est-à-dire que la vitesse que la supposition qu'on a faite doit donner au vent est, à fort peu près, $= 76\frac{1}{3}$: vitesse effrayante; mais nous la supposerons ainsi pour un instant, afin de donner plus d'avantage à l'ancien systême. Les Marins sçavent très-bien que dans une marche de cette espece à la bouline, le Vaisseau doit s'Incliner considérablement, peut-être jusqu'à avoir les seuillets des sabords de la premiere batterie à l'eau; ou, ce qui est la même chose, le Navire sera peut-être Incliné sous un angle dont le sinus est $= \frac{1}{4}$; mais supposons que le sinus de l'angle d'Inclinaison soit seulement $= \frac{1}{6}$, ou que cet angle soit seulement à peu près de 9 dégrés $\frac{1}{2}$. Pour exprimer le moment qu'éprouve, dans ce cas, le côté du Vaisseau; nous prendrons la formule $mKU \sin \Delta$, en négligeant toutes les autres quantités, afin que le tout devienne favorable à l'ancienne théorie : & ayant à peu près $m = 64$ *livres*, ou $\frac{64}{100}$ quintaux, le moment se réduit à $\frac{64}{100} . 9\frac{1}{8} . 68650 . \frac{1}{6}$. Or ce moment doit être égal à celui qui résulte des voiles, lequel a pour expression le produit de la force qu'elles exercent, par la distance du centre de cette force, à l'axe de rotation du Vaisseau; distance que nous avons trouvée $= 70\frac{1}{2}$. Si nous nommons donc F la force que produisent les voiles, on aura $F . 70\frac{1}{2} = \frac{64}{100} . 9\frac{1}{8} . 68650 . \frac{1}{6}$, d'où l'on tire $F = \frac{400916}{423}$; c'est-à-dire, que la force des voiles est équivalente au poids de 948 quintaux. M. *Mariotte*, comme nous l'avons dit dans le *Scolie* cité ci-dessus, (*Tome I*, *Art.* 644.) a trouvé, par ses expériences, que la force qui agit sur une surface d'un demi pied quarré de France, qui seroit exposée au courant d'une riviere dont la vitesse est d'un pied $\frac{1}{4}$ par seconde, est équivalente à un poids de 9 onces. Ainsi, en suivant l'ancien systême qui fait les résistances comme les quarrés des vitesses, l'effort que supportera la même surface exposee à un courant dont la vitesse est d'un pied par seconde, sera $= \frac{16 . 9}{25}$; & si la surface est d'un pied quarré, l'effort qu'elle supportera sera de $\frac{4 . 16 . 9}{25}$ onces : ce qui s'accorde avec ce que nous dit M. *Bouguer* (*Traité du Navire*, *Liv. III*, *Sect. I*, *Chap. II* *page* 357), qui donne cette force de 23 onces. Réduisant tout en mesures Anglaises, nous aurons à peu près 18 onces, pour la force qu'éprouvera une surface d'un pied quarré, exposée au courant dont la vitesse est d'un pied par seconde. L'effort que soutient la même surface exposée au vent, celui-ci ayant la même vitesse que le courant, est de $\frac{18}{1000}$ onces, en supposant que la densité de l'eau douce est à celle de l'air comme 1000 est à l'unité; mais le

(388.) Reprenant donc les exemples de l'*Art.* 352, & ſuppoſant que le Vaiſſeau demeure avec ſes deux baſſes voiles, les huniers avec tous les ris pris, l'artimon & le faux foc, G étant $= \frac{9}{10}$, & $\delta = 21°$, d'où il a réſulté $u = \frac{489}{2874} V$; à cauſe que (282.), $n = 55$, nous aurons $\sin \Delta = \frac{784 . 55 . 489 . V}{2505725 . 2874 \tan (19°)} =$, à très-peu près, $\frac{85 V}{10000}$: de ſorte que ſi le vent parcouroit 25 pieds par ſeconde, on auroit $\sin \Delta = 0,2125$, c'eſt-à-dire que l'angle Δ de l'Inclinaiſon $= 12° 16'$; & ſi le vent parcouroit 30 pieds, on auroit $\sin \Delta = 0,2550$, ou l'angle Δ de l'Inclinaiſon $= 14° 46$; de façon qu'avec cette Inclinaiſon, l'eau arriveroit aux ſeuillets des ſabords de la premiere batterie. Enfin, ſuppoſant que le Vaiſſeau demeure ſeulement avec ſes deux baſſes voiles, & ſuppoſant à G & à δ les mêmes valeurs, on a (352.), $u = \frac{103}{1000} V$, & (282.), $n = 43$, par conſéquent $\sin \Delta$ ſera $= \frac{784 . 43 . 103 . V}{2505725 . 1000 . \tan (19°)}$, ou à peu près $= \frac{4}{1000} V$: de ſorte que ſi le vent parcouroit 30 pieds par ſeconde, l'Inclinaiſon Δ ſeroit de $6° 54'$: s'il en parcouroit 40, Δ ſeroit $= 9° 13'$: s'il en parcouroit 50, Δ ſeroit $= 11° 33'$: enfin, s'il en parcouroit 60, Δ ſeroit $= 13° 54'$: d'où l'on voit qu'avec les deux baſſes voiles, le

---

vent choquant les voiles avec une vîteſſe de 76 pieds $\frac{1}{3}$, il faut augmenter cette quantité $\frac{18}{1000}$ dans la raiſon du quarré de cette vîteſſe; & l'on aura à peu près 105 onces pour la valeur de la force que ſoutiendra chaque pied quarré de voilure, & cela ſans rien retrancher pour le mouvement du Vaiſſeau qui abat & qui diminue la vîteſſe du vent: par conſéquent les 23050 pieds quarrés ſupporteront un effort de 105 . 23050 onces. Cette évaluation eſt pour le cas dans lequel le vent frapperoit perpendiculairement la voile; ou dans lequel la direction de cette force lui ſeroit perpendiculaire: pour la réduire à une force latérale, nous devons la multiplier par $\sin \alpha . \sin \beta . \cos \beta$, ou à peu près par $\frac{208}{1000}$: dans le cas préſent, la force latérale des voiles ſera donc $= 503412$ onces; ou en diviſant par 1600, nombre d'onces que contient un quintal, la même force ſera à peu près de 315 quintaux; quantité bien éloignée des 948 que nous avons trouvés ci-deſſus, celle-ci étant trois fois plus grande. On ne peut pas dire que cela dépende de l'Inclinaiſon que nous avons ſuppoſée au Vaiſſeau, qui eſt telle que ſon ſinus $= \frac{1}{6}$, ou, ce qui revient au même, que cet angle eſt de 9 dégrés $\frac{1}{2}$, car cette Inclinaiſon eſt ſuffiſamment petite reſpectivement à la violence du vent, & à la marche exorbitante du Vaiſſeau, que nous avons ſuppoſée de 6 milles à la bouline, portant tout ſon appareil, ou toute ſa voilure déployée. Si l'on fait attention que pour obtenir une conformité parfaite, il ſeroit néceſſaire de réduire l'Inclinaiſon à la troiſieme partie de celle que nous avons ſuppoſée, c'eſt-à-dire, la réduire ſeulement à $3° 11'$, on verra que cela eſt abſolument impoſſible. On ne peut pas non plus attribuer cette différence aux vîteſſes ſuppoſées pour le vent & pour le Vaiſſeau, parce que, pour obtenir la conformité des réſultats, il ſeroit néceſſaire de les augmenter dans la raiſon de 4 à 7, c'eſt-à-dire, ſuppoſer la vîteſſe du vent de 133 pieds $\frac{1}{2}$ par ſeconde, & celle du Vaiſſeau de 18 pieds $\frac{1}{7}$; mais dans ce cas le Vaiſſeau devroit faire environ 11 milles par heure. De ce qu'on vient de dire, on doit conclure que cette différence vient du principe erroné qu'on a ſuivi ſur la réſiſtance des fluides, & des expériences abſolument fautives de M. *Mariotte*, que nous affirme également M. *Bouguer*.

Vaiſſeau eſt capable de ſupporter l'action de vents très-violents, pourvu que les voiles ou les mâts puiſſent également la ſupporter. Au reſte, tous les réſultats de ces exemples peuvent varier ſuivant les différentes valeurs qu'on donnera à δ; mais nous pouvons nous convaincre que nous l'avons ſuppoſée un peu plus grande qu'elle n'eſt réellement, particuliérement dans les exemples de ces deux derniers *Articles*, à l'exception cependant du dernier, dans lequel on a ſuppoſé que le Vaiſſeau naviguoit avec les deux baſſes voiles ſeulement; d'où l'on voit que les vraies Inclinaiſons ſeront encore moindres que celles qu'on vient de trouver.

(389.) Par la formule $\sin \Delta = \frac{784\, nu}{2505725 \tan(\beta - \delta)}$ qu'on a donnée, *Art.* 386, on peut trouver la force du vent que peuvent ſupporter les mâts, les vergues, & les voiles, avec un appareil déterminé. Suppoſons qu'avec toutes les voiles on ait obſervé que la mâture puiſſe tenir contre l'action du vent juſqu'à ce que le Vaiſſeau ait pris une Inclinaiſon de 12 dégrés, & nous aurons $\sin 12° = \frac{784\, nu}{2505725 \tan(\beta - \delta)}$, ou, parce que dans ce cas on a (282.) $n = 70\frac{1}{2}$, & $\tan(\beta - \delta) = \tan(31° 40')$, & (352.), $u = \frac{335}{1000} V$; on aura donc $\sin 12° = \frac{70\frac{1}{2} . 784 . 335\, V}{1000 . 2505725 \tan(31° 40')}$, & $V = \ldots\ldots$ $\frac{1000 . 2505725 . \sin 12° . \tan(31° 40')}{70\frac{1}{2} . 784 . 335}$, c'eſt-à-dire, à peu près, $V = 21$ pieds $\frac{85}{100}$; telle eſt la vîteſſe du vent que peut ſupporter le Vaiſſeau naviguant à la bouline, & portant toutes ſes voiles. On peut trouver, de la même maniere, la vîteſſe du vent qu'il peut ſupporter dans tous les autres cas.

(390.) Nous n'avons pas beſoin de chercher l'Inclinaiſon que prendra le Vaiſſeau en naviguant vent largue, parce que, dans ce cas, $\tan(\beta - \delta)$ devient plus grande, & par conſéquent l'Inclinaiſon devient moindre: mais il eſt un autre cas que nous devons d'autant moins paſſer ſous ſilence, qu'il fait ordinairement la terreur des Marins, qu'il a fait périr un grand nombre de Bâtiments, & que, faute d'une connoiſſance parfaite, il n'eſt pas même encore ſuffiſamment rédouté. Cet accident, que les Marins appellent *Coëffer*, ou *Maſquer* *, a lieu lorſqu'en naviguant par un vent violent, il arrive, ſoit par le défaut de ſoin du Timonier, ſoit parce que le vent, changeant tout à coup, vient à prendre les voiles en face; c'eſt-à-dire, que le vent vient à les frapper par

* On l'appelle auſſi *faire Chapelle*. Les Eſpagnols l'appellent *tomar por aluä*, ou *tomar por la aluä*.

la

la partie opposée de la proue, ou sous le vent. Dans ce cas, $\sin\alpha$ est négatif, ainsi que la quantité . . . . $\frac{\frac{2}{3} n GA^2VRr \sin\alpha . \cos(\beta-\delta)}{GA^2R . \sin\beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2r \cos\beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr}$, ce qui donne à l'équation, qui exprime la valeur du sinus de l'Inclinaison, la forme $-\sin\Delta = \frac{\frac{2}{3} n GA^2VRr \sin\alpha . \cos(\beta-\delta)}{KU(GA^2R \sin\beta . \sin(\beta-\delta) + GA^2r \cos\beta . \cos(\beta-\delta) + 20 Rr)} +$. $\frac{2v}{3KU}(kR + \frac{1}{4}\int chx^{\frac{1}{2}}y - \frac{1}{4}\int\int gx^{\frac{3}{2}})$, le signe négatif de $\sin\Delta$ ne signifiant autre chose, comme on le sçait, si ce n'est que l'Inclinaison se fait du côté opposé. Les deux quantités qui composent le second membre, ont maintenant le même signe; ainsi la seconde doit s'ajouter à la premiere, tandis qu'auparavant elle devoit en être retranchée. Mais ce n'est pas encore ce qui mérite le plus d'attention; la premiere quantité qui paroît avoir la même valeur qu'auparavant, ne l'a cependant pas, parce que la valeur de α varie, à cause que le vent peut augmenter l'angle qu'il forme avec les voiles, selon le lans * que donne le Navire vers le vent, selon la quantité dont il abat, ou selon que le vent varie : de sorte qu'il peut arriver que $\sin\alpha$ devienne $= 1$. Quoi qu'il en soit, la premiere quantité $\frac{\frac{2}{3} nru}{KU \tan(\beta-\delta)}$ à laquelle on a vu ci-dessus que se réduisoit la formule, sera à celle que nous cherchons, pour le cas où le Vaisseau est coëffé, comme $\sin 25^\circ$, valeur de $\sin\alpha$ lorsqu'on navigue à la bouline, est à $\sin\alpha$ dans le cas du *coëffage*, c'est-à-dire, au sinus de l'angle que formera le vent avec les voiles dans le cas où le Vaisseau est coëffé : de sorte que si ce sinus étoit $= 1$, nous aurions, pour ce cas, $-\sin\Delta =$ . . . $\frac{\frac{2}{3} nru}{KU \tan(\beta-\delta) \sin(25^\circ)}$: d'où il suit que pour trouver ces Inclinaisons, il ne faut que diviser les précédentes par $\sin 25^\circ$. Dans le cas où le Vaisseau porte ses deux basses voiles, nous avons trouvé (388.), $\sin\Delta = \frac{4}{1000} V$; par conséquent, si dans ce cas le Vaisseau venoit à coëffer, on auroit $-\sin\Delta = \frac{4V}{1000 \sin(25^\circ)} =$ . . . $\frac{95}{10000} V$, à très-peu près : de sorte que si le vent parcouroit 60 pieds par seconde, on auroit $-\Delta = 34^\circ 41'$; Inclinaison par laquelle l'eau arriveroit un pied plus haut que les seuillets des sabords de la seconde batterie. Dans cette circonstance le coffre du

* En Espagnol, *selon la Guiñada*, ce qui signifie la quantité dont le Navire se lance vers le vent, ou dont il vient au *lof*.

Vaiſſeau ſe rempliroit d'eau, & la mer paſſeroit par deſſus le bord. Si, pour comble de malheur, le vent venoit à augmenter de force, le Vaiſſeau étant dans cet état, l'Inclinaiſon augmenteroit, & la perte du Vaiſſeau s'enſuivroit néceſſairement; à moins qu'on ne fût aſſez heureux pour que la violence du vent ne parvînt auparavant à rompre les mâts, ou à mettre les voiles en pieces. On ne peut donc trop recommander aux Marins d'être en garde contre des accidents auſſi terribles, & de ne négliger aucun ſoin, aucune attention pour les prévenir, afin qu'ils ne ſe trouvent pas dans de ſemblables embarras.

(391.) Si dans l'équation (383.), $\sin\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{KU}$ nous ſubſtituons la valeur de $K = -H + \frac{\int e^3c}{12U}$. (197.), nous aurons auſſi $\sin\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{-HU + \frac{1}{12}\int e^3c}$; ou, en mettant pour la quantité H ſon équivalente $\frac{HU - gw}{U + w}$, (167.), & à la place de U ſa correſpondante $U + w$, on aura $\sin\Delta = \frac{\frac{2}{3}nRv}{-HU + gw + \frac{1}{12}\int e^3c} = \frac{\frac{2}{3}nru}{(-HU + gw + \frac{1}{12}\int e^3c)\,\mathrm{tang}\,(\beta - \delta)}$; équation dans laquelle on doit avoir préſent à l'eſprit, que U exprime le volume primitif que le Vaiſſeau avoit de ſubmergé dans le fluide, H la diſtance verticale primitive du centre de volume à celui de gravité, w le volume augmenté ou diminué, & g la diſtance verticale du centre de ce volume à celui du poids qu'on auroit ajouté ou retranché.

(392.) Cette équation fait voir que ſi on ajoute du leſt au Vaiſſeau, le dénominateur augmente de la quantité gw, produit du volume w dont le Vaiſſeau ſe ſubmerge de plus, par la diſtance g du centre de ce Volume au centre du leſt; d'où il ſuit, par conſéquent, que plus le leſt, ou le poids ajouté ſera placé *bas*, plus ce produit ſera grand, & plus l'Inclinaiſon ſera petite. On voit encore, en général, que toutes les fois qu'on placera le poids au-deſſous de la ligne de flottaiſon, le produit ſera poſitif, & ſera d'autant plus grand que le poids ſera plus abaiſſé; & ce même produit ſera négatif, ſi on place le poids au-deſſus de la ligne de flottaiſon: dans le premier cas, l'inclinaiſon eſt diminuée, & elle devient plus grande dans le ſecond. Le contraire de tout cela doit arriver, ſi, au lieu de charger le Vaiſſeau d'un nouveau poids, on retranchoit quelque poids de ſa charge, parce qu'alors w ſeroit négatif.

(393.) La valeur de la quantité $\int e^3c$ dépend, comme nous

l'avons vu dans le Chapitre du Métacentre, de la longueur & des largeurs du Vaisseau, & nous avons trouvé (153.), $\frac{\int e^3 c}{12 U} =$ .. 161 [illegible] ce qui donne $\int e^3 c = 124\, U$. Si le Vaisseau étoit composé de deux prismes triangulaires, en conservant toujours le même volume, il auroit en profondeur environ 20 pieds $\frac{7}{8}$; & l'on auroit $\int e^3 c = 45\, U$; & si le Vaisseau étoit un parallélipipede rectangle, il auroit 11 pieds de profondeur, & l'on trouveroit $\int e^3 c = 180\, U$; d'où l'on voit que la figure du Vaisseau tient un milieu entre ces deux figures; ce qui peut servir de guide pour proportionner les dimensions qui conviennent, lorsqu'il s'agit de faire quelque altération. Car on voit bien, qu'avec la même longueur, la même largeur, & le même volume, la valeur de $\int e^3 c$ dans le Navire, est quelque chose de plus que les deux tiers, de ce qu'elle est pour le parallélipipede, & que les huit tiers de ce qu'elle est pour le corps formé de deux prismes réunis.

(394.) La quantité HU dans les Vaisseaux semblables, est à peu près comme les quatriemes puissances des dimensions linéaires; & c'est la même chose pour $\int e^3 c$: mais nR étant simplement comme les cubes, il s'ensuit que les sinus des Inclinaisons dans les Vaisseaux semblables, seront à peu près dans la raison inverse des dimensions linéaires.

(395.) Ayant développé la théorie des Inclinaisons latérales du Vaisseau, nous devons donner quelques lumieres sur les Inclinaisons directes ou de poupe à proue. Car quoique la grande longueur du Navire les rende presque insensibles, il est cependant utile d'avoir une connoissance de leur degré d'étendue, & de leur qualité, parce qu'elles varient suivant les circonstances & suivant la construction des Navires; & qu'il est très-essentiel, que de quelque espece qu'elles soient, elles n'arrivent pas à être considérables, non-seulement pour que le Vaisseau ne perde pas sa situation horisontale que le Constructeur a eu dessein de lui donner, mais pour d'autres fins qu'on exposera plus loin.

(396.) La force directe du Vaisseau est (339.), $= mru$, & cette force est égale à la force directe que produisent les voiles: ainsi, n étant la hauteur du centre des voiles au-dessus de celui de gravité, ou de l'axe de rotation, $\frac{2}{3} mnru$ sera le moment direct des mêmes voiles. Celui de la proue du Navire est (200 & 215.), $= mKU \sin \Delta + \frac{2}{3} mu \left(Kr + \frac{1}{2} \int c h x^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} \int\int g x^{\frac{1}{2}}\right)$; donc dans l'équilibre de ces deux especes de moments, on aura $\frac{2}{3} nmru = mKU \sin \Delta + \frac{2}{3} mu \left(kr + \frac{1}{2} \int c h x^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} \int\int g x^{\frac{1}{2}}\right)$, ce qui donne $\sin \Delta =$

$\frac{\frac{2}{3}u\,(nr - kr - \frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{4}\iint fgx^{\frac{1}{2}})}{KU}$. On voit, par cette formule, que cette Inclinaiſon ne dépend en aucune maniere des angles que peuvent former les voiles avec la quille, mais de la vîteſſe u du ſillage à laquelle elle eſt proportionnelle ; que celle-ci ſoit produite par quelque moyen que ce ſoit. Nous avons trouvé (206.), pour le Vaiſſeau de 60 canons, $K = 114\frac{9}{14}$, $kr = 1409$, $\frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y = 26970$, & $\frac{1}{4}\iint fgx^{\frac{1}{2}} = 2568$: ces valeurs étant ſubſtituées dans la formule avec celle de $n = 70\frac{1}{2}$, & de $U = 68650$, il en réſultera $\sin \Delta = \frac{\frac{2}{3}u\,(70\frac{1}{2}.294 - 1409 - 26970 + 2568)}{114\frac{9}{14}.68650} = -\frac{3391\,u}{7851843}$: d'où l'on voit que dans tous les cas qui pourroient ſe préſenter, l'Inclinaiſon Δ ſera toujours négative : ce qui prouve que le Vaiſſeau de notre exemple, au lieu de s'Incliner en ſubmergeant ſa proue, l'éleve de plus en plus à meſure que ſa vîteſſe u devient plus grande, & que l'élévation du centre des forces des voiles devient plus petite. On voit encore que même dans le cas extrême l'Inclinaiſon eſt fort petite ; car quoiqu'on ſubſtitue $n = 70\frac{1}{2}$, & $u = 20$, ou que le Vaiſſeau faſſe 12 milles par heure, Δ n'eſt que de 29′ 41″ ; Inclinaiſon qui ne monte pas à un demi degré, & qui, par conſéquent, ne mérite aucune conſidération, quoiqu'elle éleve la proue de 8 pouces au-deſſus de l'eau, comme, par une eſpece de ſuſpenſion. D'autres Vaiſſeaux qui ont leurs proues plus taillées, ou les côtés qui les forment plus verticaux, ou en forme de coin, donneroient un réſultat différent, parce que la quantité $\frac{1}{2}\int chx^{\frac{1}{2}}y$ devient beaucoup moindre pour ces Navires.

CHAPITRE IV.

Du Gouvernement, ou du Manege, du Vaiſſeau.

(397.) APRÈS avoir décrit le Gouvernail avec exactitude ; après avoir indiqué la figure qu'il doit avoir, & les circonſtances qui lui ſont les plus avantageuſes, il paroît aſſez naturel de croire qu'il ne reſte aucune raiſon pour nous porter à de nouvelles conſidérations ſur le Gouvernement du Vaiſſeau ; mais ſi l'on examine ſoigneuſement les forces dont l'action concourt pour produire cet effet, on verra clairement que le Gouvernail n'eſt qu'un des agents qui y contribuent, & peut être qu'il n'eſt pas le plus efficace.

(398.) Nous avons déjà dit (297.), que le Vaiſſeau doit tourner ſur un axe vertical qui paſſe par ſon centre de gravité, & que (216.) ſon mouvement horiſontal étant décompoſé en deux autres, l'un direct, & l'autre latéral, il ne réſulte du premier de ces mouvements aucune action capable de faire tourner le Navire, & qui ſoit, par conſéquent, relative au Gouvernement du Navire, attendu que les forces qui s'exercent des deux côtés ſont égales, & ſe détruiſent mutuellement. Il n'en eſt pas de même pour ce qui concerne le mouvement latéral : le centre des forces qui en réſultent, a été trouvé (224.), dans le Vaiſſeau de 60 canons, de 11 pieds ¼ plus à la poupe que le centre de gravité, & les moments qui en réſultent tendent continuellement à faire arriver le Vaiſſeau. PLANC. IX.

(399.) La ſeule puiſſance dont on puiſſe faire uſage pour contre-balancer ces moments, eſt la force des voiles. Si les moments des voiles tendent à faire venir le Vaiſſeau au vent avec autant de force que les moments ci-deſſus tendent à le faire arriver, il ne prendra aucun mouvement de rotation, & ſe maintiendra conſtamment ſur le même rumb de vent, circonſtance en quoi conſiſte la perfection du Gouvernement, ou du Manege : & comme la force latérale des voiles eſt égale à la réſiſtance du côté, il eſt néceſſaire, pour que les deux moments ſoient égaux, que les deux centres coïncident dans le même point.

(400.) Voici le raiſonnement qui, juſqu'à préſent, a ſervi de guide à tous les Géometres. Soit *E* la proue, *F* la poupe, *C* le centre de gravité du Vaiſſeau, *G* celui des réſiſtances latérales, & *IG* la direction moyenne de la force réſiſtante, compoſée des deux réſiſtances latérale & directe, ou de proue. Cela poſé, il eſt néceſſaire que le centre des forces des voiles ſe trouve pareillement en *G*, afin d'équilibrer les autres forces ; car il eſt évident que cette force ſe dirigeant de même, ſuivant *GI*, il en réſultera l'égalité des moments, en quoi conſiſte cet équilibre. On a cru, d'après ce raiſonnement, avoir fait une découverte importante, & l'on a établi que le point *G* (*a*) étoit l'endroit le plus avantageux pour placer le mât, lorſqu'il n'y a qu'une ſeule voile ; & que, dans le cas où il y en a pluſieurs, il falloit que le centre de toutes les voiles coïncidât avec ce même point *G*. Cependant nous avons vu (285.) que ce centre, bien loin de ſe FIG. 48.

(*a*) *Jean Bernoulli*, Nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux, Chap. 12, §. 1, 2, & 3. *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, *Tome II*.
M. *Bouguer*, Traité du Navire, Liv. 3, Sect. 3, Chap. 1, page 473.

PLANC. IX. trouver en G, est en B, à 12 pieds plus à la proue que le centre de gravité C, lorsque le Vaisseau porte toutes ses voiles; ainsi, il paroît qu'on devroit conclure, d'après cela, que le Vaisseau devroit arriver avec une très-grande force; car non-seulement la puissance, ou les forces latérales contribuent à lui donner ce mouvement, mais aussi celle des voiles. Malgré cela, le Vaisseau, bien loin d'arriver, comme l'indique ce qu'on vient de dire, a, pour l'ordinaire, une grande propension à venir au vent, & cet effet est produit par les causes que nous allons exposer.

(401.) Quoique le centre des voiles supposées planes soit en B, à cause de la courbure qu'elles prennent, ce centre se transporte (273.) en D, la valeur de BD étant (276.) depuis zéro jusqu'à $\frac{217}{1000}h$, h exprimant la largeur des mêmes voiles: mais ce n'est pas encore cette cause qui produit le plus grand effet; car, pour le produire tel qu'on l'observe, il est nécessaire que D tombe plus vers la poupe que G. Le Vaisseau s'incline vers la partie sous le vent, & par ce mouvement le centre des voiles se transporte de D en K; de sorte que K est le vrai centre des forces des voiles, & LK, parallele à GI, est la direction suivant laquelle elles agissent: ainsi, leurs forces étant décomposées en deux autres, les unes latérales, & les autres directes, les premieres seront dirigées suivant DK, & les secondes passant par le point K, seront dirigées parallélement à GB: de sorte que le centre des forces latérales peut être supposé en D, & celui des forces directes en K.

(402.) On voit déjà clairement, d'après cet exposé, que le Manege ou le Gouvernement du Vaisseau dépend de la combinaison des trois forces en G, en D, & en K: la premiere latérale en G, qui tend à faire arriver le Vaisseau; la derniere en K, qui tend à le faire venir au vent: & la latérale située en D, dont l'effet est de faire venir le Vaisseau au vent, ou de le faire arriver, selon que le point D tombe à la poupe ou à la proue du centre de gravité C. Les forces directes sont, au reste, plus grandes ou plus petites, selon que le point K s'éloigne de D, ou selon que le Navire s'incline plus ou moins; de maniere que plus son inclinaison sera grande, plus le Navire viendra au vent, ou comme disent les Marins plus il sera *Ardent* *.

(403.) Ces forces ne dépendent pas moins de la hauteur à la- FIG. 47. quelle se trouve le centre K des voiles; car le Vaisseau conservant la

* Les Espagnols appellent cet effet *orzar*, ou *partir al puño*.

même inclinaison DCK ; plus la hauteur CK sera grande, plus la droite DK le deviendra, ou la distance à laquelle le centre des voiles s'éloigne du plan vertical qui coïncide avec l'axe de rotation.

(404.) L'inconstance du Navire dans la façon dont il se comporte relativement à son Manege, est donc une suite nécessaire de ce qu'on vient de dire. Si le vent augmente, la vîtesse du Vaisseau augmente, ainsi que son inclinaison ; & par-là, non-seulement les forces augmentent, mais aussi la distance dont le point K où elles agissent est éloigné du point D, & par conséquent le Vaisseau doit venir au vent ; & au contraire, il doit arriver si le vent diminue : c'est ce que les Marins observent tous les jours à la mer. Au reste, dans quelque endroit qu'on place le centre des forces des voiles, on éprouvera toujours la même inconstance ; & la meilleure situation qu'on puisse lui donner, consiste à le placer de maniere que, soit en variant le nombre des voiles, afin d'avancer, ou de porter plus en arriere, le point B, ou soit en se servant du Gouvernail, on parvienne à produire l'équilibre dans les moments : bien entendu que la force du Gouvernail ne doit pas être employée sans nécessité ; car cette machine ne peut agir sans préjudice de la marche du Vaisseau : elle doit seulement venir au secours de quelqu'un des autres moments qui seroit trop foible. Nous nous dispenserons de parler, pour le présent, d'une autre force, qui est celle des coups de mer, ou des lames, quoiqu'elle soit aussi très-considérable en elle même, parce que n'étant point constante dans son action, c'est au Gouvernail seul à la surmonter, comme étant l'agent le plus prompt à apporter le remede nécessaire.

(405.) Les forces latérales, ou les résistances du côté du Navire sont (339 & 115.), $= \frac{2}{3}mRv$, ou parce que (340.), $v = \frac{ru}{R\,tang(\beta - \delta)}$, elles seront $= \frac{\frac{2}{3}mru}{tang(\beta - \delta)}$. Si nous faisons donc la distance horisontale GC du centre G des résistances, au centre C de gravité $= b = 11\frac{1}{3}$, (224.), le moment de ces résistances sera $= -\frac{\frac{2}{3}mbru}{tang(\beta - \delta)}$.

(406.) Pareillement, si nous appellons e la distance horisontale CD du centre de gravité C, au centre D des voiles, lorsque le Vaisseau n'est pas incliné ; & considérant que la force latérale des voiles est égale à la résistance du côté du Vaisseau, la force latérale des voiles sera aussi $= \frac{\frac{2}{3}mru}{tang(\beta - \delta)}$; & son moment $= \frac{\frac{2}{3}meru}{tang(\beta - \delta)}$,

lequel étant ajouté au moment de l'*Article* précédent, donnera $\frac{\frac{2}{3}mru}{tang(\beta-\delta)}(b+e)$ pour la somme des moments qui tendent à faire arriver le Navire : sur quoi il faut observer que la quantité e, que nous avons prise comme positive, peut aussi être négative.

(407.) Le sinus de l'inclinaison du Vaisseau est (383.), $\text{sin}\,\Delta = \frac{\frac{2}{3}ru(nR-kR-\frac{1}{3}\int chx^{\frac{1}{2}}y+\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KUR\,tang(\beta-\delta)}$, n exprimant la hauteur verticale du centre K des voiles au-dessus du centre de gravité C; ainsi l'on aura DK, distance horisontale du centre des mêmes voiles au plan vertical qui coïncide avec l'axe de rotation, $= \frac{\frac{2}{3}nru(nR-kR-\frac{1}{3}\int chx^{\frac{1}{2}}y+\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KUR\,tang(\beta-\delta)}$. Et comme $\frac{2}{3}\,mru$ est l'expression des résistances directes de la proue, ou la force directe des voiles, le moment direct, ou *qui* tend à faire venir le Navire au vent, sera $= \frac{\frac{4}{9}mnr^2u^2(nR-kR-\frac{1}{3}\int chx^{\frac{1}{2}}y+\frac{1}{2}\int fgx^{\frac{1}{2}})}{KUR\,tang(\beta-\delta)}$, ou en prenant seulement le premier terme, conformément à ce qu'on a dit, *Art.* 386, ce moment sera $= \frac{\frac{4}{9}mn^2r^2u^2}{KU\,tang(\beta+\delta)}$.

(408.) Il suit de là que, pour que le Vaisseau se comporte bien à la mer, & que le Gouvernail n'ait pas besoin d'agir pour son Manege, on doit avoir $\frac{\frac{4}{9}mn^2r^2u^2}{KU\,tang(\beta-\delta)} = \frac{\frac{2}{3}mru}{tang(\beta-\delta)}(b+e)$: ou, en divisant les deux moments par $\frac{\frac{2}{3}mru}{tang(\beta-\delta)}$, on doit avoir cette équation $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU} = b+e$. Le premier membre de cette équation est (407.), $= DK\,tang\,(\beta-\delta)$ * ; & le second $= DG$. Donc, pour obtenir la perfection qu'on se propose, on doit avoir $DK\,tang\,(\beta-\delta) = DG$, ou, ce qui est la même chose, on doit avoir la proportion $tang\,(\beta-\delta) : 1 :: DG : DK$. Mais l'angle DIG étant $= \beta-\delta$ ** ; on aura donc aussi $tang\,(\beta-\delta) : 1 :: DG : DI$; donc $DK = DI$: c'est-à-dire que, pour obtenir la perfection qu'on cherche dans le Gouvernement du Navire, il faut que le centre K des voiles tombe sur le point I ; c'est-à-dire que les paralleles LK, GI doivent coïncider, ce qui est précisément ce qu'on se proposoit d'obtenir : de sorte que, quoique le mât soit placé en B, le centre des voiles se transporte en I : au contraire, si le mât eût été placé en G, il

* Car c'est à cela que se réduit la valeur de DK, lorsqu'on néglige tous les termes, excepté le premier.

** En effet, on a vu (271.) que l'angle DGI que forme la quille avec la direction résultante des forces des voiles $= 90° - (\beta-\delta)$; donc DIG qui est le complément de $DGI = \beta-\delta$.

eût

eût été impossible que le Vaisseau se fût bien comporté, ou qu'il eût eu un bon Gouvernement.

(409.) Si l'équation ci-dessus n'avoit pas lieu, & que son premier membre fût plus grand que le second, ou que *DK* fût plus grand que *DI*, le Navire viendroit au vent; & il arriveroit, au contraire, si *DK* étoit moindre que *DI*. Devant suppléer, dans l'un & l'autre cas, à la différence des moments, & les ramener à l'égalité, le Gouvernail devient alors absolument nécessaire, ou bien il faut augmenter ou diminuer de la voilure dans la partie qui convient, afin de transporter le point *D* dans le lieu où il doit être.

(410.) Si en naviguant avec la même quantité de voiles, celles-ci ayant toujours la même disposition & la même hauteur, la vîtesse du vent vient à augmenter, la vîtesse *u* augmentera pareillement; & *e* diminuera, parce que *BD* augmentera : le premier membre croîtra donc par une double raison; & par conséquent le Vaisseau viendra au vent. Il arriveroit, au contraire, si le vent diminuoit de vîtesse.

(411.) Le vent devenant plus largue, la vîtesse *u* augmente également; mais *e* augmentera aussi, à cause que δ diminue, & avec elle *BD* : donc l'effet qui en résultera doit naître de la différence entre les augmentations que reçoivent les quantités *u* & *e*.

(412.) La quantité *n* dépendant de la hauteur des voiles, il s'ensuit que le Vaisseau qui aura plus de guindant sera plus ardent. Ainsi, de deux quantités de voiles égales, celle qui sera la plus élevée fera plus venir au vent que la plus basse.

(413.) En augmentant la charge du Vaisseau, la quantité *r*, ou la résistance de la proue augmentera dans une plus grande raison que le volume *U*, à cause que les parties renflées, ou les plus grandes rondeurs de la proue, qui sont au-dessus de la flottaison, doivent se submerger par l'augmentation de la charge. La quantité *b* diminue en même temps, à cause que le centre des résistances latérales qui proviennent de la partie du côté nouvellement submergée, est beaucoup plus avancé vers la proue que le point *G* : donc, par ce double motif, en augmentant la charge du Vaisseau, il doit devenir plus ardent; &, au contraire, il doit arriver lorsqu'on la diminue.

(414) Si l'on chargeoit davantage le Vaisseau à la poupe, & moins à la proue, afin de porter le centre de gravité *C* plus à la poupe, le centre *G* des résistances passeroit également plus à poupe : mais, comme cette disposition ne changeroit la situation d'aucun des points *B*, *D*, *K*, la quantité *DG* deviendroit plus grande respectivement à *DK*; donc le Vaisseau arriveroit. Au contraire, si l'on chargeoit le Vaisseau plus à la proue qu'à la poupe, cette disposition le rendroit plus ardent.

(415.) Le coup de mer, ou la lame qui choque le Vaiſſeau, eſt une puiſſance qui produit un moment plus ou moins grand, ſelon l'endroit où elle frappe le Vaiſſeau, & ſelon la diſtance horiſontale de ſa direction au centre de gravité du Vaiſſeau. Si la lame choque la proue au vent, ou la poupe ſous le vent, elle fait arriver le Vaiſſeau; & elle le fait venir au vent, ſi elle choque la proue ſous le vent, ou la poupe au vent. Heureuſement, de quelque maniere que la lame agiſſe, on trouve, dans l'équation même qui en exprime l'action, ce qui fournit le remede: car ſi le Vaiſſeau arrive, l'augmentation de l'angle a, & par conſéquent celle de u, l'oblige à venir au vent; & s'il vient au vent, la diminution des mêmes quantités l'oblige à arriver: c'eſt par cette raiſon que, lorſqu'un Bâtiment, où l'équilibre des moments eſt *bien établi*, navigue à la bouline, il n'eſt preſque pas néceſſaire de *toucher* au Gouvernail.

(416.) Toutes ces conſéquences regardent particuliérement les Marins, qui doivent les avoir bien préſentes à l'eſprit pour remédier à propos aux inconvénients qui peuvent ſe préſenter dans pluſieurs occaſions. Mais il en eſt auſſi qui ſont particulieres au Conſtructeur; car il doit avoir grande attention à ce que les valeurs de b & de e, ou, ce qui revient au même, à ce que les centres des réſiſtances & des voiles ſoient ſitués de maniere que l'équation puiſſe s'effectuer avec facilité; c'eſt ce qu'on peut obtenir de différentes manieres.

(417.) La quantité b varie en augmentant ou diminuant l'élancement & la quête du Vaiſſeau: de ſorte que plus l'élancement de la proue ſera grand, par rapport à la quête de la poupe, plus le point G ſe portera vers la poupe, & plus la quantité b ſera grande, & le Vaiſſeau aura d'autant moins de propenſion à venir au vent, & réciproquement.

(418.) On fait varier la quantité e en changeant la ſituation des mâts, ou en les plaçant de maniere que le centre commun des voiles ſe trouve plus à poupe ou à proue. On y parvient encore en donnant plus ou moins de longueur aux vergues; car, par ce moyen, l'on augmente ou l'on diminue la valeur de h, (273.), & en même temps celle de BD.

(419.) Pour le Vaiſſeau de 60 canons, de notre exemple, nous avons trouvé (285.), en ſuppoſant qu'il porte toutes ſes voiles, $BC = 12$ pieds, & (276.), $BD = \frac{173}{1000}h$, h déſignant l'amplitude des voiles, laquelle eſt de 80 pieds à la hauteur du centre K

de leurs forces ; ainſi, l'on aura $BD = \frac{173 \cdot 80}{1000} = 13$ pieds $\frac{84}{100}$: & $CB - DB = e = -1\frac{84}{100}$: ce qui donne $b + e = 11\frac{1}{2} - 1\frac{84}{100} =$ 9 pieds $\frac{66}{100}$. Pour trouver la valeur de $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU}$, nous avons (382.), $n = 70\frac{1}{2}$, $r = 294$, $K = 9\frac{1}{3}$, $U = 68650$, & (352.), $u = \frac{1628}{4850}V$; ainſi, ces valeurs donneront $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 70\frac{1}{2} \cdot 70\frac{1}{2} \cdot 294 \cdot 1628 \cdot V}{9\frac{1}{3} \cdot 68650 \cdot 4850} = \frac{522}{1000}V$: donc, pour que l'équilibre ſoit bien établi, & obtenir un bon Gouvernement, ou un bon Manege, on doit avoir, dans ce cas, $\frac{522}{1000}V = 9\frac{66}{100}$: d'où il ſuit que V étant $= \frac{9660}{522}$, ou à peu près $= 18$ pieds $\frac{1}{2}$, le Vaiſſeau Gouvernera bien avec tout l'appareil qu'on lui a ſuppoſé, & il ne ſera pas néceſſaire de faire agir le Gouvernail. Si la valeur de V augmente, le Bâtiment viendra au vent ; & pour maintenir l'équilibre, il ſera néceſſaire d'avoir recours au Gouvernail, ou de ſerrer quelques voiles de l'arriere ; ſi, au contraire, V diminue, le Vaiſſeau arrivera, & il faudra encore recourir au Gouvernail pour rétablir l'équilibre, ou bien il faudra ſerrer quelques voiles de la proue. Comme le vent peut, dans ce cas (352 & 389.), parcourir 10, 15 & 20 pieds par ſeconde ; avec les premiers vents, le Vaiſſeau aura de la propenſion à arriver, & il viendra au vent avec le dernier, & autres ſupérieurs en vîteſſe.

(420.) Suppoſons que le Vaiſſeau ne porte que ſes deux baſſes voiles, les huniers avec les trois ris pris, l'artimon & le faux foc : dans ce cas, on aura (286.), $BC = 11$ pieds, & (276.), $BD = \frac{217}{1000}h = \frac{217 \cdot 81}{1000}$: ce qui donne $BC - BD = CD = 11 - \frac{1758}{100} = -6$ pieds $\frac{18}{100}$; & $b + e = 11\frac{1}{2} - 6\frac{18}{100} = 4$ pieds $\frac{92}{100}$. La valeur de n, dans ce même cas, eſt (282.), $= 56$ pieds $\frac{1}{2}$, & (352.) celle de $u = \frac{17}{100}V$; ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation, donnent $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 56\frac{1}{2} \cdot 56\frac{1}{2} \cdot 294 \cdot 17 \cdot V}{9\frac{1}{3} \cdot 68650 \cdot 100}$, ou à peu près $= \frac{17}{100}V$. Donc, pour que l'équilibre ſoit bien établi, & qu'en conſéquence le Vaiſſeau Gouverne bien, on doit avoir $\frac{17}{100}V = 4\frac{92}{100}$; équation qui a lieu, ſi $V = \frac{492}{17} = 28$ pieds $\frac{16}{17}$; mais avec cet appareil de voiles (352.), la vîteſſe du vent eſt de 35 à 40 pieds par ſeconde ; donc, avec ce vent, le Vaiſſeau aura toujours de la propenſion à venir au vent : on devroit, s'il étoit néceſſaire, car-

guer l'artimon; mais on doit considérer que les coups de mer tendent davantage à faire arriver le Vaisseau, selon qu'ils sont plus ou moins forts.

(421.) Si le Vaisseau ne portoit que ses deux basses voiles, on auroit (286.), $BC = 16\frac{15}{100}$, à laquelle valeur ajoutant celle de $BD = -\frac{217}{1000}h$, on aura $CD = e = -1\frac{43}{100}$; & $GD = b + e = 11\frac{1}{2} - 1\frac{43}{100} = 10\frac{7}{100}$. La quantité n est, dans ce cas (282.), $= 41\frac{1}{2}$, & (352.), $u = \frac{103}{1000}V$: donc $\frac{\frac{2}{3}n^2ru}{KU} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{83}{2}\cdot\frac{83}{2}\cdot 294\cdot 103\cdot V}{9\frac{1}{8}\cdot 68650\cdot 1000}$, ou à peu près $= \frac{42}{1000}V$: & pour que le Vaisseau soit bien équilibré, & qu'en conséquence il gouverne bien, on doit avoir $\frac{42}{1000}V = \frac{1007}{100}$: c'est-à-dire, $V = 240$, ce qui est un vent exorbitant. Le Vaisseau ne Gouvernera donc pas bien avec cet appareil, en allant à la bouline: il feroit nécessaire de border l'artimon. Avec cette voile, on auroit $CB = 2\frac{94}{100}$, à laquelle valeur ajoutant celle de $BD = -17\frac{58}{100}$, il viendra $GD = e = -14\frac{64}{100}$; & $b + e = 11\frac{1}{2} - 14\frac{64}{100} = -3\frac{14}{100}$. Le Vaisseau viendra donc au vent autant qu'il est nécessaire avec cette voilure, & il fera peut être nécessaire de larguer le faux foc.

(422.) Si le Vaisseau restoit avec la grande voile seule, on auroit (286.), $CB = -12\frac{71}{100}$, & en ajoutant la valeur de $DB = -\frac{217}{1000}h = -\frac{1758}{100}$, on aura $CD = e = -\frac{3029}{100}$; & $GD = b + e = 11\frac{1}{2} - \frac{3029}{100} = -\frac{1879}{100}$: c'est-à-dire, que le point D tombera à la poupe du point G de cette quantité; le signe négatif indiquant que le moment qui résulte des deux moments latéraux est négatif, ou qu'il tend à faire venir au vent: & le moment direct en K tendant à produire le même effet, il faut nécessairement que le Vaisseau vienne au vent avec beaucoup de force; or c'est précisément ce qu'on doit désirer dans ce cas où l'on est à la cape, car les coups de mer obligent toujours le Vaisseau à arriver avec une grande violence.

(423.) L'équilibre du Navire est parfaitement bien assuré dans tous les cas; le premier seulement pourroit faire naître quelque doute lorsque le vent est foible; car nous avons trouvé que, pour

la perfection du Manege, on devoit avoir $\frac{522\,V}{1000} = 9\,\frac{66}{100}$: & la quantité V étant petite, on pourroit douter que l'effet du Gouvernail fût capable de vaincre l'arrivée du Vaisseau. On a vu, à l'*Article* 297, que le moment du Gouvernail est = ... $(D + z)\,\frac{1}{11}\,mua^{\frac{1}{2}}\,(4\,A^2 + ga)\,\sin\,(\lambda \pm \epsilon)\,\cos\,\lambda$; en faisant, dans cette formule, $D + z = 78$, $a = 21$, $A^2 = 336$, $g = 5$, $\lambda = 35^\circ$, (296.), & $\epsilon = 5^\circ$, elle deviendra $= 5160 \,.\, \frac{533}{1000}\,mu$; quantité qui, divisée par $\frac{\frac{8}{3}\,mru}{tang\,(\beta - \delta)} = 233\,mu$, comme nous l'avons fait pour les autres moments (408.), on aura $\frac{118}{10}$; ainsi l'équation qui devra avoir lieu sera $\frac{118}{10} + \frac{522}{1000}\,V = 9\,\frac{66}{100}$; d'où l'on voit déjà que l'action du Gouvernail est plus que suffisante pour assujettir le Vaisseau, & maintenir l'équilibre.

(424.) Pour les cas du vent largue & du vent arriere, ou en général pour tous les cas, nous pouvons former une équation des moments, en y renfermant ceux du Gouvernail. Supposons que ces derniers moments soient $= Qmu\,\sin\,(\lambda \pm \epsilon)\,\cos\,\lambda$; pour que l'équilibre du Vaisseau soit assuré, & qu'en conséquence il Gouverne parfaitement, il faut qu'on ait $\frac{\frac{4}{9}\,mn^2r^3u^2}{KU\,tang\,(\beta - \delta)} - \frac{\frac{2}{3}\,mru\,(b + c)}{tang\,(\beta - \delta)} = \pm\,Qmu\,\sin\,(\lambda \pm \epsilon)\,\cos\,\lambda$; ou, en divisant par $\frac{mu}{tang\,(\beta - \delta)}$, il faut avoir $\frac{\frac{4}{9}\,n^2r^3u}{KU} - \frac{8}{3}\,r\,(b + c) = \pm\,Q\,\sin\,(\lambda \pm \epsilon)\,\cos\,\lambda.tang\,(\beta - \delta)$.

(425.) Dans le cas du vent arriere, on a $tang\,(\beta - \delta) = \infty$: donc tous les moments sont nuls, à l'égard de ceux du Gouvernail ; & par conséquent le Gouvernail, formant un très-petit angle λ avec la quille, produira une action suffisante pour assujettir le Vaisseau, & même pour le faire tourner avec la plus grande vîtesse. C'est ce que les Marins éprouvent journellement ; car on voit qu'un Timonier mal habile, portant continuellement la barre tantôt à tribord, tantôt à basbord, sans lui donner le repos nécessaire, fait continuellement lancer le Vaisseau sur basbord, & sur tribord ; c'est ce qui leur fait dire que le Vaisseau devient fou.

(426.) Dans le cas du vent largue $tang\,(\beta - \delta)$ est suffisamment grande, à l'égard des autres quantités, par conséquent le Gouvernail a encore beaucoup de force, dans cette circonstance. La seule chose dont il soit nécessaire de prévenir le Lecteur, est que,

comme toutes les quantités demeurent constantes, à l'exception de u, plus le Vaisseau aura de vitesse, ou plus le vent sera fort, plus aussi le Vaisseau aura de propension à venir au vent, ou plus l'angle λ, que le Gouvernail devra former avec la quille pour l'assujettir, devra être grand.

CHAPITRE V.

Du Roulis & du Tangage.

(427.) LES Marins appellent *Roulis* le mouvement de rotation du Vaisseau sur un axe horisontal coïncidant avec l'étrave & l'étambot; & ils appellent *Tangage* le mouvement de rotation du même Vaisseau sur un axe horisontal perpendiculaire au premier. Ces actions sont purement nuisibles, parce qu'il n'en resulte, très-souvent, que les accidents les plus fâcheux, tels que la perte des agrès, la rupture des vergues, des mâts, &c., & même la perte entiere des Vaisseaux. Ces mouvements rendent encore les coups de mer plus incommodes & plus dangereux; car il arrive souvent que les lames passent par-dessus le Vaisseau, & le remplissent d'eau. Ce seroit donc une belle & importante découverte que de trouver le moyen de détruire ces dangereux mouvements; mais cela n'est pas possible, sans éprouver, avec excès, d'autres inconvénients qui ne sont pas exempts de danger; ainsi nous nous contenterons de donner les regles convenables pour modérer ces balancements, & les rendre moins préjudiciables. Les Auteurs les plus célebres (*a*) n'ont considéré jusqu'ici le Roulis que comme une action qui dépend précisément de la construction & de la disposition des parties du Vaisseau, sans avoir égard à l'agitation de la mer qui le produit; & toutes leurs recherches se sont réduites à déterminer le temps dans lequel s'achevent les balancements du Roulis, persuadés que c'est uniquement dans l'augmentation de ce temps que consiste tout l'avantage; mais, outre que l'avantage qu'on peut obtenir par ce moyen est très-peu considérable, nous verrons que les moyens qu'ils proposent pour l'obtenir sont très-préjudiciables.

(428.) On peut considérer le balancement du Roulis comme l'action par laquelle le Vaisseau reprend sa situation droite, lorsqu'après avoir été un peu incliné, il est abandonné à lui-même. Dans ce

---

(*a*) *Léonard Euler Scientia Navalis*, Tome I, Chap. IV, Prop. 48.
M. *Bouguer*, *Traité du Navire*, Liv. II, Sect. III.

cas, toute l'action se réduira à la somme, ou à l'intégrale des vîtesses avec lesquelles se fait la rotation du Vaisseau, & ces vîtesses sont (*Tome I*, 929.), $V = \frac{dt\int p\pi dt}{S}$. Or il y a dans cette formule quatre objets à considérer, & tous très-importants; le temps dans lequel s'acheve le Roulis; sa vîtesse; sa grandeur; & l'action qu'éprouve chaque partie du Vaisseau.

(429.) Supposons à présent que la superficie de la mer se maintenant de niveau, le Vaisseau s'incline d'une quantité infiniment petite, & qu'ensuite on l'abandonne à lui-même pour lui laisser faire son balancement. Dans ce cas, le moment de la puissance $p\pi$ qui agira, sera, (197.), $= 32KP \sin\Delta$, puisque $32P = \pi$, (*Tome I*, 52.). De plus, la valeur des résistances (237.), $= \frac{GV}{dt}$ *, G exprimant une constante; c'est-à-dire que le moment de la force agissante sera $= 32KP \sin\Delta - \frac{GV}{dt}$: c'est le même moment que celui dont nous avons déduit toute la théorie du *Chap. XIII*, *Liv. II*, *Tome I*, *Art.* 929 : ainsi, toutes les formules qu'on a données dans ce *Chapitre* sont applicables au cas dont il est présentement question.

(430.) Le temps dans lequel s'acheve le balancement du Roulis, d'après les suppositions exprimées ci-dessus, sera donc (*Tome I*, 937.) $T = \left(\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l} \pm \left(\left(\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l}\right)^2 - \left(\frac{S}{KPl}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, T exprimant, en secondes, la durée du Roulis, P le poids du Vaisseau, K la distance du centre de gravité au métacentre, S les moments d'inertie que produisent les parties mêmes du Vaisseau, G les moments des résistances du fluide, sur le côté du Vaisseau, dans le balancement; & l la longueur du pendule simple qui bat les secondes; longueur qui est à peu près de 39 pouces, ou 3 pieds $\frac{1}{4}$ (*Tome I*, 942.). On voit par cette formule que le temps de la durée d'une oscillation du Roulis dépend des quatre quantités S, G, K & P : or les deux premieres quantités se trouvant dans les numérateurs de la formule, il est clair que, par leur augmentation, le temps de la durée du Roulis augmentera; au contraire, les deux dernieres K & P se trouvant dans le dénominateur, leur augmentation doit évidemment faire diminuer cette durée.

(431.) Nous pouvons cependant faire disparoître en partie, de la formule, le poids P du Vaisseau, attendu que les moments d'inertie S peuvent s'exprimer par x^2P, x marquant, dans cette nouvelle expression, la distance de l'axe de rotation au point où, supposant

* *Voyez* aussi la *Note* de l'*Article* 932, *Tome I*.

tous les corps, ou toutes les parties du Vaiſſeau, comme réunis, ils produiroient les mêmes moments d'inertie S; la quantité x étant plus ou moins grande, ſelon que les parties, ou les poids qui compoſent le total du Vaiſſeau, ſont plus ou moins éloignés de l'axe de rotation qui paſſe par le centre de gravité. Subſtituant donc, à la place de S, la quantité x^2P, l'expreſſion du temps dans lequel s'acheve le balancement du Roulis, deviendra $T=$ .... $\left(\frac{x^2}{Kl}+\frac{G^2}{64K^2P^2l}+\left(\left(\frac{x^2}{Kl}+\frac{G^2}{64K^2P^2l}\right)^2-\left(\frac{x^2}{Kl}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$; ou, en ſuppoſant $G=0$, comme l'ont fait les Auteurs dont nous avons parlé, cette expreſſion ſe réduira à $T=\left(\frac{x^2}{Kl}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(432.) Il n'y pas de doute, d'après cette expreſſion, ou formule, que, s'il ne s'agit d'autre choſe que d'augmenter la durée *du Roulis*, on peut y parvenir aiſément, en augmentant la quantité x; c'eſt-à-dire, en éloignant davantage de l'axe de rotation, ou du centre de gravité les différents poids qui compoſent la charge du Vaiſſeau, & qu'on y parvient auſſi en diminuant $K=H+\frac{m}{nP}\int e^3c$.

(433.) On voit encore, par la formule, que la quantité G qui repréſente les moments que produiſent les réſiſtances du fluide dans le mouvement du Roulis, doit toujours être augmentée, pour augmenter la durée des balancements; cependant cette quantité eſt, comme nous le verrons, fort peu conſidérable, quoique des cauſes particulieres la faſſent augmenter enſuite au point de la rendre très-ſenſible dans la pratique.

(434.) Dans le Vaiſſeau de 60 canons, qui nous ſert d'exemple, nous avons trouvé (166.), $K=9\frac{1}{8}$, $P=68650\,m$, $G=554707\,m$, (239.); & ſi nous faiſons de plus $x=15$, & $l=3\frac{1}{4}$, nous aurons, pour l'expreſſion du temps dans lequel s'acheve le balancement du Roulis, $T=$ $\left(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}\cdot3\frac{1}{4}}+\frac{(554707)}{64\cdot3\frac{1}{4}(9\frac{1}{8})^2(68650)^2}+\left(\left(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}\cdot3\frac{1}{4}}+\frac{(554707)^2}{64\cdot3\frac{1}{4}(9\frac{1}{8})^2(68650)^2}\right)^2-\left(\frac{15.15}{9\frac{1}{8}\cdot3\frac{1}{4}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou, à fort peu près, $T=2''\frac{36}{100}+\frac{4}{100}$; la fraction $\frac{4}{100}$ de ſeconde provenant de la réſiſtance G, qui, comme on le voit, peut ſe négliger : par conſéquent le temps dans lequel le Vaiſſeau acheve les balancements du Roulis, peut ſe réduire à $T=\sqrt{\frac{S}{KPl}}=\sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$.

(435.) De-là il ſuit, que K demeurant conſtante, les temps T ſeront comme x, diſtance du centre de gravité au point où l'on conçoit toutes les parties du Vaiſſeau comme réunies : & dans les Vaiſſeaux ſemblables, ces temps ſeront, par conſéquent,

comme les racines quarrées de leurs dimenſions linéaires. (*a*) *.

(436.) La plus grande vîteſſe dans le balancement du Roulis, eſt (*Tome I, Art.* 943.) $u = \frac{32 K^2 P \sin \Delta}{G}$, u exprimant la vîteſſe du métacentre (*Tome I, Art.* 932.); mais le numérateur de cette expreſſion eſt le produit du moment de la puiſſance qui agit & produit le Roulis, multiplié par la quantité K: donc la plus grande vîteſſe du balancement eſt en raiſon directe de ce produit.

(437.) On voit donc que plus K^2, qui eſt le quarré de la diſtance du centre de gravité au métacentre, ſera grand, ainſi que $\sin \Delta$, ou la cauſe qui produit l'inclinaiſon, plus le balancement du Roulis ſera vif & fort; ainſi le Roulis en deviendra beaucoup plus dur, ſans que le temps de ſa durée ſoit altéré par le changement de la derniere quantité.

(438.) L'augmentation de P devroit, à ce qu'il ſemble, faire augmenter la plus grande vîteſſe; mais comme K eſt $= H + \frac{m}{12 P} \int e^3 c$, il en réſulte que le produit $K^2 P = H^2 P + \frac{Hm}{6} \int e^3 c + \frac{m^2}{144 P} (\int e^3 c)^2$: & comme H eſt une fort petite quantité, l'augmentation de P diminue plutôt ce produit qu'elle ne l'augmente.

(439.) Si, à cauſe de la petiteſſe de H, nous ſuppoſons $H = 0$, il viendra $K^2 P = \frac{m^2}{144 P} (\int e^3 c)^2$: & de-là il ſuit, que dans les Vaiſſeaux ſemblables, les plus grandes vîteſſes ſeront à peu près comme $\frac{(\int e^3 c)^2}{P}$: or les quantités $(\int e^3 c)^2$ étant comme les huitiemes puiſſances des dimenſions linéaires, tandis que P eſt ſeulement comme les troiſiemes puiſſances, il en réſulte que les plus grandes vîteſſes demeureront comme les cinquiemes puiſſances des dimenſions linéaires.

(440.) Enfin on a vu (*Tome I, Art.* 944.), que la quantité

(*a*) M. *Bouguer* (*Traité du Navire*, page 432.) dit, que la Frégate *le Triton*, de 180 tonneaux, faiſoit ſes balancements de Roulis en 4 ſecondes ½. Les dimenſions linéaires de cette Frégate, ſuivant la deſcription qu'il nous en donne, étoient les ⁴⁄₇ de celles du Vaiſſeau de notre exemple; d'où il ſuit que, ſuivant la regle que nous venons d'établir, le Vaiſſeau devroit faire ſes balancements en 6 ſecondes. On verra plus loin pour quelles raiſons les balancements peuvent être d'une plus longue durée; & ce qui, peut-être, eſt cauſe de l'erreur de M. *Bouguer*. On verra, pareillement, les inconvénients qui réſulteroient de ſon aſſertion, ſi elle étoit vraie.

* Car en déſignant, par les mêmes lettres accentuées, les parties homologues du ſecond Vaiſſeau, on aura $T : T' :: \sqrt{\frac{x^2}{Kl}} : \sqrt{\frac{x'^2}{K'l}}$. Or, puiſque les Vaiſſeaux ſont ſemblables, on a $x : x' :: K : K' = \frac{x'K}{x}$: ſubſtituant & réduiſant, on aura $T : T' :: \sqrt{x} : \sqrt{x'}$.

qui mesure l'action que souffrent les fibres des pieces de bois qui entrent dans la construction du Vaisseau, est proportionnelle à $K^2P \sin\Delta - Gu$: de sorte que la plus grande action a lieu lorsque $u = 0$, c'est-à-dire, lorsque le Roulis est fini, que le Vaisseau est comme arrêté, & qu'il est pour reprendre sa premiere situation; ainsi cette plus grande action est comme $K^2P \sin\Delta$, ou comme la plus grande vîtesse. Les parties du Vaisseau souffrent dans cet instant les plus grands efforts: & courent, par conséquent, le plus grand risque de se désunir, ou de se rompre.

(441.) L'action que souffrent les mâts, qui de toutes les parties du Vaisseau, sont celles les plus exposées à se rompre, est (*Tome I, Art.* 946.) $= \frac{S'K^2P \sin\Delta}{S} = \frac{S'K^2 \sin\Delta}{x^2}$, x exprimant la distance de l'axe de rotation, au point où l'on conçoit que tous les corps, ou toutes les parties du Vaisseau, sont comme réunis; donc plus cette distance sera grande, moins l'action que les mâts ont à soutenir sera considérable.

(442.) Cette action ou effort est également comme K^2, ou comme le quarré de la hauteur du métacentre, au-dessus du centre de gravité; d'où l'on voit que lorsque le Vaisseau est chargé de matieres d'une pesanteur spécifique considérable, & placées dans le fond de la cale du Vaisseau, ce qui oblige son centre de gravité à s'abaisser, & par conséquent fait augmenter K, les mâts & les autres parties du Vaisseau en souffriront une action qui augmentera en raison doublée de K, & courront alors le plus grand risque de se rompre.

(443.) La même action est aussi proportionnelle à S', c'est-à-dire, qu'elle suit la raison des moments d'inertie qu'éprouvent les mêmes mâts: de sorte que plus les mâts seront pesants, ainsi que leurs agrès & leurs voiles, & sur-tout plus ils auront de hauteur, plus ils auront à souffrir de l'effort qu'ils soutiennent.

(444.) Dans les Vaisseaux semblables, & semblablement mâtés, gréés, &c., l'action que supportent les mâts est (439.) à peu près comme les cinquiemes puissances de leurs dimensions linéaires: par cette raison, le corps, la mâture, & les agrès d'un grand Vaisseau, souffrent beaucoup plus que les mêmes parties d'un Vaisseau plus petit; attendu que leurs résistances ou forces sont seulement comme les cubes des mêmes dimensions (*Tome I, Art.* 211 & *Note*, & la *Note* de l'*Art.* 113 *de ce Volume.*).

(445.) Ce qu'on vient de dire de la mâture, doit s'entendre de toute autre partie du Vaisseau, comme, par exemple, d'une portion de son côté, ou d'un certain nombre de ses couples, d'une

partie d'un de ſes ponts, &c. L'effort que ſoutient une telle partie ſera également exprimé par $\frac{S'K^2 \sin\Delta}{x^2}$, S' exprimant le moment d'inertie de cette partie: de ſorte que, ſi l'on vouloit qu'elle ſouffrît moins d'effort, on pourroit y parvenir en diminuant S', ou en diminuant le poids de la partie dont il s'agit, ou bien en augmentant x dans les autres parties qui ne ſouffrent pas tant.

(446.) Juſqu'ici nous ne nous ſommes pas éloignés de ce que les Auteurs les plus célébres ont écrit ſur cette matiere; toutes les choſes que nous venons de dire ne ſont que des conſéquences de leurs principes, relativement au Roulis, & même au Tangage; parce que ces deux actions ne différent en rien l'une de l'autre (*a*), étant conſidérées comme provenant de la petite inclinaiſon qu'on donneroit au Vaiſſeau: or c'eſt préciſément ce qui a lieu pour le Roulis qui ſe fait après le paſſage du coup de mer, qui a mis en mouvement, ou en oſcillation, le corps du Vaiſſeau; c'eſt-à-dire, dans les Roulis ou oſcillations qui ſuivent le premier: mais pour le premier balancement, l'action de la puiſſance n'eſt ni entiérement ſemblable ni de la même valeur. Dans l'inclinaiſon du Vaiſſeau, relativement à la ſuperficie de l'eau, qu'on ſuppoſe ici parfaitement de niveau, les deux moments des volumes *LED* & *AEG* (*Tome I*, 842, & la *Note* du même *Art.*) concourent à ſoutenir le corps du Vaiſſeau, & ces moments ſont $= \frac{m}{12}\int e^3c \sin\Delta$, qui eſt une des deux quantités qui forment la valeur de $KP\sin\Delta = (HP + \frac{m}{12}\int e^3c)\sin\Delta$. Mais dans l'action du coup de mer, le Vaiſſeau s'incline, & occupe l'eſpace *ABCDEA*, au lieu de celui *FDEF* qu'il occupoit auparavant: de ſorte qu'on a $AIFA + HCDH = IHBI$, attendu que le volume qu'il déplace doit être conſtant. Le Vaiſſeau s'éléve par l'action des nouveaux volumes occupés *HCDH* & *AIFA*, & laiſſe le creux *IHB*. Delà, on voit que, relativement à la rotation, l'action du volume *HCDH* eſt poſitive, de même que celle de *IGBI*, & que l'action des deux volumes *AIFA* & *HGBH* eſt négative; de ſorte que dans cette rotation il y a une puiſſance poſitive, & une puiſſance négative; au lieu que dans celle que nous avons conſidérée d'abord, les deux puiſſances ſont poſitives. Il y a encore une autre différence entre ces deux cas, & cette différence provient de ce que les moments ne doivent pas être conſidérés, & évalués comme provenant ſeulement des volumes de fluide déplacés

PLANC. I. FIG. 31.

PLANC. IX. FIG. 50 & 51.

(*a*) Quoi qu'en diſe M. *Bouguer* (*Traité du Nav.*, *Liv. II*, *Sect. III*, *Chap. III*, §. 5.)

PLANC. IX. par les coups de mer, c'est-à-dire, par la lame qui embrasse le Vaisseau ; mais il faut encore considérer que les lames sont en mouvement, & avoir égard à la vîtesse avec laquelle elles agissent ; de sorte que leur force verticale doit être (*Tome I*, 582.) $= \int m . db . de (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \, \mathit{sin}\, \theta)^2$, tandis que, sans cette considération, elle seroit seulement $= \int m.db.de.a$. Ainsi, la vîtesse du coup de mer peut être telle que sa force soit beaucoup de fois plus grande que celle qui peut résulter de son simple poids, ou de sa simple pression ; qui est le seul principe d'action qu'on ait considéré précédement.

(447.) Pour ne rien négliger de ce qui peut mériter attention, nous observerons qu'il est une autre puissance dont nous devons considérer l'effet, & cette puissance est l'action des voiles. Si le Vaisseau ayant pris une inclinaison *DCK*, causée par la force du vent sur les voiles, reçoit, du côté du vent, le choc d'un coup de mer qui le fasse tourner sur le point *C*; alors les voiles, par le mouvement de rotation qu'elles prennent, fuient le vent, ou se dérobent en partie à son action; & la vîtesse avec laquelle celui-ci les frappe, n'est plus que sa vîtesse relative; c'est-à-dire, la vîtesse du vent moins celle que prend la voile. Au contraire, lorsque le Vaisseau se releve & revient du côté du vent, alors la vîtesse respective avec laquelle le vent charge la voile, est celle du vent plus celle de la voile. Cette différence de vîtesse fait varier le moment avec lequel les voiles agissent pendant la durée du Roulis, & ce moment est un moment de résistance dans les deux cas, c'est-à-dire, soit que le Navire plie dans le Roulis en augmentant son inclinaison, soit qu'il se releve pour tomber ensuite du côté du vent. Car lorsqu'il se releve, la résistance est manifeste, puisque le moment s'oppose à la force qui le releve; & si le Vaisseau plie en augmentant son inclinaison, ce moment étant de moins dans celui de la force qui le fait plier, il est de même négatif, & produit, par conséquent, l'effet d'une résistance. Ainsi, appellant n la hauteur, ou la distance du centre des voiles à l'axe de rotation, nous aurons $K : u :: n : \frac{nu}{K}$; expression de la vîtesse latérale de ce même centre; & par conséquent $\frac{nu}{K \, \mathit{sin}\, \gamma}$, sera celle de la vîtesse suivant la direction du vent. Cette vîtesse doit produire la force latérale des voiles (338.), $= \frac{1}{10} m A^2 G \, \mathit{cos} (\beta - \delta) (V \mathit{sin}\, \alpha - u \, \mathit{sin}\, \beta - v \, \mathit{cos}\, \beta)$, en substituant $\frac{nu}{K \, \mathit{sin}\, \gamma}$ en place de V seul, & faisant auparavant dans la formule $u = 0$, & $v = 0$, attendu que ces vîtesses ne peuvent aucunement influer sur celles qu'on considére actuellement dans le Vaisseau. On aura

donc la force latérale des voiles produite par le balancement du Roulis, $= \frac{1}{10} mA^2 G \cos(\beta - \delta) . \frac{nu \sin \alpha}{K \sin \gamma}$; ou $= \frac{Qnu}{K}$, en faisant . . . $\frac{1}{10} mA^2 G \cos(\beta - \delta) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = Q$; & le moment sera $= \frac{Qn^2 u}{K}$: ou, parce que (*Tome I*, 131.), $V = \frac{u dt}{K}$, & par conséquent $u = \frac{KV}{dt}$, ce moment sera $= \frac{Qn^2 V}{dt}$. Ainsi, en mettant à la place de la quantité G, que nous avons ci-devant introduite dans les formules, & qui exprimoit la constante qui multiplioit les résistances du côté, nous n'aurons qu'à substituer maintenant la même quantité, augmentée de Qn^2 : ou si G désigne la même valeur qu'auparavant, nous n'aurons qu'à substituer maintenant la quantité $G + Qn^2$, en place de G seul.

(448.) Si l'on substitue dans la valeur de $Q = \frac{1}{10} m A^2 G \cos(\beta - \delta) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, les valeurs trouvées (352.), sçavoir, $A^2 = 23050$, $G = \frac{96}{100}$, $\beta = 40°$, $\delta = 8° 20'$, $\alpha = 25°$, on trouvera, à fort peu près, $Q = 270 \frac{9}{10} . m$. Multipliant cette quantité par (282.), $n^2 = 70\frac{1}{4} . 70\frac{1}{4}$, on aura $Qn^2 = 1346181 . m$, à quoi ajoutant $G = 554707 . m$, la somme sera $1900888 . m$; c'est la quantité qu'il faut substituer en place de $554707 . m$ seul, dans le calcul de la durée du balancement du Roulis. Cette substitution donnera la durée du Roulis de $\frac{1}{10}$ de seconde plus longue; de sorte qu'au lieu de $2'' \frac{76}{100} + \frac{4}{100}$, que nous avons trouvé ci-dessus, on aura, en supposant toutes les voiles déployées, & que le Vaisseau navigue à la bouline, on aura, dis-je, cette durée de $2'' \frac{76}{100} + \frac{4}{100} + \frac{10}{100} = 2'' \frac{90}{100}$. Cette augmentation de $\frac{1}{10}$ de seconde est une quantité fort petite; mais cependant elle devient sensible dans la pratique de la mer : car on apperçoit clairement de la différence dans les Roulis lorsqu'on serre les voiles.

(449.) En outre, pour parvenir à une connoissance exacte du temps dans lequel s'achève le Roulis, il est d'autres particularités dont l'influence est beaucoup plus considérable, & auxquelles il est essentiel d'avoir égard; car cette connoissance ne peut résulter complettement de la formule seule que nous avons trouvée pour la valeur de la vîtesse angulaire. La durée du balancement doit aussi dépendre beaucoup du temps que la lame emploie à passer sous le Vaisseau, & ce temps ne peut éprouver aucune altération de la valeur plus ou moins grande que pourroient avoir les moments d'inertie S, ni de la valeur d'aucune des autres quantités qui entrent dans la formule donnée (430.). La vîtesse de la lame a été trouvée (*Tome I*, *Art.* 816.), $= \frac{8b}{(a+b)\frac{1}{2}c}$, b exprimant la moitié de l'amplitude de la lame, a sa hauteur totale, & c la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité. Si dans une seconde elle parcourt l'espace exprimé par

cette quantité, elle parcourra la moitié b de son amplitude dans $\frac{1}{8}c(a+b)^{\frac{1}{2}}$ secondes ; c'est ce temps qui doit s'écouler depuis l'instant où le Vaisseau commence à s'élever sur la lame, jusqu'à ce que la plus grande élévation de celle-ci se trouve sous le côté du Vaisseau. Mais il est encore nécessaire d'ajouter à ce temps celui que la même lame doit employer de plus, pour parvenir au point où son moment est le plus grand : or ce point se trouve nécessairement entre le côté & le milieu du Vaisseau ; car, lorsque la plus grande élévation de la lame arrive au plus fort de la largeur du Vaisseau, elle a encore du chemin à faire pour arriver aux autres points de son côté. Ainsi, supposant que ce point où le moment de la lame est le plus grand, est éloigné du même côté, de la quantité h ; nous trouverons qu'il faut le temps $\frac{hc}{8b}(a+b)^{\frac{1}{2}}$, pour que le sommet de la lame parcoure cette quantité. Le temps qu'emploira le Vaisseau à produire son premier balancement causé par la seule impulsion de la lame, sera donc $t = \frac{1}{8}c(a+b)^{\frac{1}{2}}(1+\frac{h}{b})$; d'où l'on voit que, dans l'expression de cette durée, il n'y a que la quantité h qui dépende en partie du Vaisseau ; c'est la nature & la grandeur de la lame qui détermine toutes les autres. Si nous faisons (*Tome I, Art.* 818.) $b = a(1+\frac{1}{2}c)$, nous aurons aussi $t = \frac{1}{8}c(2a+\frac{1}{2}ac)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{a(1+\frac{1}{2}c)}\right)$.

(450.) Si l'on fait $h = 8$ pour le Vaisseau de 60 canons, de notre exemple, on trouve les valeurs du temps dans lequel ce Vaisseau doit achever son Roulis causé par la seule action de la lame, telles qu'on les voit dans la Table ci-contre.

TABLE de la durée des Roulis causés par l'action seule des lames.

Hauteurs des Lames en pieds.	*Valeurs de t, ou de la durée du Roulis, exprimées en secondes.*
$0\frac{1}{4}$	. . . 5″
1	. . . $3\frac{5}{100}$
$3\frac{113}{1000}$ . .	. . . $2\frac{61}{100}$
4	. . . $2\frac{64}{100}$
9	. . . 3
16	. . . $3\frac{55}{100}$
25	. . . $4\frac{17}{100}$
36	. . . $4\frac{64}{100}$
49	. . . $5\frac{12}{100}$
64	. . . $6\frac{22}{100}$

(451.) Les Roulis occasionnés par la lame, durent donc beaucoup, lorsque la lame est presque insensible : ensuite leur durée va en diminuant, à mesure que la lame augmente, jusqu'à ce qu'elle ait atteint le *minimum*, & passé ce terme, elle retourne à augmenter. On trouve ce *minimum* en différenciant la quan ité $a^{\frac{1}{2}} + \frac{h}{a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)}$ * ; ce

* C'est la valeur de t, (*Art.* 449.), divisée par la quantité constante $\frac{1}{8}c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}$.

qui donnera $a = \frac{h}{1+\frac{1}{2}c}$: de sorte que le moindre temps dans lequel les Vaisseaux doivent donner leur Roulis par la cause de la lame, est $t = \frac{1}{4} c \left(\frac{2+\frac{1}{2}c}{1+\frac{1}{2}c}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$.

(452.) Les lames dont on vient de parler sont celles qui ont déjà pris tout l'accroissement dont elles sont suceptibles relativement au vent qui les a occasionnées. Dans celles qui subsistent après que l'action du vent est cessée, il y a quelque variation, selon le rapport qui a lieu entre leur hauteur & leur amplitude *; mais si nous négligeons leur hauteur, le temps de la durée du Roulis qui résultera de ces lames, se réduira à $t = \frac{1}{8}c\left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{h}{b^{\frac{1}{2}}}\right)$. De cette sorte, à la lame de 64 pieds de hauteur il correspond une largeur, ou amplitude $b = 64\,(1+\frac{1}{2}c) = 163,08$, d'où l'on tire $b^{\frac{1}{2}} = 12,77$: donc, dans le cas même où cette lame parvient à avoir une très-petite hauteur, le temps dans lequel le Vaisseau devra achever le balancement de son Roulis par l'action seule de cette lame, sera $t = \frac{1}{8} \cdot 3,14\left(12,77 + \frac{8}{12,77}\right) = 5'' \frac{26}{100}$, (a).

(453.) Ces temps devroient effectivement être ceux qu'emploîroient les Vaisseaux à faire leurs premiers Roulis; si, d'un autre côté, ceux que nous avons conclus auparavant, & qui sont exprimés par $T = \sqrt{\frac{S}{KPl}}$, leur étoient égaux; mais ne l'étant pas, il arrivera nécessairement que les balancements se contrarieront, & se causeront une altération mutuelle, & que le Vaisseau prendra un mouvement moyen, la grandeur du Roulis, ses vîtesses & ses moments éprouvant une variation. Si, par exemple, le temps t durant lequel la lame produit son action, étoit moindre que T, la lame gagneroit sur le côté du Vaisseau, en produisant le même effet que si l'on augmentoit la valeur de K, laquelle quantité diminuera la valeur du temps T, en l'approchant de l'égalité avec t: ainsi, non-seulement la plus grande vîtesse du balancement qui est $u = \frac{32\, K^2 P \sin\Delta}{G}$ augmentera pareillement, mais aussi les plus grands moments que souffre le corps du Vaisseau. Dans le Vaisseau de 60 canons, cet inconvénient ne peut avoir lieu que lorsque les la-

* Ces dernieres lames sont celles que les Espagnols appellent *Olas de leva*, ou *Mares de leva* (*Tome I*, *Art.* 818.).

(a) C'est peut être quelque cas comme celui-ci, qui fit croire à M. *Bouguer* que la Frégate *le Triton* faisoit ses Roulis dans 4 secondes ½. En effet, on voit, d'après ce qu'il dit à la *page* 332, que, pour faire son expérience, il choisit un temps où la mer étoit peu agitée; c'est-à-dire, où les lames étant devenues régulieres, elles avoient peu de hauteur, & étoient de l'espece de celles dont nous venons de parler.

mes ont 9 pieds de hauteur, ou que leur hauteur est moindre, auquel cas le Vaisseau se trouve forcé de faire le balancement en moins de 2″ $\frac{90}{100}$. Lorsque la hauteur des lames est plus grande, le Vaisseau achevera son Roulis avant le passage de la lame.

(454.) On peut déjà inférer de tout ce qui vient d'être dit, qu'il y auroit un grand inconvénient d'augmenter les moments d'inertie S, dans la seule vue d'augmenter le temps T, dans lequel le Vaisseau acheveroit son Roulis, étant abandonné à lui-même. Car outre qu'il n'en résulteroit qu'un très-petit avantage, on augmenteroit excessivement la rapidité du Roulis, sa grandeur, les moments que souffre le corps du Vaisseau, & l'élévation des eaux sur le côté, qui peut être passeroient par-dessus le bord, comme elles y passent quelquefois, ce qui inonde entiérement le Vaisseau. Si, par exemple, le temps T étoit de 5″, toutes les lames, depuis 10 pieds de hauteur jusqu'à 36 pieds, seroient très-capables de produire ces dangereux effets; au lieu que T étant $=$ 2″ $\frac{90}{100}$, ce sont seulement les lames de moins de 9 pieds qui pourroient les causer, & des lames de cette hauteur ne peuvent produire des dommages bien considérables.

(455.) Pour augmenter la durée du Roulis, il conviendroit mieux de s'attacher à diminuer la quantité K; car quoique l'avantage qui pourroit en résulter ne fût pas grand, la plus grande vitesse du balancement diminueroit au moins, ainsi que les moments que souffre le corps du Vaisseau. Mais cela n'empêcheroit cependant pas que les Roulis n'augmentassent de grandeur, que les lames ne s'élevassent davantage sur le côté, & que le Vaisseau n'embarquât une très-grande quantité d'eau par-dessus son bord; tandis qu'il est nécessaire, au contraire, d'augmenter K pour remédier à ces inconvénients.

(456.) On voit, d'après cela, de quelle importance il est de bien approfondir la théorie pour proportionner cette quantité comme il convient. Puisque $T^2 = \frac{S}{KPl}$, on aura aussi $t^2 = \frac{S}{zPl}$, en exprimant par z la quantité correspondante à K; quantité qu'il faudra déterminer pour le Vaisseau, afin que ses oscillations soient isochrones avec celles de la lame. On aura donc $\frac{S}{Pl} = T^2K = t^2z$, & par conséquent $z = \frac{T^2K}{t^2}$. Donc le moment de la puissance qui agit sur le Vaisseau avec l'effort de la lame $= \frac{T^2KP \sin \Delta}{t^2}$, tandis que celui que produit le Vaisseau seul est $= KP \sin \Delta$. Or, ces deux

moments

moments operent chacun en particulier, comme s'ils avoient à vaincre des moments d'inertie égaux : on aura donc le vrai moment résultant $= (\frac{T^2+t^2}{2t^2}) KP \sin \Delta$ *.

(457.) La quantité $(\frac{T^2+t^2}{2t^2}) K$ sera donc celle qui aura réellement lieu dans le Roulis, au lieu de la quantité K qui auparavant étoit supposée y influer seule. Ainsi, en nommant Θ le vrai temps dans lequel le Vaisseau achevera son Roulis, nous aurons $\Theta = \sqrt{\frac{2t^2 S}{(T^2+t^2)KPl}} = \sqrt{\frac{2t^2x^2}{x^2+t^2 Kl}}$ **.

(458.) Ce que nous venons de voir confirme déjà une partie de ce que nous avons avancé ci-dessus ; car on voit non seulement que le temps Θ prend une valeur moyenne entre T & t, mais encore que la variation de cette valeur, qui résulte de l'augmentation de S, ou de x, & de la diminution de K, est fort peu considérable. Supposant $x = 15$, $K = 9\frac{1}{8}$, $t = 3$, & $l = 3\frac{1}{4}$; on aura $T = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}} = 2'' \frac{3}{4}$, & $\Theta = 2'' \frac{6}{7}$. Supposant ensuite $x = 21$, on aura $\Theta = 3'' \frac{1}{3}$; faisant ensuite $K = 6$, on aura $\Theta = 3'' \frac{18}{100}$; d'où l'on voit que la durée du Roulis n'est point de $3''$, ni de $2'' \frac{3}{4}$, mais de $2'' \frac{6}{7}$, qui est une durée moyenne. On voit en même temps qu'en augmentant x de 6 pieds, Θ n'a augmenté que de $\frac{47}{100}$ de seconde ; ce qui répond à peu près à $\frac{7\frac{1}{2}}{100}$ de seconde par pied : & qu'en diminuant K de 3 pieds, ou en la réduisant à ses deux tiers, Θ a seulement augmenté de $\frac{32}{100}$ de seconde. Toutes ces quantités sont, comme on le voit, très-peu considérables, & méritent très-peu d'attention, eu égard aux inconvénients dans lesquels on tombe en cherchant à les obtenir.

(459.) Ce qui se présente d'abord à l'esprit, est la grandeur du Roulis ; car cette grandeur augmente à mesure que x augmente, & que K diminue. L'inclinaison du Vaisseau du côté sous le vent est la mesure, ou la juste grandeur du Roulis, considéré comme provenant de la plus ou moins grande efficacité, ou du moment de la lame. Prenons donc δ pour exprimer cette inclinaison, nous aurons $KP \sin \delta = (\frac{T^2+t^2}{2t^2}) KP \sin \Delta$; ce qui donne $\sin \delta = \ldots (\frac{T^2+t^2}{2t^2}) \sin \Delta = (\frac{x^2+t^2Kl}{2t^2Kl}) \sin \Delta$. On voit, par cette formule, qu'à mesure que x augmente, ou que K diminue, l'inclinaison δ doit

* C'est la moitié de la somme des deux.

** Car $T^2 = \frac{S}{KPl}$: or $S = x^2P$, (431.) ; donc $T^2 = \frac{x^2}{Kl}$. Substituant ces valeurs de T^2 & de S dans celle de Θ, on aura l'expression que donne l'Auteur.

augmenter. Ainsi, en supposant, comme ci-devant, $x = 15$, $K = 9\frac{7}{8}$, $t = 3$, & $l = 3\frac{1}{4}$, on aura $\sin \delta = \frac{874}{949} \sin \Delta$; & en faisant $x = 21$, $\sin \delta = \frac{1258}{949} \sin \Delta$; c'est-à-dire que δ est plus grand des deux cinquiemes qu'il n'étoit dans le premier cas; quantité qui, comme on le voit, est très-considérable. Pareillement, en faisant $K = 6$, on a $\sin \delta = \frac{712}{624} \sin \Delta$; c'est-à-dire que δ est d'un cinquieme plus grand qu'il n'étoit dans la premiere supposition. On voit que toutes ces quantités sont très-grandes, relativement au peu d'avantage qu'on peut gagner du côté du temps.

(460.) De même que, pour avoir la véritable expression du temps, nous avons substitué la quantité $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right) K$ à la place de K seul, nous devons faire la même substitution dans l'expression de *la plus grande vîtesse*, qui (436.) est $= \frac{32 K^2 P \sin \Delta}{G}$, afin d'obtenir la véritable expression de cette vîtesse; en conséquence, la plus grande vitesse sera $= \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)^2 \frac{32 K^2 P \sin \Delta}{G} = \left(\frac{x^2+t^2 Kl}{2t^2 l}\right)^2 \frac{32 P \sin \Delta}{G}$. On voit, par cette formule, que la plus grande vîtesse dans le Roulis devient plus grande à mesure que x ou S devient plus grande; & pareillement qu'elle devient encore d'autant plus grande, à mesure que K augmente: de sorte qu'il convient de diminuer K, pour diminuer la vîtesse du Roulis, mais toutefois sans augmenter x ou S.

(461.) Nous nous sommes, comme on le voit, beaucoup étendus sur la théorie du temps, de la grandeur & de la vîtesse des balancements du Roulis; mais ce ne sont pas les points les plus intéressants pour les Marins. Le Roulis est une action préjudiciable, & ses grands inconvénients sont les actions, ou moments, excessifs que peuvent en souffrir toutes les parties du Vaisseau, & notamment la mâture, ce qui peut occasionner la perte des mâts, & même la perte entiere du Vaisseau; ce sont aussi les grandes élévations des eaux sur le côté, lesquelles inondent le Vaisseau. Pourvu qu'on puisse remédier à ces inconvénients, il importe peu de quelle façon le reste se trouve; & si les Auteurs les plus célebres ont seulement porté leur attention sur les moyens de diminuer le temps du Roulis, ce n'a été que parce qu'ils étoient persuadés que tous les autres avantages dépendoient de cette diminution. Les moments que souffrent les mâts sont (441.), $\frac{S' K^2 P \sin \Delta}{S}$; en substituant dans cette expression $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right) K$, en place de K seul, elle deviendra $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2 T}\right)^2 \frac{S' K^2 P \sin \Delta}{S} = \left(\frac{T^2+t^2}{2t^2}\right)^2 \frac{S' K \sin \Delta}{l}$ *. Cette expression

* Car (431.), $T^2 = \frac{x^2}{Kl}$; ce qui donne $x^2 = T^2 Kl$, & par conséquent $S = x^2 P = T^2 KPl$.

prend une valeur infinie, ſi T eſt infini, & elle la prend également, ſi $T=0$. Il y a donc une valeur de T telle que la mâture éprouvera la moindre action qu'il eſt poſſible, & cette valeur ſe détermine en égalant à zéro la différencielle de la quantité $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2T}\right)^2$; c'eſt-à-dire qu'on la tirera de l'équation $dT-\frac{t^2dT}{T^2}=0$, laquelle donne $T=t$ pour le cas où les mâts éprouvent la moindre action. Ainſi, pour que les mâts aient à ſouffrir le moins qu'il eſt poſſible, le Vaiſſeau doit être iſochrone à la lame; c'eſt-à-dire que les Roulis qu'il donneroit par lui-même doivent ſe faire dans le même temps que ceux que la lame produiroit, leſquels ſont exprimés dans la Table de l'*Art.* 450. Toute autre valeur qu'on donneroit à T, moindre, ou plus grande, produiroit de plus grands moments dans la mâture. Si T eſt plus grand que t, la durée du Roulis ſera plus grande; mais la plus grande vîteſſe augmentera en même temps, & c'eſt de cette vîteſſe que dépend principalement l'action que ſupportent les mâts; & ſi T eſt moindre que t, la vîteſſe & la grandeur du balancement diminuent, mais le temps augmente.

(462.) On voit, d'après ce que nous venons d'expoſer, qu'il nous reſte à trouver la valeur la plus avantageuſe de S. Or, cette détermination eſt maintenant très-facile; car T devant être égal à t, & ayant $T=\sqrt{\frac{S}{KPl}}$, nous aurons $t^2=\frac{S}{KPl}$, ou $S=t^2KPl$, & $x=tK^{\frac{1}{2}}l^{\frac{1}{2}}$; c'eſt la valeur de S, ou de x, qui fera que les mâts travailleront le moins qu'il eſt poſſible. Mais la valeur de t eſt indéterminée, chaque lame produiſant une valeur différente; par conſéquent, pour obtenir cet avantage, il ſeroit néceſſaire de faire varier la valeur de S ou de x, en les augmentant dans les grandes lames, & en les diminuant dans les petites, ce qu'il n'eſt pas poſſible d'exécuter dans la pratique de la mer.

(463.) Cependant, ſi l'on ne peut obtenir tout l'avantage qu'on ſe propoſe, on peut prendre un milieu entre ces valeurs, qui ne ſoit pas très-éloigné de procurer le plus grand avantage; car les petites lames ne produiſant que peu, ou même point, de préjudice, on peut négliger d'y avoir égard, & porter uniquement ſon attention ſur celles dont la hauteur & la vîteſſe commencent déjà à être dangereuſes, en menaçant la mâture, & prendre un temps moyen, ou une valeur moyenne de t entre celles-ci & les plus grandes. Suppoſons que les premieres ſoient les lames de 9 pieds de hauteur,

---

Subſtituant cette valeur de S, dans la formule, elle deviendra telle que l'Auteur l'indique.

& les dernieres celles de 36 ou 40 pieds; la valeur moyenne de t sera alors $= 4''$. D'après cela, on aura $S = x^2 P = 16\, KPl$; ce qui donne $x = 22$, en substituant, pour le Vaisseau de 60 canons, $K = 9\frac{1}{11}$, & $l = 3\frac{1}{4}$. Or cette valeur de x est impossible, à moins qu'on ne surcharge de poids la mâture, & sur-tout les vergues, ce qui l'exposeroit aux plus grands dangers, & auroit les suites les plus fâcheuses. Car le Vaisseau de 60 canons ayant seulement 42 pieds dans sa plus grande largeur, la moitié de cette largeur n'est que de 21 pieds; ainsi il n'est pas possible de donner à x la valeur ci-dessus. Mais on doit toujours conclure de ceci que, dans ce Vaisseau, plus on pourra séparer les poids du centre de gravité, sans toutefois trop préjudicier aux parties qui doivent les supporter, plus le *travail* de la mâture sera diminué: ainsi, cet arrangement sera le plus *approprié* à la mâture.

(464.) On a déjà vu, lorsqu'on a pris la différencielle de l'expression $\left(\frac{T^2+t^2}{2t^2 T}\right)^2 \frac{S' K \sin\Delta}{l}$, que nous avons regardé K comme constante, & que nous avons seulement fait varier la quantité $T = \sqrt{\frac{S}{KPl}} = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$; c'est-à-dire que la seule quantité S ou x a été considérée comme variable: & c'est d'après cette supposition qu'on a trouvé la valeur avantageuse qui correspond à ces quantités, en tant qu'il s'agit de rendre l'action de la mâture la moindre qu'il est possible. Pour trouver celle qu'on doit donner à K, pour concourir au même effet, il n'y a qu'à introduire dans l'expression la valeur de $T = \sqrt{\frac{x^2}{Kl}}$, & elle se réduit à $(x^2 + t^2 Kl)^2 \frac{S' \sin\Delta}{4t^4 x^2 l^2}$: d'où l'on voit que plus la valeur de K sera grande, plus l'effort que la mâture aura à supporter sera grand.

(465.) Ceci annonce que nous devrions donner à K la moindre valeur possible: mais l'élévation des eaux sur le côté du *Vaisseau*, les inondations & les dangers qui s'ensuivent, nous donnent une indication contraire. Le moment de la puissance qui agit sur le Vaisseau dans l'effort de la lame est (456.), $= \frac{T^2 KP \sin\Delta}{t^2}$, & ce seroit avec ce moment que le Vaisseau agiroit par lui-même, en supposant que le corps dudit Vaisseau varie dans la raison de K à $\frac{T^2 K}{t^2}$, & que $\sin\Delta$ demeure constant. Mais, comme le corps du Vaisseau ne varie point, cette action de la lame dépendra de l'augmentation ou de la diminution de $\sin\Delta$; de sorte qu'en supposant l'inclinaison $= \theta$, nous aurons $\frac{T^2 KP \sin\Delta}{t^2} = KP \sin\theta$, ou $\sin\theta = \frac{T^2}{t^2} \sin\Delta$; c'est-à-dire que

les ſinus des inclinaiſons, ou les hauteurs de l'eau ſur le côté du Vaiſſeau, ſeront comme les quarrés des temps dans leſquels s'accompliſſent les balancements du Roulis : mais ce temps a été trouvé (457.), $= \left(\frac{2t^2S}{(T^2+t^2)KPl}\right)^{\frac{1}{2}}$; donc les hauteurs des eaux ſur le côté du Vaiſſeau, ſeront comme $\frac{t^2S}{(T^2+t^2)KPl} = \frac{t^2T^2}{T^2+t^2} = \frac{t^2x^2}{x^2+t^2Kl}$; d'où l'on voit que plus la valeur de K ſera petite, plus l'élévation de l'eau ſur le côté du Vaiſſeau ſera grande. Si l'on ſuppoſe donc que α repréſente cette hauteur, nous aurons $\alpha = \frac{nt^2T^2}{T^2+t^2}$, n exprimant une conſtante. Mais, dans le cas où l'on ſuppoſe le Vaiſſeau arrêté, & ſans aucun mouvement, on doit avoir $\alpha = a$, hauteur totale de la lame, & $T = \infty$: donc, dans ce cas, nous aurons $\alpha = a = nt^2$; & ſi l'on ſubſtitue dans cette équation la valeur de t^2, qui eſt $= \frac{1}{64}c^2(a+b)\left(1+\frac{h}{b}\right)$, on aura $a = \frac{nc^2}{64}(a+b)\left(1+\frac{h}{b}\right)^2$; d'où l'on tire $n = \frac{64a}{c^2(a+b)\left(1+\frac{h}{b}\right)^2}$. Mais, comme l'objet de notre recherche n'eſt pas d'avoir la hauteur de la lame au point où le Roulis eſt achevé, mais ſur le côté du Vaiſſeau; & que dans ce cas, la quantité $h = 0$, on aura $n = \frac{64a}{c^2(a+b)}$; & cette valeur de n étant ſubſtituée dans celle de α, donnera $\alpha = \frac{64at^2T^2}{c^2(a+b)(T^2+t^2)}$. Il faut obſerver que, dans cette formule, t ne doit plus exprimer le temps dans lequel le Vaiſſeau acheve ſon Roulis, attendu qu'on a ſuppoſé $h = 0$, mais celui dans lequel la lame parcourt la moitié b de ſon amplitude : ainſi, il vaut mieux, pour éviter toute confuſion & toute mépriſe, exprimer ce dernier temps par t', & l'on aura $\alpha = \frac{64at'^2T^2}{c^2(a+b)(T^2+t'^2)} = \frac{64at'^2x^2}{c^2(a+b)(x^2+t'^2Kl)}$; & en ſubſtituant la valeur de t'^2, qui (449.) eſt $= \frac{1}{64}c^2(a+b)$, on aura $\alpha = \frac{T^2a}{T^2+\frac{1}{64}c^2(a+b)} = \frac{x^2a}{x^2+\frac{1}{64}c^2Kl(a+b)}$. Enfin, ſi nous ſuppoſons, pour les lames qui ont pris tout l'accroiſſement dont elles ſont ſuſceptibles à l'égard du vent qui les a produites, $b = a(1+\frac{1}{2}c)$ (449 & 452.), l'on aura, pour ces lames, $\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{T^2a}{T^2+\frac{1}{16}c^2a(2+\frac{1}{2}c)} = \frac{x^2a}{x^2+\frac{1}{64}c^2Kla(2+\frac{1}{2}c)}$, ou, à peu près, $\alpha = \frac{x^2a}{x^2+\frac{247}{192}Ka}$.

(466.) Les élévations de l'eau ſur le côté du Vaiſſeau ne ſont donc pas les plus grandes poſſibles, ſeulement lorſque la hauteur K du métacentre au-deſſus du centre de gravité eſt la moindre qu'il eſt poſſible; mais ces élévations croiſſent auſſi à proportion que x, ou les moments d'iner-

tie S du Vaisseau deviennent plus grands : en un mot, ces élévations sont comme les quarrés des temps de la durée du Roulis. Ainsi, dans le Vaisseau de 60 canons, supposant $x = 15$, $K = 9\frac{1}{3}$, & la hauteur a de la lame $= 36$, on trouvera $a = \frac{15 \cdot 15 \cdot 36}{15 \cdot 15 + \frac{247}{192} \cdot 9\frac{1}{3} \cdot 36} =$ 12 pieds $\frac{1}{2}$; & si l'on suppose $x = 21$, il en résultera $a = 18\frac{1}{3}$. De même, en supposant $K = 6$, on trouvera $a = 16$.

(467.) On doit ajouter à ces élévations la dénivellation, ou les hauteurs auxquelles la lame s'élevera de plus, en vertu de la vîtesse avec laquelle elle choquera le Vaisseau, laquelle hauteur est (*Tome I*, *Art.* 594.) $= \frac{u^2}{64}$, u exprimant la vîtesse de la lame, qui, comme nous l'avons dit (449) est fournie par l'équation $u = \frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}} c}$. Ainsi, cette hauteur sera $\frac{u^2}{64} = \frac{b^2}{(a+b)c^2} = \frac{(1+\frac{1}{2}c)^2 a}{(2+\frac{1}{2}c)c^2}$, ou, à peu près, $= \frac{3}{16} a$: d'où l'on voit que la hauteur de la lame étant de 36 pieds, comme nous l'avons supposée ci-dessus, ce qu'on doit ajouter aux élévations précédentes, sera $\frac{3}{16} \cdot 36$ pieds $= 6$ pieds $\frac{3}{4}$: par conséquent ces élévations seront de $19\frac{1}{4}$, $25\frac{1}{12}$, & $22\frac{3}{4}$. Mais il faut observer que ces élévations n'ont lieu que pour le cas seul où la lame choque le côté du Vaisseau dans une direction qui lui est exactement perpendiculaire ; & c'est pour cette raison qu'il est si dangereux qu'elle tombe ainsi perpendiculairement, & qu'il n'en est pas de même quand elle frappe un peu obliquement, comme lorsqu'on va à la bouline. Dans ce dernier cas, u^2 est moindre dans la raison de 5 à 4 ; ainsi, la hauteur qu'on doit ajouter se réduira à 5 pieds $\frac{2}{5}$; & en conséquence, les élévations ci-dessus deviendront $17\frac{9}{10}$, $23\frac{11}{15}$, & $21\frac{2}{5}$. Mais cette correction n'est pas la seule, ni même la plus considérable qu'on doive appliquer à ces élévations. Le Vaisseau ne reçoit pas la lame comme le feroit un rocher ; il cede à son impulsion, en prenant même une partie de sa vîtesse, & nous devons compter la vîtesse u diminuée de toute cette partie qu'il reçoit. Cette quantité dont u est diminuée, peut être plus ou moins grande, suivant que l'est la résistance du côté ; mais, en supposant que u se réduise aux $\frac{2}{3}$, nous devrons diminuer u^2 dans la raison de 9 à 4 : ainsi, les 5 pieds $\frac{2}{5}$ qu'on a trouvés ci-dessus, se réduiront à 2 pieds $\frac{2}{5}$, & les élévations à $15\frac{1}{2}$, $21\frac{1}{5}$ & 19 pieds.

(468.) On voit déjà clairement, d'après ce que nous venons de dire, que le Vaisseau n'étant élevé dans son milieu que de 16 à 17 pieds, il n'y a que le premier cas, dans lequel nous avons supposé $x = 15$, & $K = 9\frac{1}{3}$, qui soit admissible ; dans les deux autres où l'on a fait $x = 21$, ou $K = 6$, l'eau passera par-dessus

le bord, & inondera le Vaisseau. Ainsi, il faut renoncer à l'avantage qui en résulteroit, ou à obtenir que la mâture éprouve la moindre action; ce qui demande que $x = 22$, (463.). Résumant donc tout ce que nous venons de dire, on verra que pour diminuer l'élévation des eaux, il faut que T soit le plus petit qu'il est possible, & tout au plus de 3 secondes; & que tout ce qu'on peut faire à l'avantage de la mâture, est de faire ensorte que $T = t$, &, dans les grandes lames, t parvient jusqu'à être de 5 secondes.

(469.) Dans les petits Bâtiments, il est nécessaire que T^2 soit moindre à proportion, pour qu'ils ne se remplissent pas d'eau. Car la hauteur du bord de ces Bâtiments étant à peu près comme les dimensions linéaires de leurs carenes, il faut que la quantité $\alpha =$

$$\frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64} c^2 (a+b)} = \frac{T^2 a}{\frac{c^2}{64}(a+b)} \left(1 - \frac{T^2}{\frac{c^2}{64}(a+b)} + \frac{T^4}{\frac{c^4}{(64)^2}(a+b)^2} - \&c. \right)$$

soit aussi proportionnelle à ces dimensions. Or, cette expression fait voir, qu'en faisant T^2 dans la raison des dimensions linéaires, la valeur de α croît dans une moindre raison que celle de ces dimensions; & que, par conséquent, elle est plus grande dans les petits Bâtiments, à proportion que dans les grands. Prenons, par exemple, une Frégate en tout semblable au Vaisseau de 60 canons, mais, dont les dimensions soient la moitié de celles du Vaisseau; nous aurons, pour cette Frégate (466.), $\alpha = \ldots\ldots$

$$\frac{\tau^2 a}{\tau^2 + \frac{247}{192} K a} = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot a}{\frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2} + \frac{247}{192} \cdot \frac{9\frac{1}{8}}{2} \cdot a} = \frac{15 \cdot 15 \cdot a}{15 \cdot 15 + \frac{247}{192} \cdot 9\frac{1}{8} \cdot 2a}$$; & en faisant $a = 36$, $\alpha = \frac{25 \cdot 36}{25 + \frac{247}{192} \cdot 9\frac{1}{8} \cdot 8} = 7$ pieds $\frac{67}{119}$; ce qui fait 1 pied $\frac{37}{119}$ de plus que la moitié de 12 pieds $\frac{1}{2}$, qu'on a trouvés pour le Vaisseau de 60 canons (466.). De cette sorte, en ajoutant aux 7 pieds $\frac{67}{119}$, les 3 pieds qu'on a trouvés pour la dénivellation, la hauteur à laquelle l'eau s'élevera sur le bord de la Frégate, sera de 10 pieds $\frac{67}{119}$. Mais l'élévation de son bord est seulement de 8 pieds ou 8 pieds $\frac{1}{4}$; donc l'eau passera par-dessus, tandis que cet accident n'arrivera pas au Vaisseau construit proportionnellement. Il est donc nécessaire de diminuer la valeur de T^2 dans la Frégate.

(470.) Si on vouloit que l'eau ne s'élevât sur le bord de la Frégate que proportionnellement à ce qu'elle s'éleve sur le bord du Vaisseau: alors, en nommant t, pour un instant, le temps dans lequel la Frégate achevera une oscillation, & $\frac{n}{1}$, le rapport entre

les dimenſions linéaires du Vaiſſeau & celles de la Frégate, on auroit cette proportion $\frac{T^2 a}{T^2 + \frac{c^2 (a+b)}{64}} + 3 : \frac{t^2 a}{t^2 + \frac{c^2 (a+b)}{64}} + 3 :: n : 1$; ce qui donne la valeur de $t^2 =$ . . . .

$$\frac{\frac{1}{64} c^2 (a+b) \left(\frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64} c^2 (a+b)} - 3 (n-1) \right)}{na + 3 (n-1) - \frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64} c^2 (a+b)}}.$$

Faiſant maintenant $n = 2$, parce qu'on ſuppoſe les dimenſions linéaires du Vaiſſeau doubles de celles de la Frégate; & ſubſtituant les autres valeurs trouvées, on aura $t^2 = \frac{\frac{36 \cdot 11}{20} (12 \frac{1}{2} - 3)}{72 + 3 - 12 \frac{1}{2}} = 3$, à fort peu près; au lieu que, ſelon la proportionnalité avec le Vaiſſeau, il devoit être $= 4 \frac{9}{16}$. Subſtituant, en conſéquence, $3 = T^2$, & $a = 36$, dans l'équation $a = \frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64} c^2 (a+b)}$, on trouve $a = \frac{3 \cdot 36}{3 + \frac{11 \cdot 36}{20}} = 4 \frac{14}{19}$; & en ajoutant à cette quantité les 3 pieds de dénivellation, on aura ſeulement 7 pieds $\frac{14}{19}$ pour la hauteur totale à laquelle l'eau s'élevera. Cette même valeur de T^2 étant ſubſtituée dans $T^2 = \frac{x^2}{Kl}$, avec celle de $x = \frac{15}{2}$, & celle de $l = 3 \frac{1}{4}$, on aura $3 = \frac{15 \cdot 15}{4 K \cdot 3 \frac{1}{4}}$, d'où l'on tire $K = \frac{15 \cdot 15}{12 \cdot 3 \frac{1}{4}} = 5$ pieds $\frac{10}{13}$; c'eſt la valeur que doit avoir K, au lieu de $4 \frac{9}{16}$, pour que la lame de 36 pieds ne paſſe pas par-deſſus la Frégate.

(471.) Nous avons trouvé (172.), $K = 7 \frac{1}{2}$; pour la Frégate de 22 canons, avec 31 pieds $\frac{1}{3}$ de largeur; & cette valeur ſubſtituée dans les équations, donne l'élévation de l'eau ſur le bord de la Frégate de 14 pieds, avec la lame de 36 pieds de hauteur, tandis que cette Frégate n'a que 11 pieds de bord. Mais ſi l'eau doit ſurmonter de 3 pieds le bord de cette Frégate, dont les extrêmités de poupe & de proue ſont fort renflées, & fort pleines; que ne doit-il pas arriver aux Frégates que conſtruiſent quelques Ingénieurs modernes, d'après les préceptes des Géométres qui ont écrit ſur cette matiere, mais ſans avoir égard à toutes ces circonſtances? Le bord de ces Frégates a ſeulement 9 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur; elles ont, en outre, les extrêmités très-fines & très-taillées; & par conſéquent K doit avoir une moindre valeur. Il doit donc paſſer 5 pieds, ou plus, d'eau par-deſſus ces Frégates, lorſque la lame eſt telle qu'on vient de la ſuppoſer: & par conſéquent, dans de ſemblables circonſtances, il eſt impoſſible que

que ces Bâtiments puissent se maintenir contre la mer ; ils doivent se dérober à sa fureur en arrivant, afin qu'en diminuant la vîtesse avec laquelle elle les choque, les trois pieds de la dénivellation se trouvent détruits pour la plus grande partie. Mais, outre que cette diminution ne seroit pas suffisante, cet expédient n'est pas toujours praticable, on ne peut pas arriver dans tous les cas. Etant engagé sur une côte dont on est obligé de s'élever, on est forcé de chercher à se maintenir contre la grande impétuosité des lames ; & dans un cas semblable, des Bâtiments construits d'après ces principes, sont exposés aux plus grands dangers. Lorsqu'on veut diminuer la hauteur des eaux, il est nécessaire d'augmenter la valeur de K, comme nous l'avons vu, sans quoi les Navires seront toujours exposés aux inconvénients dont on vient de parler (a) ; c'est cependant tout le contraire de ce que pratiquent ces Constructeurs.

(472.) Outre ce que nous avons dit, il nous reste encore à considérer le troisieme Roulis que donne le Vaisseau, lequel mérite bien d'être remarqué. Si celui-ci ne s'effectuoit qu'en vertu du second, ou s'il étoit le résultat de la chûte du Vaisseau du côté du vent, il devroit être moindre ; mais il peut s'y joindre l'action d'une nouvelle lame, & cette lame peut par hasard communiquer son effet, à l'instant même où le Vaisseau commence à faire effort pour se relever, en vertu de sa stabilité. Dans ce cas, deux puissances presque égales se réunissent, & par conséquent la rapidité du Roulis, sa grandeur, & les moments qu'éprouvent le corps du Vaisseau & la mâture, seront presque doubles. Il est vrai qu'en prenant les choses dans leur état ordinaire, on ne verra que rarement cette circonstance avoir lieu ; mais comme elle n'est pas impossible, il est nécessaire, lorsqu'elle arrive, que le Vaisseau se trouve disposé de la maniere la plus avantageuse, pour qu'il puisse resister sans avaries à une action aussi violente & aussi subite.

(473.) Le Tangage, comme nous l'avons déjà dit, ne differe en rien du Roulis. Dans le Tangage, on a $K = 117\frac{1}{2}$, (159.),

---

(a) S'il étoit certain, comme le dit M. *Bouguer* (*Traité du Navire*, page 332.), que la Frégate *le Triton* fît les balancements de ses Roulis en $4''\frac{1}{2}$, on auroit $\alpha = \frac{20a}{20+\frac{11}{20}a}$: & en substituant $a=36$, on auroit $\alpha = \frac{5 \cdot 36}{5+\frac{11}{20}\cdot 9}$, ou à peu près, $\alpha = 18$. Ajoutant à cette quantité les 3 pieds de la dénivellation, on auroit en tout 21 pieds pour la hauteur à laquelle l'eau s'éleveroit sur le côté du *Triton* ; tandis que le bord de cette Frégate n'avoit que 8 à 9 pieds de hauteur. Il passeroit donc 12 pieds d'eau par-dessus : or, c'est ce qui réellement n'a pu arriver, parce qu'il eût été impossible que ce Bâtiment naviguât. Une lame seulement de 12 pieds de hauteur éleveroit l'eau de 10 pieds $\frac{1}{2}$ sur son bord ; & avec l'abaissement qu'elle avoit, l'eau auroit passé par-dessus.

$G = 7851843.m$, (240.), & la valeur de x, ou de la distance de l'axe de rotation au point où l'on conçoit comme réunies toutes les parties du corps du Vaisseau & de sa charge, peut être supposée $= 50$. D'après cela, l'expression du temps dans lequel le Vaisseau exécutera par lui-même le balancement du Tangage, sera $T = \ldots$

$$\left(\frac{50.50}{117\frac{1}{2}.3\frac{1}{4}} + \frac{(7851843)^2}{64(117\frac{1}{2})^2.3\frac{1}{4}(68650)^2} + \left(\left(\frac{50.50}{117\frac{1}{2}.3\frac{1}{4}} + \frac{(7851843)^2}{64(117\frac{1}{2})^2.3\frac{1}{4}(68650)^2}\right)^2 - \left(\frac{50.50}{117\frac{1}{2}.3\frac{1}{4}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

laquelle se réduit, à peu près, à $T = 2\frac{56}{100} + \frac{20}{100}$, la fraction $\frac{20}{100}$ résultant de la valeur de G : d'où l'on voit le peu d'effet que produit cette résistance, qui est cependant énorme, relativement à la valeur si fort augmentée de $K = 117\frac{1}{2}$. Ainsi, l'on doit inférer de là que l'effet résultant de l'action des voiles, est encore beaucoup moindre, & qu'il est effectivement négligeable.

(474.) Il paroît qne nous devrions conclure de là que l'effet du Tangage ne peut être différent de celui du Roulis dans le Vaisseau de 60 canons, puisque le temps qu'on trouve pour la durée de ce balancement, est presque le même ; mais nous avons ici une cause de plus à considérer, qui est la vîtesse du Vaisseau laquelle le fait aller au-devant de la lame, & il la choque avec la vîtesse relative, qui est la somme des vîtesses du Vaisseau & de la lame. La vîtesse de la lame est (449.), $= \frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$; &, si nous substituons $b = a(1+\frac{1}{2}c)$, comme nous l'avons fait (449.), elle sera $= \frac{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)}{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$; ainsi, la vîtesse avec laquelle la proue choque la lame $= \frac{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)\cos\epsilon}{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}} + u$, en exprimant par u la vîtesse directe du Vaisseau, & par ϵ, l'angle sous lequel la direction de la lame coupe celle du Vaisseau. Cette quantité sera donc à $1''$ comme $b = a(1+\frac{1}{2}c)$ est à $t' = \frac{ac(1+\frac{1}{2}c)(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)\cos\epsilon + cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$; c'est l'expression du temps dans *lequel* la moitié de la lame passera sous la proue du Vaisseau.

(475.) Pour trouver la valeur de t, ou du temps dans lequel le Vaisseau devroit achever son balancement de Tangage par l'action seule de la lame, il n'y a qu'à ajouter au précédent le temps dans lequel la même lame parcourra la longueur h. Or ce temps est $= \frac{hc(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)\cos\epsilon + cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$; nous aurons donc $t = \frac{c(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}(a+\frac{1}{2}ac+h)}{8a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}c)\cos\epsilon + cu(2+\frac{1}{2}c)^{\frac{1}{2}}}$. Si, pour le Vaisseau de 60 canons, nous faisons $h = 17$, $a = 9$, $u = 10$, & $\cos\epsilon = \frac{1}{2}$, il en résultera $t = 1''\frac{59}{100}$.

(476.) Le temps dans lequel le Vaisseau achevera son balance-

ment de Tangage, ſera donc (457.), $\Theta = \left(\frac{2t^2x^2}{x^2 + t^2Kl}\right)^{\frac{1}{2}}$, & en ſubſtituant (473), $x = 50$, $K = 117\frac{1}{2}$, & $l = 3\frac{1}{4}$, on aura $\Theta = \left(\frac{10000\,t^2}{5000 + 764\,t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. On voit, de-là, que plus la valeur de t ſera petite, plus le temps dans lequel le Vaiſſeau achevera ſon Tangage ſera petit : mais la valeur de t eſt d'autant plus petite, que la vîteſſe u du Vaiſſeau eſt plus grande ; donc plus cette vîteſſe ſera grande, plus le temps dans lequel il achevera ſon Tangage ſera petit. Si nous ſubſtituons la valeur de $t = 1''\frac{59}{100}$, comme on l'a trouvée (475.), d'après la ſuppoſition de $a = 9$, $u = 10$, & $cos\,\varepsilon = \frac{1}{2}$, il viendra $\Theta = 1''\frac{89}{100}$: de ſorte que le Vaiſſeau achevera ſon Tangage de $\frac{87}{100}$ plus promptement qu'il ne le feroit par lui ſeul, n'étant ſoumis à l'action d'aucune puiſſance étrangere.

(477.) La grandeur δ du Tangage eſt telle que (459.), $fin\,\delta = \left(\frac{x^2 + t^2Kl}{2t^2Kl}\right) fin\,\Delta = \left(\frac{T^2 + t^2}{2t^2}\right) fin\,\Delta$: d'où l'on voit que cette quantité augmente avec excès, ſeulement par la raiſon que T feroit beaucoup plus grand que t. Si nous ſubſtituons, comme ci-deſſus, $x = 50$, $K = 117\frac{1}{2}$, & $t = 1\frac{59}{100}$, il en réſultera $fin\,\delta = 1\frac{84}{100} fin\,\Delta$: de ſorte que la grandeur de ce Tangage ſera à celle du Tangage que donneroit le Vaiſſeau, dans la ſuppoſition de $T = t$, comme $1\frac{84}{100}$ eſt à l'unité, ou comme 46 eſt à 25.

(478.) La plus grande vîteſſe du Tangage eſt (460.), $= \ldots \left(\frac{T^2 + t^2}{2t^2}\right)^2 \frac{32\,K^2P\,fin\,\Delta}{G}$: donc cette vîteſſe ſera à celle qui auroit lieu dans la ſuppoſition de $T = t$, comme $(T^2 + t^2)^2$ eſt à $(2t^2)^2$: ou en faiſant, comme ci-deſſus, $t = 1\frac{59}{100}$, comme 33 eſt à 16 ; rapport qui eſt exceſſivement grand.

(479.) L'action que ſouffrent les mâts eſt (461.), $= \ldots \left(\frac{T^2 + t^2}{2t^2T}\right)^2 \frac{S'K\,fin\,\Delta}{l}$: & la moindre action a lieu lorſqu'on a $T = t$. Ceci prouve la néceſſité de réduire la valeur de T qu'on a trouvée (462.) par l'équation $S = t^2KPl$, ou $x^2 = t^2Kl$. Faiſant, dans cette équation, $K = 117\frac{1}{2}$, & $l = 3\frac{1}{4}$, on aura $x^2 = 381\frac{7}{8}.t^2$, ou $x = 19\frac{54}{100}t$: de ſorte que ſi nous ſubſtituons $t = 1\frac{59}{100}$, on aura, pour le cas de $a = 9$, & de $u = 10$, $x = 31$ pieds $\frac{7}{100}$. Ainſi, pour que le Vaiſſeau Tangue avec la plus grande douceur, & que la mâture ſoit le moins fatiguée qu'il eſt poſſible, il eſt néceſſaire de réduire la valeur de x à moins de ſes deux tiers, ou celle de S à la moitié : ce qui eſt tout le contraire de ce que nous avons trouvé pour le Roulis, parce que pour ce dernier, nous avions trouvé (461.), $T < t$, & que dans le cas préſent,

nous avons, au contraire, $T > t$. Donc, pour regle générale, on doit tâcher de foulager les extrêmités des Vaiffeaux, en obfervant de les charger le moins qu'on pourra, & de rapprocher les fardeaux vers le milieu autant qu'il eft poffible. En fuppofant une autre lame & une autre viteffe, nous trouverions une valeur différente pour t; mais on a pris un cas parmi ceux où l'on eft un peu expofé, parce que ce font en effet ceux que nous devons examiner avec une attention particuliere. Dans les cas où la mer eft belle, les balancements font fort doux, & l'on ne court point de rifques.

(480.) L'action que fupporte la mâture eft auffi (464.), $= \left(\frac{x^2 + t^2 K l}{x}\right)^2 \cdot \frac{S \sin \Delta}{4 t^4 l^2}$. Et comme dans les Vaiffeaux femblables, & qui différent feulement par leur longueur, on à x dans le rapport de c, en exprimant la longueur par c; & K eft dans le rapport de $\frac{c^2}{p}$, p exprimant la profondeur de la carene; il s'enfuit que l'action que fouffrent les mâts fera, pour ces Vaiffeaux, comme $\left(\frac{c^2 + t^2 l \cdot \frac{c^2}{p}}{c}\right)^2$, ou comme les quarrés des longueurs; c'eft par cette raifon qu'il convient de ne pas allonger beaucoup les Vaiffeaux, ainfi que le pratiquent beaucoup de Conftructeurs, fans autre objet que celui d'augmenter un peu leur marche.

(481.) Pour le plus fouvent, on ne pourra pas réduire x ou S autant qu'il feroit néceffaire; par conféquent, d'après ce qu'on a dit (464.), il feroit bon de diminuer K, pour diminuer également l'action que fouffre la mâture, fi ce n'étoient les hauteurs exceffives auxquelles les eaux s'élevent à la proue; élévations qui font encore plus grandes que celles qui ont lieu fur le côté, à caufe de la viteffe u. La valeur de ces hauteurs eft (465.), $\alpha = \frac{x^2 a}{x^2 + \frac{247}{192} K a} = \frac{T^2 a}{T^2 + \frac{1}{64} c^2 a (2 + \frac{1}{2} c)}$; & on y ajoutera la hauteur de la dénivellation, laquelle (467.), eft $= \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{2} c) \cos s}{c (2 + \frac{1}{2} c)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8} u\right)^2$, à caufe que la viteffe avec laquelle la lame choque la proue (474.), eft $= \frac{8 a^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{2} c) \cos s}{c (2 + \frac{1}{2} c)^{\frac{1}{2}}} + u$.

(482.) Ces formules font voir que plus la valeur de K fera petite, plus les élévations des eaux à la proue feront grandes: & la même chofe arrivera, plus u ou la viteffe du Navire fera grande. Pour le Vaiffeau de 60 canons, on aura $\alpha = \frac{762 a}{762 + 55 a}$, & la dé-

nivellation $= (\frac{41}{100} a^{\frac{1}{2}} \cos \varepsilon + \frac{1}{8}u)^2$; mais cette derniere expression varie suivant les cas, ou suivant les valeurs de u & de ε. Si nous supposons, comme dans l'*Art.* 476, $a = 9$, $\cos \varepsilon = \frac{1}{2}$, & $u = 10$, ce qui revient au cas de naviguer à la bouline, la dénivellation sera $= 3\,\frac{19}{100}$, & $\alpha = 5\,\frac{86}{100}$; ainsi, la somme de ces deux quantités est $= 9$ pieds $\frac{5}{100}$; c'est la hauteur à laquelle l'eau montera à la proue. Si la lame choquoit le Vaisseau en repos, ou fixé, comme quand il est à l'ancre, on auroit $u = 0$, & $\cos \varepsilon = 1$: la dénivellation se réduiroit à $\frac{1}{16}a$; par conséquent si l'on fait $a = 36$, la dénivellation sera de 6 pieds $\frac{3}{4}$, qui, ajoutés à $\alpha = 10$, il en résultera 16 pieds $\frac{3}{4}$ pour l'élévation des eaux à la proue.

(483.) Cette détermination suffit pour faire connoître que dans ce dernier cas où les lames sont fort élevées & le vent fort, le Vaisseau naviguant à la bouline ne doit, ni ne peut porter beaucoup de voiles, comme l'a prétendu un Géométre célébre (*a*). Car supposons que a étant $= 36$, & $\cos \varepsilon = \frac{1}{2}$, il soit possible de faire $u = 15$: dans ce cas, on auroit, comme auparavant, $\alpha = 10$, & la dénivellation $= (\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{15}{8})^2$, ou, à peu près, $= 10\,\frac{7}{25}$; donc l'élévation des eaux à la proue $= 20\,\frac{7}{25}$; c'est trois pieds de plus que toute l'élévation du Vaisseau. Aussi les Marins ont-ils senti, d'après l'expérience, la nécessité de diminuer de voiles dans ces occasions; en effet, u diminue alors, & avec elle la dénivellation des eaux.

(484.) Lorsque les lames choquent le Vaisseau par la poupe, u est négative, & la dénivellation beaucoup moins grande: de sorte que, dans le cas où l'on court vent arriere, ce qui donne $\cos \varepsilon = 1$, si l'on suppose $a = 36$, & $u = 15$, la dénivellation sera $= (\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{15}{8})^2$, ou à peu près $= \frac{9}{16}$ pieds. Ajoutant cette quantité à $\alpha = 10$, l'élévation des eaux sera seulement $= 10$ pieds $\frac{9}{16}$; & si l'on déployoit davantage de voiles, afin d'augmenter la vîtesse u, comme jusqu'à la rendre $= 20$ pieds, la dénivellation seroit $= (\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{20}{8})^2$, ou à peu près $= \frac{1}{64}$, ce qui donne l'élévation des eaux $= 10$ pieds $\frac{1}{64}$, quantité qui est seulement de $\frac{35}{64}$ moins grande qu'auparavant: d'où l'on voit l'inutilité de cette derniere augmentation de voiles, & que la vîtesse de 15 pieds par seconde est bien suffisante pour éviter, presque au dernier degré, les inconvénients qui pourroient résulter du choc des grands coups de mer contre la poupe du Vaisseau.

(485.) La substitution que nous avons faite de $K = 117\,\frac{1}{2}$,

---

(*a*) M. *Bouguer. De la Mâture des Vaisseaux*, Section 2, Conclusion, page 118.

PLANC. IX. n'est exacte, d'après ce qu'on a dit (446.), que dans le cas où les deux parties de poupe & de proue, de part & d'autre du centre de gravité, sont semblables, & que le point I tombe sur B: dans tous les autres, la quantité K dépend du rapport entre les volumes AFI & CHD. Plus le volume AFI est grand à l'égard du volume CHD, plus la valeur de K sera grande pour ce qui concerne les mouvements de la proue, & réciproquement. De-là naît la nécessité d'équilibrer ces deux parties; mais si on y fait attention, on verra qu'elles ne doivent pas être égales; car u étant négatif lorsque les lames choquent le Vaisseau par la poupe, & par cette raison, l'élévation des eaux diminuant dans cette partie; on voit évidemment la nécessité de compenser cette différence en élargissant davantage la partie de la proue.

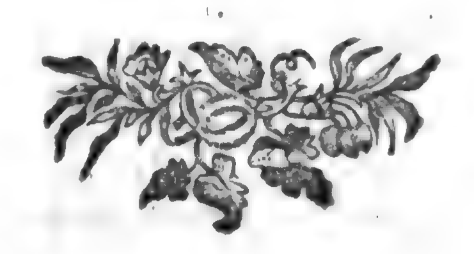
FIG. 51.

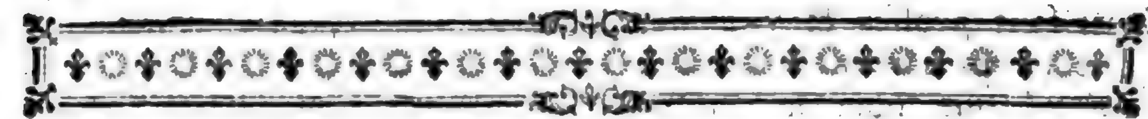
(486.) Puisqu'en donnant plus de grosseur aux extrêmités du Vaisseau, on obtient, comme nous l'avons dit, une plus grande valeur de K, & par conséquent une moindre élévation des eaux dans les Tangages; on voit clairement combien il est à propos de ne pas rendre ces extrêmités trop fines ou trop taillées, c'est-à-dire, de ne point donner trop de façons à l'avant & à l'arriere; &, au contraire, combien il est nécessaire de les renfler, sur-tout dans la partie qui est hors de l'eau. Car cela ne produit aucun désavantage pour la marche, & la quantité K acquiert une plus grande valeur, ce qui contribue principalement à élever le Vaisseau sur les eaux.

(487.) Tout ce que nous venons de dire est bien suffisant pour faire cesser les efforts des Géométres, pour introduire, dans la Marine, la *Proue de moindre résistance*, à laquelle ils ont toujours attribué la qualité de donner au Vaisseau la plus grande vîtesse possible. Car malgré l'étendue de leurs recherches, & la généralité de leurs intentions, on voit clairement que cette proue ne peut, tout au plus, être employée que dans des Embarcations destinées à naviguer sur des rivieres, ou sur des mers tranquilles, & non sur celles où les lames peuvent produire les effets que nous avons vus. De telles proues seroient toujours sous l'eau, & non-seulement les Bâtiments seroient en grand danger de périr, mais encore, par l'augmentation des résistances que cette submersion continuelle occasionneroit, ils perdroient le prétendu avantage d'une plus grande vîtesse, comme on l'a déjà dit, & comme on peut le voir, *Article* 359. De tout cela il faut conclure que, dans des mers tranquilles les Vaisseaux longs & à proues aiguës ont l'avantage de la marche; mais que dans les mers agitées, où les

lames font grosses & violentes, les Vaisseaux courts, & dont la proue est plus renflée, doivent avoir tout l'avantage, tant pour la sûreté que pour la marche. On pourroit aussi admettre, par cette raison, que la plus grande largeur du Vaisseau, ou le maître couple, devroit être un peu plus vers la proue que le milieu du Vaisseau; mais en méditant bien ce qu'on a déjà dit sur ce sujet, on verra que cette disposition n'est pas absolument nécessaire, comme quelques-uns l'ont cru, & le croyent encore sans aucun fondement.

(488.) Ce qui est nécessaire d'avoir présent à l'esprit, c'est que, quoique nous ayons trouvé la résistance G des côtés fort peu considérable dans les mouvements de Tangage du Vaisseau de 60 canons, qui nous a servi d'exemple, cette résistance peut cependant augmenter beaucoup dans des Vaisseaux d'une construction différente. Cela arrive particuliérement lorsque les couples des extrêmités, ou de la poupe & de la proue, étant extrêmement taillés & étroits au-dessous de la superficie de l'eau, & jusques vers le voisinage de la flottaison, comme sont les couples 30 & 33, ils s'élargissent beaucoup, & tout à coup, par un arc & un point d'inflexion. Lorsque les rondeurs ou les parties renflées viennent à sortir de l'eau, lors de leur rentrée, c'est-à-dire, lors de leur chûte, la quantité G augmente considérablement, & subitement, & par conséquent il arrive la même chose à la valeur de $\frac{S'du}{S}$, qui est proportionnelle à l'action que souffre la mâture. Il est donc nécessaire que les Constructeurs évitent, le plus qu'il est possible, de tomber dans ce défaut, qui peut être très-préjudiciable en certaines circonstances. PLANC. VII.





LIVRE CINQUIEME.

MAXIMES ET REGLES DE PRATIQUE, *qui résultent de la théorie exposée dans les Livres précédents.*

CHAPITRE I.

De la force des Vaisseaux, de l'épaisseur des bois qui entrent dans leur construction, & du rapport entre leurs longueurs & leurs largeurs.

(489.) APRÈS avoir exposé dans les *Livres* précédents la théorie de toutes les actions, ou mouvements, que les Vaisseaux présentent à l'observation; & l'avoir développée avec toute la clarté dont ces matieres sont susceptibles : après avoir aussi examiné les effets qui résultent des principes & des regles qu'on auroit pu suivre dans leur construction, ou dans leur disposition; maintenant, pour rendre notre travail d'une utilité plus générale, il nous paroît très-convenable de mettre le plus essentiel de notre théorie à la portée des Constructeurs & des Marins qui ne seroient pas assez versés dans le calcul pour nous suivre dans la route difficile & remplie d'écueils où nous avons marché, & dans laquelle le calcul seul pouvoit nous servir de guide. Nous allons donc mettre sous leurs yeux les Regles & les maximes qui en dérivent & en sont le fruit. Ce nouveau travail ne peut sans doute manquer d'être très-utile; mais cependant la connoissance parfaite de la théorie & des principes que nous avons exposés, sera ce qui produira toujours le plus d'utilité.

(490.) Nous ne nous arrêterons pas à répéter ce que nous avons dit des premieres notions qu'on doit se former pour la connoissance des Vaisseaux, ou autres Bâtiments, ni des propriétés qu'ils doivent nécessairement avoir. Nous ne dirons rien non plus de la variété infinie qu'il y a, & qu'il peut y avoir dans ces propriétés; des méthodes suivant lesquelles on a autrefois construit les Vaisseaux, de celles qu'on y emploie maintenant, & de celles qu'on peut y employer

ployer pour les conſtruire géométriquement. Nous en uſerons de même à l'égard des différentes obſervations & des remarques que la pratique & l'expérience ont ſuggérées : car tous ces objets ont été traités fort au long dans le *Livre* premier, ſans employer le moindre calcul ; & même le calcul dont on a fait uſage dans le *Chapitre* premier du *Livre* ſecond, eſt ſi court & ſi ſimple, qu'il peut être compris ſans le moindre embarras. Le Lecteur doit donc y avoir recours, attendu que le ſujet de ce *Chapitre* eſt de la plus grande importance, c'eſt un des principaux fondements de l'art de conſtruire les Vaiſſeaux.

(491.) Nous nous diſpenſerons pareillement de revenir ſur les inconvénients ſans nombre, & ſur les fâcheuſes conſéquences qui réſultent de ne pas unir ſolidement les pieces qui compoſent le Vaiſſeau, ou qui proviennent du jeu que les pieces peuvent prendre entre elles par la ſuite du temps. Ce point a été traité d'une maniere fort étendue dans le *Chapitre IX* du *Livre II*; ainſi, on peut revoir ce *Chapitre*, notamment depuis l'*Art.* 225 : & après avoir bien entendu tout ce qui y eſt expoſé, & s'être bien convaincu que l'union la plus parfaite de tout le corps du Vaiſſeau eſt un des plus grands avantages, la premiere maxime qui ſe préſente eſt, *que le Vaiſſeau doit ſe conſtruire avec le moins de bois & de fer qu'il eſt poſſible.*

Cette maxime eſt fondée ſur ce que le Vaiſſeau devant s'enfoncer dans le fluide à proportion de ſon poids, comme nous l'avons démontré en détail dans le *Livre II*, *Chap. I*, où nous avons donné des exemples, & expoſé tout ce qui eſt eſſentiel à cet objet ; & la réſiſtance du fluide augmentant à meſure qu'il s'enfonce plus profondément, ainſi qu'on l'a fait voir dans le *Chapitre V* du même *Livre*, il s'enſuit, d'après le *Chapitre I* du *Livre IV*, *Art.* 347, que le Vaiſſeau en ſera moins bon voilier ; propriété qu'on doit toujours chercher à lui donner, à moins que les raiſons les plus puiſſantes ne s'y oppoſent. D'un autre côté, on doit tenir comme une maxime eſſentielle, *qu'il faut faire entrer dans la conſtruction du Vaiſſeau tout le bois & tout le fer néceſſaires pour le rendre ſolide, & pour qu'il ſe maintienne dans cet etat, malgré les coups de mer, les ſecouſſes, & toutes les agitations violentes auxquelles il peut être expoſé.* Il réſulte de ces deux principes, qu'il ne doit pas entrer dans la conſtruction du Vaiſſeau une plus grande quantité de ces matériaux qu'il n'eſt néceſſaire pour qu'il ſoit ſolide : tous ceux qu'on y ajouteroit de plus, faute d'avoir les connoiſſances néceſſaires, ne pourroient être que d'un très-grand préjudice, principalement ſi cette addition ſe faiſoit dans les hauts au-deſſus du centre de gravité. Car, dans ce cas, il en

résulteroit, non-seulement qu'il auroit le défaut d'être moins bon voilier, mais aussi qu'il perdroit une partie de sa qualité de porter la voile. Ajoutons, en général, que ce surcroît de pesanteur auroit encore l'inconvénient de diminuer la hauteur des batteries, & les qualités précieuses qui font que le Navire se comporte bien, & qui sont essentielles à la perfection du manege.

(492.) Pour atteindre la perfection dans ce point, il est nécessaire de déterminer la force absolue du bois, & de la comparer avec les efforts qu'il doit soutenir. Le premier point a été calculé dans le *Liv. II, Chap. IX, Art.* 248 & 249; & même la comparaison qui constitue le second, a été faite dans les mêmes *Articles*, lorsqu'il s'est agi de trouver le poids que peut supporter un des côtés du Vaisseau. Mais il faut observer que le calcul a seulement été appliqué au cas où ce seroient les simples moments qui agiroient, ou que les poids ou forces n'agiroient que dans le cas où le corps du Navire est en repos; cas fort différent de celui où le Navire éprouve des agitations violentes, qui le forcent de donner des balancements de roulis très-rapides, lesquels font naître des moments d'inertie qui agissent avec une force excessive. Si on considere bien ces moments, on verra que leur action sur les bois qui doivent les supporter, ne differe en rien de la force de percussion, que nous avions trouvée (*Tome I, Liv. I, Prop. XLII*, & ses *Corol.* & *Scol.*, *Art.* 309, & *suiv.*) être des centaines & des milliers de fois plus grande que celle de la gravité, selon la vîtesse du mouvement, & selon la matiere qui doit recevoir le coup.

(493.) Il est donc clair que nous ne pouvons déterminer absolument ces efforts; & par conséquent, les forces que doivent avoir les pieces de bois. Mais si nous nous voyons frustrés d'une détermination absolue, nous pouvons en obtenir une *relative*, laquelle, au moyen des expériences, nous fournira la détermination absolue dont nous avons besoin. La résistance ou la force des pieces de bois semblables dans leurs épaisseurs, c'est-à-dire, dans les dimensions de leur équarrissage, est (*Tome I, Art.* 211, 212, & *Note.*), en raison directe des cubes de leurs dimensions linéaires, & en raison inverse des moments qui s'exercent sur elles, qui, dans ce cas, sont les moments d'inertie. Si les épaisseurs des pieces de bois qui entrent dans la construction de différents Vaisseaux, étoient donc comme les dimensions de ces Vaisseaux, ainsi que le pratiquent à peu près les Constructeurs, les moments d'inertie, dont les pieces de bois supporteroient l'action,

ſeroient comme les cinquiemes puiſſances des dimenſions linéaires; & par conſéquent, *les réſiſtances des bois ſeroient en raiſon inverſe des quarrés des mêmes dimenſions linéaires.* Ainſi, pour que les Vaiſſeaux fuſſent également forts, il ſeroit néceſſaire que le nombre des couples dont on les compoſe, fût comme les quarrés de leurs dimenſions: mais ce nombre n'eſt à peu près que comme les racines cubiques des quarrés de ces dimenſions; donc *la force des Vaiſſeaux eſt en raiſon inverſe des racines cubiques des quatriemes puiſſances de leurs dimenſions linéaires*; c'eſt-à-dire, que *les Vaiſſeaux ſeront d'autant plus foibles, que les racines cubiques des quatriemes puiſſances de leurs largeurs ſeront plus grandes; ou que les produits de leurs largeurs, par les racines cubiques des mêmes largeurs, ſeront plus grands.* Le Vaiſſeau de 70 canons, & la Frégate de 22, ont, par exemple, leurs largeurs dans la raiſon de 3 à 2; leurs forces ſont, par conſéquent, à peu près, dans le rapport de 5 à 8. Ceci même a été démontré dans l'*Article* 113, où nous avons dit qu'il réſultoit, de ce principe, que les Frégates étoient exceſſivement fortes, & les Vaiſſeaux très-foibles: & il n'eſt que trop certain que l'expérience nous a toujours fourni des preuves de cette vérité. On voit tous les jours les Vaiſſeaux délabrés, déſunis, & rompus par la violence des tempêtes; tandis que les Frégates ſe maintiennent fermes & ſolides. Les Vaiſſeaux ont continuellement beſoin d'être carenés; opération qui eſt très-coûteuſe, & les Frégates ſe maintiennent avec très-peu de réparations.

(494.) L'erreur qu'on commet ne ſe borne cependant pas à ce ſeul objet. Les Conſtructeurs, plus conduits par les apparences que par la Géométrie, ont cru que l'augmentation du corps d'un Vaiſſeau le rendoit plus fort, & cela par la raiſon ſeule qu'il étoit plus grand; & en conſéquence de ce préjugé, ils l'ont tellement ſurchargé d'artillerie, que ſi celle que porte un Vaiſſeau de 70 canons, avec les uſtenciles qui ſont néceſſaires pour ſon ſervice, eſt de 5250 quintaux, une Frégate de 22 n'en porte que 924 quintaux; tandis qu'elle devroit en porter 1550, pour que la proportion fût gardée: ou, en prenant l'inverſe, le poids de l'artillerie de la Frégate étant de 924 quintaux, il ne correſpondroit que 3118 quintaux pour celle du Vaiſſeau, tandis qu'ils lui en mettent 5250; c'eſt-à-dire, à peu près les deux tiers de plus qu'il ne lui en appartient. Qu'on ajoute maintenant l'augmentation énorme des moments d'inertie qui réſultent de cet excès de poids, à la foibleſſe du Vaiſſeau, qui a déjà été démontrée; on verra

que les suites qui en peuvent résulter, ne peuvent être que très-préjudiciables, comme l'expérience ne le prouve que trop.

(495.) On voit, d'après ceci, que les Vaisseaux ne sont pas seulement foibles, à cause de leur grandeur, mais encore par la surcharge de leur artillerie. Pour apporter remede à ce grand inconvénient, on doit seulement chercher à les fortifier davantage, en augmentant l'échantillon des pieces dont ils sont construits, & non en diminuant le calibre de leurs canons; parce qu'en prenant ce parti, on tomberoit dans des inconvénients encore plus préjudiciables; & en outre on n'éviteroit nullement le premier défaut, qui naît de la foiblesse même des bois. Au contraire, il est nécessaire de diminuer la force des Frégates, par les mêmes raisons, & conformément à la premiere maxime que nous avons établie. Pour cela, il faut que l'expérience nous apprenne de quelle grandeur est le Vaisseau qui a été observé d'une force & d'une solidité suffisantes. Supposons que ce soit le Vaisseau de 40 pieds de largeur, & nous établirons pour regle que tous ceux d'une plus grande largeur ont besoin d'être renforcés, tandis qu'il faut diminuer la force de ceux d'une largeur inférieure, en augmentant pour les premiers les dimensions des bois, & en les diminuant, au contraire, pour les seconds. Ceci peut être pratiqué de deux manieres différentes, sçavoir, en donnant plus ou moins d'épaisseur aux bois, ou en leur donnant plus ou moins de largeur: mais, comme cette amélioration, lorsqu'il est question d'augmenter la force, doit se faire avec le moins de désavantage qu'il soit possible, c'est-à-dire, avec la moindre augmentation de poids; & que, d'un autre côté, les forces des bois sont comme les quarrés de leurs épaisseurs, & comme leurs simples largeurs, il est évident que la correction doit tomber entiérement sur les épaisseurs: car de cette maniere, avec une moindre augmentation de poids, on gagne beaucoup plus de force.

(496.) Supposons maintenant que les épaisseurs des bois ne sont pas comme les simples dimensions linéaires, mais comme leurs quarrés. Dans ce cas, leurs forces absolues seront comme les cinquiemes puissances des mêmes dimensions; & les moments d'inertie étant, dans une raison très-peu plus grande que les mêmes puissances, les forces relatives deviendront à peu près égales dans tous les Vaisseaux. Mais on a vu précédemment que le nombre des couples dont ils sont composés, est comme les racines cubiques des quarrés des mêmes dimensions: donc *les forces des Vaisseaux seront à peu près dans cette raison*, ou plutôt *comme les*

racines quarrées des dimensions linéaires. Les grands Navires auroient donc, à proportion, plus de force que les petits; mais cette augmentation de force est nécessaire pour qu'ils puissent supporter sans que ce soit à leur détriment, le poids énorme de leur artillerie; car, sans cela, ils se trouveroient encore plus foibles que les petits, qui en sont moins chargés à proportion.

(497.) Examinons maintenant les inconvénients qui peuvent résulter de cette regle. Les épaisseurs & les largeurs que les Constructeurs donnent aux têtes des varangues, est environ de $\frac{1}{40}$ de la largeur des Vaisseaux: de cette sorte, pour le Vaisseau de 40 pieds de largeur, que nous avons supposé d'une force & d'une solidité suffisante, il correspond 12 pouces d'épaisseur pour la tête de sa varangue; & pour le Vaisseau de 48 pieds de largeur, on aura 14 pouces $\frac{2}{5}$. Mais la raison des largeurs de ces Navires étant comme 5 est à 6, les épaisseurs des bois, suivant les regles que nous venons d'établir, devroient être comme 25 est à 36; c'est-à-dire, que l'épaisseur de la varangue pour le Vaisseau de 48 pieds de largeur, devroit être de 17 pouces $\frac{1}{5}$, sa largeur demeurant seulement de 14 pouces $\frac{2}{5}$. Cette épaisseur est de 1 pouce $\frac{1}{5}$ plus grande que celle qu'on donne à la varangue du plus grand Vaisseau; & il faut convenir qu'on ne trouvera pas toujours des pieces propres à remplir cet objet; mais les Constructeurs doivent faire tout ce qui leur sera possible pour se conformer à la regle, ou du moins pour en approcher.

(498.) Il ne suffit pas d'avoir renforcé les couples, il est nécessaire de renforcer également les courbes de tous les ponts, de même que les clous & les gournables qui en font la liaison, afin de les mettre en état de soutenir les énormes moments d'inertie qui résultent du Roulis. Le poids que produit cette augmentation des épaisseurs est, à peu près, de 2000 quintaux; par conséquent le Vaisseau se submergera dans le fluide de 3 pouces de plus, à raison de ce poids; quantité qui ne mérite aucun égard: car on a démontré dans l'*Art.* 356, que le Vaisseau étant calé de 6 pouces de plus, ne perd que $\frac{3}{1000}$ de mille par heure dans sa marche. Il est donc déjà évident que l'augmentation de bois que nous proposons pour les grands Vaisseaux, peut être pratiquée sans le risque d'aucune perte de leurs qualités essentielles. Cependant, si la différence des épaisseurs & des largeurs 17 $\frac{1}{5}$ & 14 $\frac{2}{5}$ entraînoit une consommation de bois trop considérable, on pourroit égaler ces deux mesures, en prenant pour l'une & l'autre 16 pouces, ou 16 pouces $\frac{1}{2}$; car la différence qui en résultera, soit dans le poids, soit dans la force, sera extrêmement petite.

(499.) Pour les Frégates, il ne s'agit que de diminuer les épaisseurs des couples, selon la regle que nous avons établie. Prenant pour exemple celle de 22 canons, qui a 32 pieds de largeur, le rapport de la largeur 40 du Vaisseau de comparaison à celle 32 de cette Frégate, sera comme 5 est à 4 : par conséquent, leurs quarrés seront comme 25 est à 16 ; & l'épaisseur des bois de la Frégate, sera seulement de 7 pouces $\frac{17}{25}$, & leur largeur de 9 pouces $\frac{3}{5}$. Mais, comme on n'augmentera nullement le poids, en prenant pour mesure commune la racine quarrée du produit des deux dimensions, qui est à peu près 8 pouces $\frac{3}{5}$; & que, par ce moyen, bien loin de perdre de la force, on en gagne, il s'ensuit qu'en donnant à la tête des varangues 8 pouces $\frac{3}{5}$, au lieu de 9 pouces $\frac{3}{5}$, la Frégate sera encore plus forte, à proportion, que les Vaisseaux, quoiqu'elle soit moins pesante en bois de 560 quintaux.

(500.) Si, au lieu de clous, ou de gournables de fer, pour attacher les bordages, on faisoit usage de gournables de bois, il faudroit augmenter les largeurs des couples, & diminuer à proportion les épaisseurs, afin de ne pas trop les affoiblir par la tarriere. Mais il est nécessaire d'apporter à cela une grande précaution, parce qu'à mesure que la différence entre la largeur & l'épaisseur sera plus grande, les bois s'affoibliront de plus en plus, à cause que leurs forces sont comme les quarrés de leurs épaisseurs.

(501.) Quoique ces considérations soient dignes que le Constructeur y apporte le plus grand soin & la plus grande attention, afin de parvenir à donner aux Navires les dimensions convenables, pour qu'ils soient capables d'une résistance suffisante, néanmoins il faut apporter un soin plus particulier pour renforcer les courbes du second pont des Vaisseaux. Nous avons amplement exposé dans l'*Art.* 255 combien cette précaution étoit nécessaire, attendu que les moments d'inertie dont ce pont supporte l'action, sont plus que doubles de ceux que supporte le premier ; de sorte qu'un canon de 24 placé sur le premier pont, produit moins d'effet qu'un de 4 placé sur le second. Nous avons encore fait voir dans le même *Article*, qu'on fera bien de relire, pour plus de clarté, & pour faciliter l'intelligence de celui-ci, qu'en renforçant également ces deux ponts, & en mettant du canon de 24 sur le premier pont, il ne faudroit mettre que du 6 sur le second : ainsi, on doit nécessairement conclure que les courbes du second pont doivent être plus fortes que celles du premier. Les Constructeurs observent cette regle dans les Frégates, à cause qu'elles ne portent pas d'artillerie sur leur pont inférieur : ainsi, par la même raison, les moments d'inertie que soutient

le premier pont dans les Vaisseaux, étant beaucoup moindres que ceux que soutient le second, le premier pont n'a pas besoin d'être aussi renforcé que le second.

(502.) Nous n'avons traité jusqu'ici de la nécessité de renforcer le corps des Vaisseaux, que relativement à l'action qu'ils éprouvent dans les Roulis; mais la force qui leur est nécessaire relativement au Tangage exige des considérations entiérement différentes, parce que les moments d'inertie n'ont pas lieu dans ce dernier cas. Nous avons dit, dans l'*Art.* 255, que ces moments étant décomposés en moments verticaux & horisontaux, les premiers sont soutenus par la force verticale des couples, qui est immense, & par conséquent ces moments produisent peu d'effets sur eux; & les moments horisontaux sont soutenus par la force horisontale des couples & des courbes qui forment la liaison: de sorte que, dans le balancement du Roulis, ceux-ci deviennent très-considérables, comme nous l'avons fait voir. Les conséquences sont absolument contraires dans le balancement du Tangage, parce que le mouvement horisontal étant presque insensible, les effets qui en résultent sont seulement considérables dans les moments verticaux; mais, comme ces moments sont soutenus par les coups de mer qui les produisent, & qui accompagnent le corps même du Vaisseau pendant la durée de l'oscillation, il s'ensuit déjà qu'il ne faut considérer, dans les balancements du Tangage, que les simples moments, & non les moments d'inertie.

(503.) On voit, d'après cet exposé, que la force dont le Vaisseau a besoin pour résister à l'action de ces moments, n'est pas différente de celle qu'il lui faut dans le cas du repos; c'est-à-dire, qu'elle ne differe pas de celle qui lui est nécessaire pour résister aux forces qui tendent à le faire arquer, & dont nous avons traité amplement dans le *Liv. II*, *Chap. IX*, que, pour plus de clarté, on fera bien de relire. L'action que les Vaisseaux semblables ont à soutenir est, dans ce cas, comme les quatriemes puissances de leurs dimensions linéaires, (113, & *Nott.*); mais la force des bois étant comme les cubes des mêmes dimensions, il s'ensuit que *les forces des Vaisseaux seront en raison inverse des mêmes dimensions linéaires.* C'est pour cette raison qu'on observe si souvent les grands Vaisseaux prodigieusement arqués & désunis, tandis que l'arc des Frégates est presque insensible.

(504.) Pour remédier à cet inconvénient, & faire que les Vaisseaux & les Frégates soient capables de la même résistance, il est nécessaire d'augmenter l'épaisseur des bordages, & des autres pieces qui s'étendent de la poupe à la proue, dans la raison

des quarrés des dimensions linéaires des Vaisseaux semblables; (495), ou d'accourcir les longueurs des Vaisseaux, relativement à leurs largeurs, dans la raison inverse des racines quarrées des largeurs. Si nous admettons, comme ci-dessus, que le Vaisseau de 40 pieds de largeur est celui qui a précisément toute la force nécessaire; ce Vaisseau ayant 144 pieds de longueur, le Vaisseau de 48 pieds de largeur devroit seulement avoir 160 pieds de longueur, au lieu de 175 que lui donnent les Constructeurs, pour qu'il ne souffrit pas plus que le premier, dans le sens de sa longueur. La Frégate de 32 pieds de largeur, suivant le même principe, devroit avoir 128 pieds de longueur, au lieu de 115 seulement, que les Constructeurs lui donneroient : bien entendu qu'on suppose ici l'épaisseur des bordages toujours dans la raison des dimensions linéaires, ou des largeurs des Vaisseaux. Si, au contraire, on ne vouloit pas altérer les longueurs, la premiere préceinte du Vaisseau de 40 pieds de large, ayant 7 pouces d'épaisseur, on devroit donner 10 pouces $\frac{2}{25}$ à celle du Vaisseau de 48 pieds de largeur, à cause que le quarré de 40 est à celui de 48, comme 7 est à 10 $\frac{2}{25}$. Cette mesure s'écarte seulement d'un demi-pouce de celle que donnent les Constructeurs; mais si on trouve cette conformité dans cette piece, il n'en est pas de même dans les autres bordages, parce qu'ordinairement ils bordent les fonds des deux Vaisseaux de 48 & de 40 pieds de largeur, avec des bordages d'une épaisseur qui est presque la même, tandis que, suivant notre regle, si les bordages du fond du Vaisseau de 40 pieds de largeur ont 4 pouces d'épaisseur, ceux du Vaisseau de 48 pieds de largeur devroient avoir 5 pouces $\frac{19}{25}$, ou, à peu près, 5 pouces $\frac{3}{4}$. De même, dans la Frégate de 32 pieds de largeur, la préceinte devroit avoir 4 pouces $\frac{1}{2}$, & le bordage du fond 2 pouces $\frac{1}{2}$: les Constructeurs font la premiere de 5, & l'autre de 3.

(505.) On peut prendre un milieu entre les deux regles, en faisant la correction en partie dans la longueur, & en partie dans l'épaisseur des bordages. Pour cela, il est nécessaire que *l'épaisseur des bordages soit comme les racines quarrées des cubes des largeurs des Vaisseaux; & les longueurs des Vaisseaux comme les racines quatriemes des cubes des mêmes largeurs.* De cette sorte, l'épaisseur de la premiere préceinte, dans le Vaisseau de 48 pieds de largeur, doit être de 9 pouces $\frac{1}{4}$; celle du bordage du fond de 5 pouces $\frac{1}{4}$; & la longueur de ce Vaisseau de 165 pieds. Dans la Frégate de 32 pieds de largeur, l'épaisseur de la préceinte doit être de

5 pouces

5 pouces, celle du bordage du fond de 2 pouces $\frac{4}{7}$, & la longueur de cette Frégate de 122 pieds. Ces dimensions s'approchant davantage de la pratique des Constructeurs, trouveront peut-être plus de crédit parmi eux. Le reste des bordages des Vaisseaux se corrigera en suivant la même proportion.

(506.) Cette diminution presque générale des épaisseurs des bois dans les Frégates, & l'augmentation de leur longueur, leur procurera un très-grand avantage, parce qu'elles en peuvent devenir beaucoup plus légeres, en tâchant de diminuer leurs volumes, ou leurs coques, proportionnellement au poids qu'on leur retranche. Mais il n'en est pas de même dans les Vaisseaux, l'augmentation des épaisseurs avec la diminution de leur longueur sera un peu préjudiciable pour le même objet. Dans le Vaisseau de 48 pieds de largeur, le poids des bois & des fers, augmentera de 4500 quintaux, à quoi ajoutant 1500 quintaux, à cause du poids que ce Vaisseau devra porter de moins, en vertu de la diminution de sa longueur, on aura 6000 quintaux, lesquels répondent à 9 pouces; c'est la quantité dont le Vaisseau se submergera de plus dans le fluide. L'effet que cela produira dans la marche, quoique peu considérable, sera sensible, & la batterie s'abaissera aussi de 9 pouces: par cette raison, on peut donner un peu plus de volume aux fonds de la carene, pour que le Vaisseau s'enfonce de quelques pouces de moins dans le fluide.

(507.) Cette correction que nous proposons pour les Vaisseaux, repugnera peut-être à beaucoup de Constructeurs, qui fondent leur reputation, & portent tous leurs soins seulement à rendre les Vaisseaux bons voiliers. En effet, cette qualité est, sans contredit, la plus brillante, elle se manifeste aussi-tôt que le Vaisseau est à la voile, & entraîne ainsi le suffrage de la multitude, tandis que celle d'être ferme & solide, ne se connoît que tard, ou même peut ne se connoître jamais; car nous n'ignorons pas qu'on peut attribuer à différentes causes, tous les délabrements, & les autres effets d'une mauvaise construction. Quoi qu'il en soit, la Géométrie nous manifeste clairement, & ne nous permet pas de douter de toutes les suites fâcheuses qui doivent résulter du défaut d'épaisseur des bois, & des longueurs excessives qu'on est dans l'usage de donner aux Vaisseaux.

(508.) Après avoir examiné la force relative des différents Vaisseaux, les uns à l'égard des autres, nous devons maintenant considérer les forces relatives des différentes parties d'un même Vaisseau, afin qu'on puisse les augmenter ou les diminuer dans chaque

partie, ſuivant l'exigence des cas. L'action ou le moment que ſoutiennent les différentes parties d'un Vaiſſeau de la poupe à la proue, eſt comme les produits des différents poids par leur diſtance au point qui ſoutient l'effort, (*Tome I, Art.* 208.); & de-là, nous avons conclu, en ſuppoſant les poids ſemblablement diſtribués dans différents Vaiſſeaux, que cette action eſt comme les quatriemes puiſſances des dimenſions linéaires. Mais les poids peuvent être diſtribués de différentes manieres, ou être placés à différentes diſtances: par conſéquent, plus ces diſtances ſeront grandes, plus les Vaiſſeaux auront à ſouffrir. Ainſi, lorſque des raiſons preſſantes n'exigent pas une autre diſpoſition, on peut établir que *plus les differents poids, dont la charge d'un Vaiſſeau eſt compoſée, ſeront placés près de ſon centre de gravité, moins le Vaiſſeau aura à ſouffrir.* Ceci doit s'entendre auſſi des matériaux, dont le Vaiſſeau même eſt compoſé: de ſorte que s'il y avoit des raiſons bien fondées qui exigeaſſent une plus grande quantité de matériaux dans les proximités du centre qu'aux extrêmités, on obtiendroit beaucoup d'avantage, pour la force & la ſolidité du Vaiſſeau, en les plaçant ainſi.

(509.) Cette néceſſité eſt prouvée, par ce que nous venons de dire; car l'effort que ſoutient chaque partie du Vaiſſeau, étant comme les produits des différents poids, par leur diſtance au point qui ſoutient l'effort, plus ce point ſera près du centre, plus l'effort qu'il aura à ſoutenir ſera grand; & cela, non-ſeulement à cauſe que ces diſtances ſeront plus grandes, mais auſſi parce que le nombre des poids qui agiſſent ſera plus grand. Les parties du Vaiſſeau ont donc beſoin d'avoir plus de force, à meſure qu'elle ſont plus proches du centre de gravité: & par conſéquent, les bordages dans le milieu du Vaiſſeau doivent avoir plus d'épaiſſeur que dans les extrêmités. Dans le Vaiſſeau de 48 pieds de largeur, nous avons donné (505.), 9 pouces $\frac{1}{4}$ à la premiere préceinte, & aux bordages du fond 5 pouces $\frac{1}{2}$; mais on peut donner à la préceinte 10 pouces $\frac{1}{2}$ dans ſon milieu, & 9 pouces dans ſes extrêmités; & aux bordages du fond, 6 pouces dans le milieu, & 5 dans les extrêmités. On ſuivra la même proportion pour les autres bordages, & pour les autres Vaiſſeaux. Par ce moyen, les Vaiſſeaux ſeront plus forts, non-ſeulement à cauſe de la force abſolue des bois qui en deviendra plus grande, mais parce que le poids ſera plus raſſemblé vers le centre.

(510.) On voit, par les mêmes raiſons, que les couples des extrêmités du Vaiſſeau n'ont pas beſoin d'être auſſi forts que ceux

du milieu ; car ni les quantités de poids, ni leur diſtance de leur milieu, ne ſont pas auſſi grandes pour les couples des extrêmités que pour ceux du milieu. Cette regle n'eſt pas nouvelle pour les Conſtructeurs anglais ; ils la mettent déjà en pratique, car ils donnent un pouce de moins de largeur aux couples des extrêmités.

(511.) Juſqu'ici nous nous ſommes réduits à traiter cet objet d'après la ſuppoſition que les Vaiſſeaux ſoient entiérement conſtruits de bois de chêne : mais on peut auſſi les conſtruire de bois de cedre *, de ſapin, ou de tout autre bois, dont la gravité ſpécifique ſoit moindre ou plus grande que celle de chêne. Dans ces cas, comme dans le premier, il eſt néceſſaire de ſe régler, autant qu'il eſt poſſible, ſur les maximes établies. Si le bois qu'on emploie eſt, par exemple, d'une gravité ſpécifique moindre que celle de chêne, il eſt néceſſaire d'augmenter, ſoit les épaiſſeurs, ſoit les largeurs des pieces, ou même ces deux dimenſions enſemble, ſuivant l'exigence des cas, mais avec l'attention de ne porter ces augmentations que juſqu'à ce que le corps du Vaiſſeau ait acquis une force égale ou correſpondante à celle qu'il auroit étant de chêne, ſans lui augmenter ſon poids, afin de ne pas enlever au Navire les bonnes qualités qui dépendent de cette circonſtance.

(512.) Il ne ſuffit pas d'avoir attention à la gravité ſpécifique du bois, il eſt néceſſaire de connoître & d'avoir préſente à l'eſprit la force ou l'intenſité de ſes fibres, parce que cette force n'eſt pas toujours comme la gravité ſpécifique. Il y a des bois qui, à proportion de leur poids, ſont plus forts, & d'autres qui, au contraire, ſont plus foibles. Le *Pin* eſt de la premiere eſpece, ce qui le rend préférable aux autres, parce qu'en même temps il n'eſt pas moins durable. La force du *Pin* de *Tortoſe*, eſt à celle de notre *Chêne*, comme 4 eſt à 5, ainſi que je l'ai trouvé par pluſieurs expériences. M. *Muller* (*Traité pratique de la Fortification*, *page* 77) dit avoir trouvé la force de ces deux bois, comme 2 eſt à 3 ; d'où il ſuit que notre *Pin* Eſpagnol eſt ſans doute plus fort que celui que M. *Muller* a ſoumis à l'expérience, dans la raiſon de 6 à 5. Ce *Pin* eſt celui que les Français nomment *Sapin* **, & les Anglais *Fir*. Le bois que les Français appellent *Pin*, & les Anglais *Pine* ***, & que nous diſtinguons en Eſpagne ſous le nom de *Pin du Nord*, eſt de

---

* *Larix orientalis, fructu rotundiore, obtuſo.* Tournf. Inſt. R. H. 586. *Pinus Cedrus, foliis faſciculatis acutis* (foliis pluribus ex eâdem baſi vaginali). Linn. Spec. Plant. 1420.

** Nous le traduirons toujours par le mot *Sapin*. (*Abies taxi folio, fructu furſum ſpectante.* Tournf. Inſt. R. H. 585. *Pinus picea, foliis ſolitariis emarginatis* (& baſi diſtinctis). Linn. Spec. Plant. 1420.).

*** *Pinus ſylveſtris maritima.* J. B. 1. 245. Tournf. Inſt. R. H. 586. *Pinus ſylveſtris, foliis geminis, primordialibus ſolitariis glabris.* Linn. Spec. Plant. 1418.

$\frac{1}{3}$ moins fort que le *Pin de Tortose*, ainsi qne je l'ai trouvé par mes expériences ; c'est-à-dire que sa force est à celle de notre *Chêne*, comme 7 est à 10. Tous ces rapports ne sont pas tellement exacts qu'ils soient exempts de toute variation. Dans les mêmes qualités de bois il s'en trouve quelques pieces de plus ou moins compactes, d'un grain plus ou moins fin, dont les fibres sont plus ou moins droites, qui sont plus ou moins chargés de résine, enfin de plus ou moins secs ; & toutes ces variétés conduisent à faire varier la force & le poids. Mais les rapports que nous venons d'assigner ayant été déterminés par des expériences faites avec soin sur des bois suffisamment secs, peuvent être pris comme l'expression d'un rapport moyen, sauf à considérer les variations qui peuvent provenir de la différente nature des bois, de leurs différents états de sécheresse, de maturité, &c.

(513.) Le poids du même sapin étant à maturité, & dans un état de sécheresse convenable pour être employé, est à celui du *Chêne*, à peu près comme 3 est à 5 ; d'où l'on voit le grand avantage qu'il y auroit à se servir du premier. Car si leur force eût été comme leur poids, elle eût été aussi comme 3 est à 5 ; mais on a trouvé les forces de ces deux especes de bois, comme 4 est à 5, ainsi que nous l'avons dit plus haut. De cette sorte, si on bordoit un Vaisseau en sapin, il suffiroit, pour lui donner autant de force que s'il étoit bordé en chêne, d'augmenter les épaisseurs des bordages dans la raison de 4 à 5 ; & dans ce cas, le poids de tout le bordage fait en sapin seroit moindre que s'il étoit en chêne, dans la raison de 3 à 4 ; c'est-à-dire que le côté du Navire seroit d'un quart moins pesant, en conservant cependant la même force ; avantage très-considérable, parce que la diminution seule de ce poids monte, dans le Vaisseau de 60 canons qui nous a servi d'exemple, à 2025 quintaux (161.).

(514.) On diminuera pareillement le poids des autres pieces qui entrent dans la construction des Vaisseaux, même en se procurant quelques nouveaux avantages, & toujours sans leur rien ôter de leur force. Par exemple, la force des couples est comme le produit du cube de leurs dimensions, par l'intensité ou la force des fibres du bois ; ainsi, pour que les couples faits de différents bois soient toujours également forts, il est nécessaire que les produits des cubes des dimensions par les intensités des fibres, soient égaux, & par conséquent, si le produit du cube des dimensions du couple fait de bois de chêne, par l'intensité 5 de ses fibres, est divisé par l'intensité 4 des fibres du sapin ; & si on extrait la racine cubique du quotient, cette racine sera la dimension qu'il faut donner au couple fait de bois de sapin Ainsi, l'épaisseur de ce couple étant de 12 pouces, son cube 1728,

multiplié par 5, & divisé par 4, donne au quotient 2160, dont la racine cubique est à peu près 13; c'est le nombre de pouces qu'il faut donner d'épaisseur au couple fait de sapin, pour qu'il soit aussi fort que celui de bois de chêne qui a 12 pouces d'épaisseur. Le poids de ces couples étant comme le quarré de leurs dimensions, multiplié par la gravité spécifique des bois dont ils sont faits, le poids du couple de chêne sera donc au poids du couple de sapin, comme 144 multiplié par 5, est à 169 multiplié par 3, ou comme 240 est à 169; de sorte que les couples étant également forts, celui de bois de sapin peseroit à peu près $\frac{1}{10}$ de moins que celui de chêne, ce qui feroit, par conséquent, pour tous ceux du Vaisseau de 60 canons, une diminution de 2655 quintaux. Si on applique la même regle à toutes les autres pieces qui entrent dans la construction de ce Vaisseau, il se trouvera peser à peu près 7000 quintaux de moins, quoiqu'il conserve toujours la même force.

(515.) De là on conclud évidemment qu'il y auroit de très-grands avantages à construire le Vaisseau avec du bois de sapin; car, quoique, pour lui conserver la qualité de bien porter la voile, on dût lui mettre 2955 quintaux de lest de plus, cela n'empêcheroit pas qu'il ne fût toujours élevé sur l'eau de 9 pouces de plus qu'auparavant: par conséquent il auroit sa batterie plus élevée de cette même quantité, & il seroit beaucoup meilleur voilier. Ou si l'on regardoit sa batterie comme déjà suffisamment élevée, on pourroit diminuer le creux de ces 9 pouces; ce qui seroit beaucoup plus avantageux, non seulement pour augmenter sa force pour porter la voile, mais aussi pour augmenter sa marche.

CHAPITRE II.

De la grandeur des Vaisseaux.

(516.) Nous avons déterminé, dans le *Liv. II*, *Chap. I*, la grandeur des Vaisseaux, mais nous ne l'avons fait qu'en nous conformant aux mesures maintenant adoptées par la plus grande partie des Constructeurs; il n'y a même que très-peu de différence sur ce point entre toutes les nations de l'Europe. On faisoit anciennement les Vaisseaux beaucoup plus petits qu'on ne les fait aujourd'hui; je veux dire les Vaisseaux de guerre: car les Navires marchands ne doivent être limités dans leur construction que par la volonté de ceux qui les font construire, par la charge qu'ils doivent transporter,

& par la dépenſe qu'on veut y faire; car les réflexions du Conſtructeur doivent auſſi regarder cet objet eſſentiel. Le P. *Fournier*, dans ſon *Hydrographie*, imprimée à Paris en 1679, *Liv. I*, *Chap.* 30, exalte avec complaiſance la grandeur & les bonnes qualités du Vaiſſeau *la Couronne*, comme choſe fort extraordinaire dans ce temps-là, quoique ſa longueur fût ſeulement de 155 pieds français, & ſa largeur de 44; dimenſions qu'on donne aujourd'hui à un Vaiſſeau de 64 canons, ou tout au plus à un de 70. Mais, malgré cette autorité, M. *Daſſié*, qui fit imprimer ſon *Architecture Navale* dans la même ville, deux années avant le P. *Fournier*, donne, à la page 110 de cet Ouvrage, un état des Vaiſſeaux qu'avoit le Roi de France en 1671; & il ſuppoſe *le Soleil Royal* & *le Royal Louis* de 2500 tonneaux. Or, ſuivant les regles qu'il preſcrit lui-même pour déterminer la capacité des Vaiſſeaux (*page* 23), il correſpondroit à chacun de ces Vaiſſeaux 48 pieds français de largeur, qui eſt la largeur qu'on donne aujourd'hui aux plus grands Vaiſſeaux à trois ponts. Il paroît, d'après cela, que, depuis l'année 1671 juſqu'à préſent, la grandeur des Vaiſſeaux du premier rang n'a pas varié ſenſiblement; mais ſi nous conſidérons les Vaiſſeaux d'un rang inférieur, nous y trouvons des différences conſidérables. Suivant le même M. *Daſſié*, la capacité d'un Vaiſſeau de 60 canons, pris dans l'état que nous venons de citer, n'étoit que de 1000 tonneaux, & à ces 1000 tonneaux, il ne correſpond que 34 pieds $\frac{1}{4}$ de largeur; mais ſuppoſons qu'elle fût de 36 pieds $\frac{1}{2}$, comme il réſulte d'une Table que le même Auteur donne à la *page* 51, ce ne ſera, tout au plus, de 38 pieds $\frac{1}{4}$ anglais, & cette largeur ſera encore de 3 pieds $\frac{3}{4}$ moins grande que celle que nous avons aſſignée (*Liv. II*, *Chap. I.*) au Vaiſſeau de 60 canons.

(517.) *William Sutherland*, dans ſon *Ship-Builder's Aſſiſtant*, imprimé à Londres, en 1711, ne donne à un des plus grands Vaiſſeaux de trois ponts (*page* 90.) que 46 pieds $\frac{1}{4}$ de largeur: & à la *page* 97, il donne ſeulement 38 pieds $\frac{1}{4}$ de largeur à un Vaiſſeau de 70 canons, en diminuant 2 pieds pour l'épaiſſeur des bordages des deux côtés. *Don Antonio de Gaſtañeta*, (*Proporciones de las Medidas, ... para la fabrica de Navios*), donne auſſi au Vaiſſeau de 60 canons, 21 coudées $\frac{1}{3}$ de largeur, ce qui correſpond à 39 pieds $\frac{3}{4}$ anglais, & fait, par conſéquent, 2 pieds $\frac{1}{4}$ de moins que celle que nous avons aſſignée au Vaiſſeau du même rang. De-là, on doit conclure que les dimenſions des coques des Vaiſſeaux ont été journellement en augmentant; & que celles qu'on leur donne aujourd'hui, & que nous avons aſſignées

ne sont pas tellement déterminées qu'on ne puisse se permettre d'y faire quelque altération; ainsi, il nous paroît qu'on ne doit les conserver qu'autant qu'elles paroîtront mériter la préférence pour se procurer quelque avantage ou quelque perfection particuliere.

(518.) Ce sont ces avantages que les Constructeurs modernes croient avoir rencontrés; car en donnant à un Vaisseau les plus grandes dimensions, & en lui conservant la capacité nécessaire, il s'ensuit qu'on lui donne des lignes d'eau plus aiguës; & par conséquent qu'il éprouve moins de résistance dans le fluide, d'où il résulte une plus grande marche.

(519.) Cependant l'avantage n'est pas aussi réel qu'on pourroit le penser. Supposons, par exemple, deux Vaisseaux de 60 canons, l'un de 42 pieds de largeur, & l'autre seulement de 40 pieds, tous les deux ayant des dimensions proportionnelles entre elles, tant pour la coque que pour les bois, les agrès, les apparaux, l'équipage, & même l'artillerie. Ces deux Vaisseaux flotteront sur l'eau dans une disposition absolument semblable: le plus petit, suivant ce qu'on a dit (359.), marchera mieux avec de petits vents, & le plus grand aura l'avantage avec des vents violents. Cet avantage du petit Vaisseau, joint à la circonstance que sa construction seroit plus solide, comme nous l'avons dit dans le *Chapitre* précédent, paroît le rendre préférable; mais ce Vaisseau, dans l'état où nous le considérons, ne peut être réputé un Vaisseau de 60 canons, à moins qu'on ne lui mette la même artillerie qu'à l'autre, tant pour le nombre que pour le calibre & le poids des pieces. Cette artillerie étant donc substituée à la premiere, il se trouvera surchargé non seulement par le poids excédent de l'artillerie, mais aussi par celui des munitions & des ustensiles qu'il faudra augmenter, & même par celui du surcroît d'équipage & de vivres que cette circonstance rendra nécessaire. Si le poids de l'artillerie, avec ses munitions & ustensiles, est de 3760 quintaux pour le grand Vaisseau, proportion gardée, le poids de celle du petit ne devroit être que de 3250 quintaux, c'est-à-dire, de 510 quintaux de moins: ainsi, le petit Vaisseau se trouvera surchargé, pour cet objet, de toute cette quantité. Pareillement, si le poids de l'équipage, avec ses vivres, est de 5150 quintaux pour le premier Vaisseau, pour le second il devroit être seulement de 4500; c'est-à-dire, 650 quintaux de moins, lesquels étant ajoutés aux 510 quintaux que nous venons de trouver, on trouvera que le petit Vaisseau seroit surchargé de 1160 quintaux, ce qui correspond à 1820 pieds cubes de volume. Divisant ces 1820 pieds cubiques par 5312, comme nous l'avons dit, *Art.* 110, il en résulte

un peu plus de 4 pouces pour la quantité dont le petit sera à proportion plus submergé dans le fluide que le grand ; ce qui le rendra moins bon voilier. Mais, comme nous avons démontré (356.) que ce Vaisseau, pour être plus calé de 6 pouces, ne perd que $\frac{3}{1000}$ de mille par heure ; il s'ensuit que, pour ces 4 pouces, il ne perdra que $\frac{2}{1000}$ de mille ; c'est-à-dire, un mille sur 500 ; quantité absolument négligeable. On doit donc conclure que l'idée d'augmenter les dimensions des Vaisseaux, dans la seule vue de leur donner une plus grande marche, ne mérite aucune attention, & même doit être rejettée.

(520.) En outre, si, d'après ce que nous avons dit (496.), on diminue les épaisseurs des couples & des bordages dans la raison des largeurs, afin que les deux Vaisseaux soient d'une force égale, le poids du petit Vaisseau se trouvera diminué de 850 *quintaux*, lesquels retranchés des 1160 ci-dessus, il ne restera plus que 310 *quintaux*, dont le petit Vaisseau sera surchargé. Ces 310 quintaux répondent à 486 pieds cubiques de volume, lesquels étant divisés par 5312, il vient au quotient un peu plus d'un pouce : c'est uniquement de cette quantité que le petit Vaisseau sera plus submergé qu'il ne le seroit sans cet excédent de charge. D'un autre côté, il faut considérer qu'en supposant la premiere batterie du grand Vaisseau élevée de 5 pieds au-dessus du niveau de l'eau, celle du petit, proportion gardée, ne sera moins élevée que de 3 pouces : ainsi, il lui restera 4 pieds 9 pouces de batterie, ou simplement 4 pieds 8 pouces, en retranchant le pouce dont il doit s'enfoncer davantage, à raison de son excès de charge ; & c'est à cela que se réduit tout le désavantage de ce Vaisseau à l'égard du grand.

(521.) En effet, l'unique soupçon qui pourroit nous rester, est que le petit Vaisseau perdroit quelque avantage du côté de la qualité de porter la voile, à cause de l'augmentation de charge qu'on lui donne en artillerie, en équipages & en vivres ; augmentation dont la totalité a son centre de gravité plus haut que celui des bois qu'on lui a retranchés. Mais on trouvera, en faisant le calcul qui convient, que, par toutes ces causes réunies, le centre de gravité du Vaisseau ne s'élevera que de 3 pouces $\frac{1}{4}$; ce qui, suivant ce qu'on a dit, *Art.* 383 & 385, ne diminue que de $\frac{1}{31}$ l'élévation du métacentre au-dessus de celui-ci, &, par conséquent, l'inclinaison du Vaisseau n'augmentera aussi que de $\frac{1}{31}$, c'est-à-dire, de 12 à 20 minutes ; quantité qui est assurément négligeable.

(522.) Il est certain cependant que tous les avantages, quoique, à la vérité, peu considérables, demeurent toujours du côté du grand Vaisseau. La seule chose qui, sans aucun doute, soit en faveur du

petit,

petit, est l'économie de sa construction & de son entretien; car il coûteroit à peu près $\frac{1}{8}$ de moins que le grand; de sorte que si le grand Vaisseau coûte 160000 *Pesos* *, le petit en coutera seulement 140000, & les frais d'entretien seront dans la même proportion. Cette différence, comme on le voit, mérite d'être considérée, sur-tout si l'on fait attention aux foibles avantages qu'on a vu résulter de cet excès de dépense.

(523.) Il suit de ce que nous venons de dire, que la grandeur des Vaisseaux ne doit pas excéder la mesure qui est nécessaire pour répondre aux objets pour lesquels ils sont construits; c'est-à-dire que, pour les Vaisseaux de guerre, elle doit se régler sur le service & la manœuvre de l'artillerie qu'ils doivent porter: car, comme on l'a vu, on peut obtenir, à très-peu près, tous les autres avantages toutes les fois qu'on apportera l'attention convenable à faire les calculs & les corrections nécessaires. Le Vaisseau de 60 canons exige, à sa seconde batterie, des pieces de 12, dont la longueur, y compris la culasse, est de 9 pieds $\frac{1}{2}$. Ajoutant à cette quantité 4 pieds 9 pouces, moitié de la largeur de la Chaloupe, plus 1 pied pour ce dont la volée du canon doit être dans l'intérieur du Vaisseau, afin qu'on puisse le charger commodément, & 9 pouces pour l'épaisseur du bordage & des couples du côté, on aura en tout 16 pieds pour la distance qu'il doit y avoir depuis le milieu du Vaisseau jusqu'à son côté, dans la partie où se trouve le canon; ou, en soustrayant 6 pouces pour la rentrée du vibord, on aura 15 pieds 6 pouces pour la demi-largeur du Vaisseau dans cette partie. Supposant que la rentrée des œuvres mortes soit reguliérement de $\frac{1}{5}$ de la largeur, la moitié de cette largeur sera par conséquent les $\frac{5}{4}$ de 15 pieds $\frac{1}{2}$, ou 19 pieds 4 pouces $\frac{1}{2}$, & la largeur entiere de 38 pieds 9 pouces; de sorte qu'avec cette largeur on peut construire un Vaisseau qui porte des pieces de 12 sur son second pont.

(524.) On a dû sans doute s'appercevoir que, dans le calcul que nous venons de faire, nous n'avons point compris l'espace qu'on est dans l'usage de laisser entre le côté de la Chaloupe & la culasse du canon, lorsqu'il est entiérement rentré dans le Vaisseau. Cet espace devant servir pour que les gens de l'équipage puissent passer avec quelque sûreté, doit être au moins de 2 pieds; ce qui, avec deux autres

* Le *Peso* est une monnoie imaginaire qui équivaut à 15 Réaux de *Vellon*. 4 *Réaux* de *Vellon* valent une livre Tournois: ainsi, un *Peso* vaut 3 livres 15 sols Tournois, & 160000 *Pesos* valent 600000 livres Tournois. Il y a aussi une monnoie réelle appellée *Peso duro*; cette piece vaut 4 *Pesetas*, ou 20 *Réaux* de *Vellon*; c'est-à-dire, 5 livres Tournois; mais ce n'est pas de cette monnoie que l'Auteur veut parler, mais des *Pesos* imaginaires que les Espagnols appellent *Pesos Sencillos*.

pieds pour le côté opposé, fait 4 pieds, lesquels ajoutés aux 38 pieds 9 pouces, feront en tout 42 pieds 9 pouces pour la largeur que devroit avoir le Vaisseau. Mais tous les Constructeurs ne donnent pas un aussi grand espace; il y en a qui se contentent d'en laisser assez pour que, si, par quelque accident, les bragues venoient à lâcher, la Chaloupe ne courût pas le risque d'être endommagée. Dans ce cas, une largeur de 40 pieds est plus que suffisante.

(525.) On voit, par ce principe, combien il importe que l'artillerie des Vaisseaux soit la plus courte qu'il est possible: sa manœuvre en sera beaucoup plus facile & plus prompte; l'équipage passeroit alors avec toute liberté entre la culasse des canons & la Chaloupe; & de plus, le poids de l'artillerie en seroit considérablement diminué. Les moments d'inertie seroient par là beaucoup moindres, & par conséquent, le Vaisseau en seroit plus fort & plus durable. On sacrifie tous ces avantages seulement pour obtenir un peu plus de vîtesse dans la course des boulets; augmentation qui, bien examinée, se réduiroit peut-être à bien peu de chose; & en considérant leur effet, qui est alors beaucoup moindre, on verra qu'elle ne mérite aucune attention. En effet, par des expériences répétées sous les yeux de la Société Royale de Londres, on sçait que l'effet des boulets n'est pas proportionnel aux vîtesses; au contraire, on l'a trouvé plus grand, lorsque les vîtesses sont un peu moindres.

(526.) On conclud pareillement des mêmes principes, combien il est important de ne pas porter des Chaloupes d'une grandeur si énorme; elles sont d'un très-grand embarras, à cause du grand espace qu'elles occupent, & elles chargent prodigieusement le pont par le grand poids qui en résulte: ainsi, il y auroit un grand avantage à diminuer un peu leur capacité, & à rendre leur construction plus légere, comme le pratiquent quelques Nations.

(527.) Ayant une fois déterminé la largeur des Vaisseaux, on trouve leur longueur par les regles que nous avons exposées dans le *Chapitre* précédent. Quant à la profondeur, ou au creux, on la trouvera facilement en calculant, comme on l'a dit (*Liv. II*, *Chap. I*), le poids que doit avoir le Vaisseau tout équipé, & le volume qui correspond à ce poids, ce qui se fera en suivant les procédés qui nous avons enseignés dans le même *Chapitre*. On ne doit pas perdre de vue que moins le poids du Vaisseau sera grand, plus sa profondeur, ou son creux sera petit, & plus la vîtesse du sillage sera grande.

CHAPITRE III.

De la Stabilité, ou de la Force du Vaisseau pour porter la voile.

(528.) ON a employé tout le *Chapitre VI* du *Livre II* à expliquer & à calculer la force des Vaisseaux pour porter la voile. Dans le *Chapitre IV* du même *Livre II*, on a traité de l'inclinaison que les Vaisseaux peuvent prendre, dans le cas du repos, en vertu de l'action de quelque poids, ou d'une force qu'on leur applique; & dans le *Chap. III* du *Liv. IV*, on a traité de l'inclinaison qui est causée par la force avec laquelle le vent frappe les voiles. Nous avons déjà vu dans les *Art.* 197 & 214, qu'il y a quelque différence entre ces deux cas, toutes les fois que le centre des résistances latérales, ou des forces que les eaux exercent sur le côté du Vaisseau, ne coïncide pas avec le plan horisontal dans lequel se trouve le centre de gravité: mais nous avons vu également dans l'*Art.* 386, que cette différence est négligeable dans les Vaisseaux construits suivant l'usage ordinaire, ou à peu près, & par conséquent, que les deux cas se réduisent à un seul, qui est renfermé dans la formule donnée à la fin de l'*Art.* 383, laquelle exprime l'inclinaison que doit éprouver le Vaisseau. Or, comme cette inclinaison est en raison inverse de la Stabilité, ou de la force du Navire pour porter la voile, cette force sera donc comme le dénominateur de la formule, divisé par le numérateur; c'est-à-dire que *la force des Vaisseaux pour porter la voile est en raison directe composée de la hauteur du metacentre au-dessus du centre de gravité, & du volume de fluide qu'ils déplacent; & en raison inverse des moments latéraux qu'éprouvent les voiles.* Mais ces moments sont comme le sinus de l'angle que forme la quille avec la direction de la force avec laquelle les voiles agissent, & comme le moment avec lequel cette force agit dans la même direction (281 & 381.). Donc *la force des Vaisseaux pour porter la voile est en raison directe composée de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, & du volume de fluide qu'ils déplacent; & en raison inverse composée du sinus de l'angle que forme la quille avec la direction de la force avec laquelle les voiles agissent, & du moment avec lequel cette force agit dans la même direction.*

(529.) Toutes ces quantités dépendent de beaucoup d'autres qui entrent dans leur composition. La hauteur du métacentre au-dessus

PLANS. I. du centre de gravité dépend de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, & de la hauteur du centre de gravité au-dessus de ce dernier centre. Pour l'ordinaire le centre de gravité est plus haut que celui de volume : ainsi, en retranchant de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, la quantité dont les centres de gravité & de volume sont éloignés l'un de l'autre, il restera la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité. Dans le *Chapitre III* du *Livre I* nous avons expliqué fort en détail la maniere de calculer la hauteur du métacentre au-dessus du FIG. 31. centre de volume; & nous avons dit que, si *ABD* représente le corps du Vaisseau, *AD* sa ligne de flottaison lorsqu'il est dans une situation droite, & *GL* la même ligne lorsqu'il est incliné; *C* étant le centre de volume dans le premier cas, & *N* le même centre dans le second, en élevant la verticale *NE*, le point *E* où elle coupe la ligne *BCE*, qui est la verticale lorsque le Vaisseau est droit, est ce qu'on appelle le métacentre, & *CE* est la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume.

(530.) Cette hauteur, comme on le voit évidemment, dépend de la droite *CN*, ou du transport du centre de volume du point *C* au point *N*; de sorte que plus cette distance sera grande, plus la hauteur *CE* du métacentre sera grande. Mais la distance *CN* dépend du rapport entre le nouveau volume *LED* du Vaisseau qui se submerge dans l'inclinaison, & le volume total *ABD* dont le Vaisseau est submergé; par conséquent, plus ce rapport sera grand, plus la hauteur *CE* du métacentre sera grande.

(531.) Mais il ne faut pas croire que ces volumes dépendent seulement du bau, ou de la plus grande largeur du Vaisseau; car il est évident qu'ils dépendent de l'assemblage de toutes les largeurs distribuées dans tous les points de la longueur du Vaisseau; de sorte qu'en quelque point de la section horisontale, ou de la *ligne d'eau* supérieure, qu'on augmente la largeur du Vaisseau, le nouveau volume qui se submerge dans l'inclinaison, en deviendra plus grand, & par conséquent la hauteur *CE* deviendra aussi plus grande.

(532.) D'un autre côté, la distance *CN* est encore proportionnelle à la largeur *ED*; & le volume qui se submerge dans l'inclinaison étant, comme le quarré de *ED*, multiplié par la longueur du Vaisseau, *CN* sera comme la somme des cubes de toutes les largeurs du Vaisseau multipliée par sa longueur. Mais ceci ne doit, toutefois, s'entendre que dans le cas où le volume total dont le Navire est submergé dans le fluide, sera toujours le même; mais en supposant que ce volume varie, *la hauteur du métacentre*

au-dessus du centre de volume, *sera* (530.) *en raison directe de la somme des cubes de toutes les largeurs du Vaisseau prises dans le plan de flottaison, multipliée par sa longueur ; & en raison inverse du volume total que le Vaisseau aura de submergé dans le fluide* : c'est ce résultat qu'on a trouvé à l'*Article* 150.

(533.) De cette sorte, le produit de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, multipliée par le volume déplacé, sera comme la somme des cubes de toutes les largeurs du Vaisseau, prises dans le plan de flottaison, multipliée par sa longueur: par conséquent, si la section horisontale faite par la superficie de l'eau : c'est-à-dire, si le plan de flottaison ne varie pas, ce produit ne variera pas non plus.

(534.) Si le centre de gravité coïncide avec le centre de volume, la raison composée de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, & du volume de fluide que déplacent les Vaisseaux, sera la même que celle de la somme des cubes de toutes les largeurs du Vaisseau, prises dans le plan de flottaison, multipliée par sa longueur : & par conséquent, *le centre de gravité coïncidant avec le centre de volume, la force des Vaisseaux pour porter la voile est en raison directe composée de la somme des cubes de toutes les largeurs du Vaisseau, prises dans le plan de flottaison, multipliée par sa longueur ; & en raison inverse du cosinus de l'angle que forme la quille avec la direction de la force avec laquelle les voiles agissent, & des moments que les voiles produiroient dans la même direction.*

(535.) On doit conclure de-là, que dans le cas où le centre de gravité coïncide avec celui de volume, *la force du Vaisseau pour porter la voile dépend précisément* (le reste demeurant constant) *de la section horisontale du Vaisseau faite par la ligne de flottaison :* de sorte que plus cette section sera grande, plus le Vaisseau aura de force pour porter la voile. Mais, comme nous l'avons dit ci-dessus, le centre de gravité ne coïncide pas ordinairement avec celui de volume, & est, au contraire, plus élevé ; ainsi, cette regle n'est pas d'une application générale, elle souffre des modifications à mesure qu'on fait quelque changement dans la disposition en hauteur, des différents poids dont on compose le total du Vaisseau & sa charge; parce que c'est dans cette disposition de la charge que consiste la plus ou moins grande élevation du centre de gravité. Pour un Vaisseau de 60 canons, avec 42 pieds de largeur, nous avons trouvé (152, 153 & 154.) la hauteur *CE* du métacentre, au-dessus du centre de volume

de 11 pieds $\frac{1}{4}$, & la hauteur du centre de gravité, au-dessus de celui de volume (166.), de 2 pieds 4 pouces $\frac{1}{4}$: ainsi, la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, est seulement de 9 pieds 1 pouce $\frac{1}{2}$ dans le Vaisseau de 70 canons qui a, proportionnellement, moins d'œuvres mortes (168.), & par conséquent déplace un moindre volume de fluide, non-seulement la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, est plus grande à proportion, mais la hauteur du centre de gravité au-dessus du centre de volume est plus petite ; ainsi, la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité est, à ces deux égards, plus grande à proportion. Mais cette différence est, au reste, extrêmement petite, toutes les fois que les Vaisseaux sont semblables, & dans ce cas, toutes les hauteurs sont à peu près comme les dimensions linéaires des carenes. Ce n'est plus la même chose dans les Frégates, parce qu'à proportion leurs coques sont beaucoup moins pesantes, de même que leur artillerie. Ainsi, une Frégate de 20 canons avec 32 pieds de largeur, devroit seulement avoir son métacentre élevé au-dessus du centre de gravité de 6 pieds 11 pouces $\frac{1}{7}$, pour être en proportion avec le Vaisseau de 60 canons, tandis qu'on l'a trouvé (172.), de 7 pieds $\frac{1}{4}$. Le contraire arrive dans le Vaisseau à 3 ponts, à cause de sa grande quantité d'œuvres mortes & d'artillerie ; son métacentre qui, pour garder la proportion du Vaisseau de 60 canons, devroit être élevé au-dessus du centre de gravité de 11 pieds 1 pouce, n'a été trouvé (173.), que de 8 pieds $\frac{4}{7}$; élévation qui est moindre que dans le Vaisseau de 60 canons.

(536.) Quant au volume que le Vaisseau occupe dans le fluide, il est inutile de nous y arrêter, tout le *Chap. I*, du *Liv. II*, ayant été employé à cette recherche ; & on trouve d'ailleurs ce volume déterminé pour les Vaisseaux de différentes grandeurs dans les *Articles* 112, 115, 117 & 118. Ces volumes doivent demeurer constants, à moins que les grandeurs des Vaisseaux ne varient, ou bien les épaisseurs & les pesanteurs des bois dont ils sont construits, comme nous l'avons dit dans le *Chapitre* cité, & dans le premier *Chapitre* de ce *Livre*. Par cette raison, si l'on met en pratique la diminution de l'échantillon des bois dans les Frégates, & son augmentation dans les Vaisseaux, comme on en a fait voir la nécessité dans le même *Chapitre*, il sera nécessaire d'avoir égard à cette différence.

(537.) L'angle que forme la quille avec la direction de la force avec laquelle les voiles agissent, seroit le complément de

celui que forme la quille avec les vergues, si la voile étoit parfaitement plane, & ne prenoit pas, en vertu de sa flexibilité, la courbure qu'elle prend, sur tout du côté sous le vent où cette courbure est très-grande. Ainsi, on voit clairement que la direction composée de toutes les directions partielles des forces qui agissent sur la voile, ne peut être perpendiculaire à la vergue, & qu'elle doit s'incliner un peu vers le côté sous le vent. Cette différence que tous les Auteurs ont regardée comme ne méritant aucune considération, peut monter jusqu'à 20°, & plus, comme on l'a vu dans l'*Article* 276: par conséquent, on ne peut non-seulement négliger d'y avoir égard, mais il est de la premiere importance d'y faire la plus sérieuse attention. Dans le *Chap. I*, du *Liv. III*, où nous avons donné dans un grand détail la théorie de la voile, nous avons trouvé (263.) que, *CQ* étant la quille, *AK* la vergue, & *ABK* une section horisontale de la voile, si, par les extrêmités *A* & *K*, on mene les deux tangentes *AO*, *KO*, la ligne *TO*, qui divise l'angle *AOK* en deux parties égales, sera la direction suivant laquelle la voile agira. Pour trouver l'angle *CTO* que forme la quille avec cette direction, nous sçavons qu'en soustrayant les deux angles *A* & *K* de 180°, il reste l'angle *AOK*, dont la moitié est *TOK*. Ajoutant maintenant l'angle *AKO* à l'angle *TOK*, on aura l'angle *OFA*; & soustrayant de celui-ci l'angle *ASC*, que forme la quille avec la vergue, il restera l'angle *CTO*, qui est celui qu'on cherche. Faisant donc le calcul, on déduit la regle suivante *. *Ayant abaissé la perpendiculaire* TD, *l'angle* DTO, *dont la direction* TO *de la force de la voile tombe plus sous le vent que la perpendiculaire* TD *à la vergue, est égal à la moitié de la difference des deux angles en* K *& en* A; *& l'angle* CTO *que la quille forme avec la direction* TO *de la force avec laquelle les voiles agissent, est égal au complément de celui que forme la vergue avec la quille, augmenté de la moitié de la difference des deux angles que forme la vergue avec la voile en* K *& en* A: *d'où il suit que plus la vergue sera brassée sous le vent, & plus la voile prendra de courbure sous le vent, à l'égard de celle qu'elle prend du côté du vent, moins le Vaisseau aura de force pour porter la voile.* Plane. IX. Fig. 52.

(538.) En outre, nous avons démontré (268 & 269.) que la différence des angles *K* & *A* dépend de l'angle que forme la vergue

---

* Le calcul dont il est ici question est très-facile; car $AOK = 180° - K - A$, & partant $TOK = 90° - \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}A$. Mais $KFO = DFT = 180° - TOK - K = 180° - 90° + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}A - K = 90° - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}A$; donc DTF qui est le complément de $DFT = 90° - 90° + \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(K - A)$. Quant à la seconde partie de la regle, on voit clairement que $CTO = CTD + DTF =$ le complément de $QSK + \frac{1}{2}(K - A)$.

avec la direction du vent, & de sa vîtesse; de sorte que, *plus* * *l'angle que forme la vergue avec la direction du vent sera grand, plus aussi la différence des angles* K *&* A *sera grande; & cette différence deviendra d'autant plus grande, à mesure que la vîtesse du vent sera plus grande.* Ainsi, la vîtesse du vent étant très-petite, la différence des deux angle est zéro, & elle augmente à mesure que la vîtesse du vent augmente; de sorte que la force du Navire pour porter la voile devient d'autant moindre, à mesure que la vîtesse du vent augmente davantage, & cela sans avoir égard à la plus grande force qu'il fait alors sur la voile, mais seulement par la plus grande courbure qu'il l'oblige de prendre. Nous avons trouvé dans l'*Art.* 276, que le Vaisseau allant à la bouline avec un vent qui permet de porter toutes les voiles, l'angle DTO, moitié de la différence des angles K & A est de $8^\circ\ 20'\frac{1}{4}$, & qu'avec un vent fraix, le même angle est de $21^\circ\ 3'\frac{1}{4}$. Ceci admet quelques différences, parce qu'on déduit ces résultats d'une supposition déterminée.

(539.) *Le moment de la force qu'éprouvent les voiles est exprimé par le produit de la somme de toutes les forces qu'elles produisent par la hauteur du centre des mêmes forces au-dessus du centre de gravité du Vaisseau.* La formule qui détermine les forces a été donnée, *Art.* 264, & elle fait voir que *les forces des voiles sont en raison directe composée de la surface de toutes les voiles, de la vîtesse du vent, du sinus de l'angle que la direction du vent forme avec les vergues, & de la raison qu'il y a entre le sinus & l'arc de la demi-somme des angles* K *&* A *que la voile forme avec la vergue dans ses extrémités.*

(540.) La surface de chaque voile est le produit de sa chûte par sa largeur moyenne; & en prenant la somme de ces produits pour toutes les voiles qui servent, comme on l'a vu, *Art.* 280, on aura la surface totale de la voilure. Mais si l'on détermine d'abord, comme dans l'*Art.* 281, la hauteur du centre des forces de chaque voile au-dessus du centre de gravité du Vaisseau, & qu'on la multiplie par sa surface, comme on l'a fait dans le même *Article*, en prenant la somme de tous ces produits, on aura l'expression du moment des voiles, dans la supposition qu'elles soient planes, que le vent les frappe perpendiculairement, & que la vîtesse du vent soit seulement d'un pied par seconde; il ne faut ensuite que multiplier cette quantité par le sinus de l'angle que la direction du vent forme avec les vergues, par la vîtesse du vent, & par la raison du sinus

* On trouve dans l'original, *moins l'angle que forme, &c.*; mais c'est sûrement une faute d'impression. *Voyez* la fin de l'*Art.* 268.

à l'arc de la demi-somme des angles que la voile forme avec la vergue dans ses extrêmités, & on aura le moment des voiles pour le cas proposé.

(541.) Comme la force du Vaisseau pour porter la voile est en raison inverse de ce moment, il s'ensuit que *la force du Vaisseau pour porter la voile sera en raison inverse de la vîtesse du vent, de la quantité des voiles déployées, de la hauteur du centre de cette voilure au dessus du centre de gravité du Vaisseau, du sinus de l'angle que la direction du vent forme avec les vergues, & de la raison du sinus à l'arc de la demi-somme des angles que la voile forme avec la vergue dans ses deux extrémités.* Ce rapport du sinus à l'arc devient négligeable, lorsque les vents sont foibles; car, même lorsque les vents sont violents, cas où (276.) l'angle DTF s'est trouvé de $21° \, 3' \frac{1}{4}$, ce rapport est à peu près de $\frac{13}{14}$, ce qui ne diminue le moment des voiles que de $\frac{1}{14}$.

(542.) Ainsi, en donnant aux mâts & aux vergues des dimensions proportionnelles aux largeurs des Vaisseaux, comme le font ordinairement les Marins & les Constructeurs, les moments des voiles seront à peu près comme les cubes de ces dimensions. Mais, comme, dans les vaisseaux dont les fonds sont semblables, les volumes déplacés sont aussi comme les cubes des dimensions linéaires, les forces de ces mêmes Vaisseaux pour porter la voile, seront en raison directe des hauteurs des métacentres au-dessus des centres de gravité, & en raison inverse des sinus des angles que forme la quille avec la direction de la force avec laquelle les voiles agissent: &, comme ces angles, dans différents Vaisseaux, ne peuvent différer que très-peu entre eux, il s'ensuit que *les forces pour porter la voile, dans les Vaisseaux dont les fonds sont semblables, seront à peu près dans la raison directe des hauteurs du métacentre au-dessus du centre de gravité.*

(543.) On voit, d'après cela, que, dans les Vaisseaux de 60 & de 70 canons, qui, comme nous l'avons dit (535.), ont les hauteurs du métacentre au-dessus de leurs centres de gravité, à peu près dans la raison de leurs dimensions linéaires; on voit, dis-je, que leurs forces pour porter la voile seront aussi dans la raison de ces dimensions linéaires: mais, dans les Frégates & les Vaisseaux à trois ponts, cette raison n'aura pas lieu, attendu que les hauteurs du métacentre ne la suivent pas. Dans les Frégates, la force pour porter la voile sera un peu plus grande que cette raison ne l'indiqueroit; & dans les Vaisseaux à trois ponts, elle sera un peu plus petite. Nous avons trouvé (385, 387 & 388.), pour le Vaisseau de 60 canons, que les plus grandes inclinaisons peuvent aller depuis

12 jusqu'à 15 degrés, en supposant les vents violents, & l'appareil de la voilure étant proportionné à sa force. Celles du Vaisseau de 70 canons seront, dans le même cas, de $10^\circ \frac{1}{2}$ à $13^\circ \frac{1}{8}$, attendu que les dimensions linéaires de ce dernier Vaisseau sont à celles du premier comme 8 est à 7. Les inclinaisons des Frégates de 20 canons seront de $14^\circ \frac{1}{3}$ à $17^\circ \frac{2}{3}$, en suivant le rapport des hauteurs du métacentre au-dessus du centre de gravité, qui, dans ce cas, est celui de $9 \frac{1}{3}$ à $7 \frac{1}{4}$; & enfin les inclinaisons du Vaisseau à trois ponts seront de $12^\circ \frac{1}{3}$ à $15^\circ \frac{1}{4}$, en suivant le même rapport, qui, pour ce Vaisseau, est celui de $9 \frac{1}{3}$ à $8 \frac{6}{7}$.

(544.) Cet excès de force, pour porter la voile, qu'ont les Vaisseaux par rapport aux Frégates, a fait croire à quelques Marins qu'on pourroit tirer parti de cet avantage pour améliorer la marche des Vaisseaux, en élevant leur mâture, & augmentant par-là leur appareil, étant persuadés, d'après les raisons exposées, que cette addition ne pourroit produire aucun inconvénient. Mais on verra plus loin, & on a même déjà démontré (442.) que l'action, les efforts, ou les moments d'inertie que souffrent les mâtures dans les roulis, sont à peu près comme les quarrés des hauteurs des métacentres au-dessus des centres de gravité, & comme les poids des mêmes mâtures: par conséquent, ces efforts seront extrêmement plus grands dans les grands Vaisseaux; ainsi, leurs mâtures, qui résistent seulement dans la raison de leurs poids, se trouvent très-exposées; attendu qu'elles opposent moins de résistance, dans la raison inverse des quarrés des hauteurs des métacentres. A quels terribles accidents ne seroit-on donc pas exposé, si on augmentoit la mâture, & combien ne seroit-elle pas davantage exposée à se rompre? C'est sur-tout ce qu'on doit éviter avec le plus grand soin.

(545.) Ayant déterminé la force d'un Vaisseau pour porter la voile, on peut trouver facilement celle d'un autre, qui différeroit un peu du premier dans son poids & dans son volume. Nous avons donné, dans l'*Art.* 391, la formule qui résulte de cette variation; & le dénominateur de cette formule renferme de plus le moment, ou le produit du volume ajouté, par la distance entre les centres de gravité du poids & du volume qu'on aura ajouté: en outre, ce même dénominateur contient encore la différence qui résulte dans le produit de la nouvelle hauteur du métacentre au-dessus du centre du nouveau volume, par ce même volume. Ainsi, *de deux Vaisseaux dont les mâtures & les appareils sont égaux, les forces pour porter la voile, seront comme le produit de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, par le volume qu'occupe le premier Vaisseau, est au même produit,*

plus celui du volume qu'on ajouteroit au second Vaisseau, par la distance entre les centres de gravité du poids & du volume ajouté, plus encore la différence qui résultera dans le produit de la nouvelle hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, par le même nouveau volume. Il faut observer que ceci est pour le cas où le centre du poids ajouté est plus bas que celui du volume ajouté : mais si, au contraire, le premier centre est plus haut que le second, le produit de ce volume ajoûté par la distance entre les deux centres, doit être retranché.

(546.) Si, au lieu d'une augmentation de poids & de volume, on supposoit une diminution, alors les deux quantités qui en résultent pour le second Vaisseau, doivent être retranchées, lorsque le centre de gravité du poids retranché est plus bas que celui du volume aussi retranché. Ce sera le contraire, si le centre de gravité du poids retranché est plus haut que celui du volume.

(547.) Si on ajoutoit du lest à un Vaisseau, ou qu'on le chargeât de quelque autre poids, comme, dans ce cas, la section horisontale faite par la superficie de l'eau, ne varie pas sensiblement, le produit de la nouvelle hauteur du métacentre au-dessus du centre du nouveau volume, par ce même volume, ne variera pas non plus (392.): ainsi, la seule augmentation qu'il y aura sera le moment, ou le produit du volume dont le Vaisseau seroit plus submergé, par la distance entre le centre de ce volume & celui du lest ajouté. Donc *les forces pour porter la voile*, avant & après avoir ajouté du lest, *seront entre elles comme le produit du volume que le Vaisseau déplaçoit dans son premier état, par la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, est à ce même produit, plus celui du volume ajouté, par la distance entre les centres de ce volume & du poids ajouté:* ou, parce que les volumes sont comme les poids, *ces forces pour porter la voile seront entre elles comme le produit du poids de tout le Vaisseau, par la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité, est à ce même produit, plus celui du poids du lest ajouté, par la distance entre les centres de ce lest & du volume dont le Vaisseau se submerge davantage.* Par exemple, dans le Vaisseau de 60 canons, nous avons trouvé (166.) la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité de 9 pieds $\frac{1}{7}$, & (161.) son poids de 43750 quintaux : ainsi, le produit de ces deux quantités est 399219. Supposons maintenant qu'on augmente la charge de ce Vaisseau de 3600 quintaux, placés à 15 pieds au-dessous de la superficie de l'eau ; alors, comme la distance entre le centre de ce poids & celui du volume qui se submerge, pris dans la superficie de l'eau, est aussi des mêmes 15 pieds, le produit de cette distance

par le poids ajouté 3600 quintaux, sera de 54000; par conséquent, la force du Vaisseau pour porter la voile, dans le premier cas, sera à la même force, dans le second, comme 399219 est à 399219 plus 54000; ou, en réduisant, comme 175 est à 175 plus 24. La force du Vaisseau pour porter la voile, avec les 3600 quintaux de lest de plus, sera donc de $\frac{24}{175}$ plus forte que lorsque le Vaisseau étoit dans son premier état; & l'inclinaison du Vaisseau en sera d'autant moindre.

(548.) Il suit de là qu'*en ajoutant un poids au-dessous de la superficie de l'eau, le Vaisseau portera davantage la voile qu'auparavant*; &, par la même raison, qu'*en retranchant un poids au-dessus de la même superficie, le Vaisseau portera encore davantage la voile.* Ainsi, si l'on retranche, par exemple, un poids de 456 quintaux $\frac{1}{4}$ dans la mâture, les agrès & apparaux, & qu'on suppose que le centre de gravité de ce poids est élevé de 60 pieds au-dessus de la superficie de l'eau; comme le nombre 456 $\frac{1}{4}$ est le produit de 9 $\frac{1}{8}$ par 50, le moment qu'il produira sera le produit de 9 $\frac{1}{8}$ par 50 & par 60, ou de 9 $\frac{1}{8}$ par 3000: donc la force du Vaisseau pour porter la voile, sera par-là augmentée de $\frac{12}{175}$. Si nous supposons que le centre de gravité de toute l'artillerie, est élevé de 9 pieds $\frac{1}{8}$ au-dessus de la superficie de l'eau, & qu'on la rende plus légere de 1000 quintaux, le moment que produiroient ces 1000 quintaux seroit seulement le produit de 9 pieds $\frac{1}{8}$ par 1000, ou seroit seulement le tiers de celui qu'on a trouvé ci-dessus: donc l'augmentation de force pour porter la voile seroit seulement le tiers de $\frac{12}{175}$, ou de $\frac{4}{175}$; quantité qui ne mérite presque aucune considération. Ainsi, on se procure peu d'avantage dans la qualité de porter la voile par la diminution du poids de l'artillerie. On peut, en suivant le même procédé, soumettre à l'examen & au calcul tout autre cas qu'on voudra supposer.

(549.) Comme le produit d'un poids ajouté à la charge du Vaisseau, & placé au-dessous de la surface de l'eau, par sa distance à cette surface, exprime le moment dont la Stabilité, ou la force du Vaisseau pour porter la voile, est augmentée; & qu'au contraire, ce même produit exprime le moment dont la même force est diminuée, si, au lieu d'ajouter le poids, on le retranche: il s'ensuit que, *si on transporte un poids d'une hauteur à une autre, le produit de ce poids, par la distance verticale à laquelle on le transporte, exprimera le moment dont la force du Vaisseau pour porter la voile, sera augmentée, si on a placé le poids plus bas qu'il n'étoit, ou le moment dont cette force est diminuée, si on l'a placé plus haut.* Ainsi, ayant trouvé (514.) qu'en construisant de bois de sapin le Vaisseau de 60 canons, il entreroit 7000 quintaux de bois de moins dans sa

construction. Il est clair que c'est la même chose que si on retranchoit ce poids du centre de gravité de la coque du Vaisseau, lequel (161.) a été trouvé élevé de 11 pieds $\frac{2}{3}$ au-dessus de la face supérieure de la quille. Supposons maintenant que les mêmes 7000 quintaux soient remplacés par 7000 quintaux de lest, dont le centre de gravité soit élevé de 3 pieds au-dessus de la quille, & nous aurons 8 pieds $\frac{2}{3}$ pour la distance verticale à laquelle le poids a été transporté; ainsi, le moment dont la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée, sera égal au produit de 7000 multiplié par 8 $\frac{2}{3}$, lequel produit est *60667*. Si donc on vouloit que ce Vaisseau construit en sapin ne portât pas davantage la voile qu'il ne la portoit étant construit en chêne, on y parviendroit en diminuant le lest qu'on suppose ajouté, d'une quantité telle qu'étant multipliée par 15, distance du lest ajouté à la superficie de l'eau, il en résultât le même moment *60667*. Cette quantité se trouve de 4044 quintaux $\frac{1}{2}$, lesquels étant retranchés des 7000 ci-dessus, il restera 2955 quintaux $\frac{1}{2}$; c'est la seule quantité de lest dont le Vaisseau a besoin pour avoir autant de force pour porter la voile que lorsqu'il étoit construit eu chêne; c'est ce que nous avons déjà dit à l'*Art.* 515.

(550.) Si on augmente le creux du Vaisseau, c'est-à-dire, si on augmente proportionellement les profondeurs de tous les points de la surface de la carene qui est submergée dans le fluide, on trouvera, par la même regle, la différence qui doit en résulter dans la force pour porter la voile. Supposons, pour un instant, que toute la carene ainsi augmentée soit submergée dans le fluide, parce qu'on auroit augmenté proportionnellement le poids correspondant; dans ce cas, le produit de la hauteur du métacentre au-dessus du centre du nouveau volume, par le même volume, ne varie nullement, à cause que la section faite à la superficie de l'eau ne change point. Donc il n'y a d'autre différence que le produit du poids ajouté, par la distance de son centre de gravité, à celui du volume ajouté, qui, dans ce cas, est le même que le centre de tout le volume du corps. Si donc toutes les profondeurs du Vaisseau de 60 canons recevoient une augmentation de $\frac{1}{10}$, son volume & son poids augmenteroient dans la même raison: le poids ajouté seroit donc de 4375 quintaux; & si son centre est placé 15 pieds au-dessous de la surface de l'eau, comme celui du volume est abaissé de 7 pieds $\frac{1}{6}$, il restera 7 pieds $\frac{5}{6}$ pour la distance entre les deux centres du poids & du volume ajoutés; & le produit 34271 de 4375 par 7 $\frac{5}{6}$ sera la quantité dont la force pour porter la voile augmentera. Ainsi, cette force, avant d'avoir augmenté les profondeurs du creux, sera

à la même force, après avoir fait cette augmentation, comme 399219 est à 399219 plus 34271; c'est-à-dire que cette force dans le second cas sera plus grande que dans le premier de $\frac{34271}{399219}$, ou à peu près de $\frac{86}{1000}$.

(551.) Mais il faut observer que tout le poids 4375 quintaux ne peut pas se considérer comme lest placé à 15 pieds au-dessous de la superficie de l'eau; il faut tenir compte du bois qu'il faut nécessairement ajouter pour l'augmentation de la carene; les couples sont plus longs de toute l'augmentation qu'on donne au creux, & le nombre des bordages est plus grand. Supposons que l'augmentation de poids, provenant de celle du bois, soit de 1200 quintaux, & que son centre soit abaissé de 10 pieds au-dessous de la superficie de l'eau: alors, dans cette supposition, en soustrayant 7 pieds $\frac{1}{2}$ de ces 10 pieds, il restera 2 pieds $\frac{1}{2}$ pour la distance entre les centres de gravité du poids & du volume ajouté; & le produit 3400 de 1200 par 2 $\frac{1}{2}$, sera le moment qui résulte de la quantité de bois ajouté. Ces 1200 quintaux étant maintenant retranchés des 4375, trouvés ci-dessus, il restera 3175 pour la quantité de lest qu'on doit ajouter, laquelle, étant multipliée par 7 $\frac{1}{2}$, donnera le moment 24871; & ce dernier nombre étant ajouté à 3400, donnera pour le moment total 28271; moment qui est de 6000 plus petit qu'on ne l'avoit trouvé ci-dessus. La force pour porter la voile dans le second cas, ne sera donc plus grande qu'elle n'étoit dans le premier que de $\frac{28271}{399219}$, ou à peu près de $\frac{71}{1000}$.

(552.) En suivant la même regle, on peut disposer le Vaisseau de maniere qu'il n'ait pas plus de force pour porter la voile, qu'il n'en avoit auparavant. Il ne faut, pour cela, que lui ôter une quantité de lest nécessaire pour produire un moment de 28271, dont la force pour porter la voile a été augmentée. Le volume qu'on enleve, dans ce cas, est celui dont le Vaisseau *sortira* de l'eau à la superficie de celle-ci; par conséquent, son centre peut être considéré comme à peu près dans la même superficie; & le moment sera le produit du lest qu'on doit ôter par la distance de son centre à la superficie de l'eau; distance qui, dans le cas présent, est de 15 pieds. Divisant donc les 28271 par 15, il vient au quotient 1885 quintaux; c'est la quantité de lest qu'on doit retrancher. Cette quantité 1885 quintaux étant donc soustraite des 3175 ci-dessus, le reste, 1290 quintaux, exprimera la quantité de lest qui est seulement nécessaire, pour que, dans ce second cas, le Vaisseau ait autant de force pour porter la voile que dans le premier; la batterie se trouvera par-là plus élevée

de toute l'épaisseur du volume qui correspond aux 1885 quintaux ; c'est-à-dire, d'environ 6 pouces.

(553.) Ce qu'on vient de dire de l'augmentation du creux, ou de celle du volume qui en est une conséquence, & que nous avons considéré comme placé au centre du volume de tout le Vaisseau, doit s'entendre de même de tout autre volume qu'on ajouteroit dans les fonds du Vaisseau, sans toucher à la section horisontale faite à la superficie de l'eau. Il ne faut que considérer où se trouve le centre de ce volume ajouté, & sa distance au centre du poids qu'on ajoute ; multipliant ensuite cette distance par le poids ajouté, le produit sera le moment dont la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée, dans le cas où le centre du poids est plus bas que celui du volume ; & au contraire, il marquera le moment dont cette même force sera diminuée, si le premier centre est plus haut que le second.

(554.) De-là il suit clairement que *si le poids ajouté se place au centre du volume ajouté, la force du Vaisseau pour porter la voile n'en sera ni augmentée ni diminuée, quoiqu'on ait augmenté ses fonds, ou son volume.*

(555.) Il suit pareillement que *si on augmente le volume dans une partie, & qu'on le diminue dans une autre de la même quantité, la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée, si le volume ajouté est plus élevé que le volume retranché, & elle sera diminuée dans le cas contraire.* Car si l'on suppose que le poids correspondant au volume ajouté, soit placé en quelque endroit plus bas que le même volume, le moment qui en résultera sera le produit de ce poids, par sa distance au centre du volume ajouté ; duquel il faudroit soustraire le produit de ce même poids, par sa distance au centre du volume retranché : par conséquent, la différence de ces deux produits exprime, comme on voit, le produit du poids par la distance entre les centres des volumes ajouté & retranché.

(556.) Ceci fait voir combien il est important pour augmenter la force des Vaisseaux pour porter la voile, d'élargir ou de renfler les couples de proue & de poupe dans le voisinage de la flottaison, & de diminuer, c'est-à-dire, de rendre plus fins par le bas les couples du milieu. Car dans ce cas le volume ajouté étant plus élevé que le volume retranché, la force du Vaisseau pour porter la voile en doit être augmentée.

(557.) En augmentant la longueur du Vaisseau, la coque & le volume submergé dans le fluide augmentent proportionnellement ; & le centre de gravité du poids du bois ajouté coïncide,

à peu près, avec le centre du total de la coque; lequel, dans le Vaisseau de 60 canons, est élevé (161.) au-dessus de la quille de 11 pieds $\frac{2}{3}$. Le centre du volume ajouté coïncide pareillement avec celui de tout le volume submergé, lequel, dans le même Vaisseau est abaissé de 7 pieds $\frac{1}{6}$ au-dessous de la superficie de l'eau, ou, ce qui revient au même, est élevé de 10 pieds $\frac{5}{6}$ au-dessus de la quille. Le poids de la coque a été trouvé dans le même *Art.* 161 de 27125 quintaux: donc si l'on augmente la longueur de $\frac{1}{10}$, il y aura 2712 quintaux $\frac{1}{2}$ d'augmentation de bois. Mais le poids total du Navire est de 43750 quintaux, donc il faudra ajouter 4375 quintaux pour caler le Vaisseau jusqu'à sa ligne d'eau primitive; & par conséquent il faudra augmenter le lest de 1662 quintaux $\frac{1}{2}$. Le moment, ou l'augmentation de la force du Vaisseau pour porter la voile, consistera donc dans le produit 13023 de ces 1662 quintaux $\frac{1}{2}$, par la distance de leur centre de gravité au centre du volume, laquelle (550.) est de 7 pieds $\frac{5}{6}$; & aussi dans le produit 2260 des 2712 quintaux $\frac{1}{2}$ de bois par la distance de leur centre de gravité au centre de volume, laquelle est de 11 $\frac{2}{3}$ moins 10 $\frac{5}{6}$, ou de $\frac{5}{6}$. Mais comme le centre du volume est plus bas que celui des 2712 quintaux $\frac{1}{2}$ de bois; ce dernier produit doit être retranché du premier, & il reste seulement 10763, pour le moment avec lequel la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée. De plus, en augmentant la longueur, on augmente proportionnellement le produit de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume multipliée par le même volume. Or, en réduisant ce volume en quintaux de poids, comme nous l'avons fait pour les autres quantités, le produit de la hauteur du métacentre au dessus du centre de volume par le poids total du Vaisseau, est (154.), pour le Vaisseau de 60 canons, le produit de 11 $\frac{1}{2}$ par 43750, ou 503125, dont la dixieme partie 50312 $\frac{1}{2}$, est le moment dont, à cet égard, la force du Vaisseau pour porter la voile est augmentée. Joignant donc ce moment avec celui trouvé ci-dessus 10763, on aura 61075 pour le moment total dont la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée: & par conséquent, cette force avant l'augmentation de la longueur sera à la même force après l'augmentation, comme 399219 est à 399219 plus 61075. Ainsi, la force pour porter la voile dans le second cas sera plus grande que dans le premier de $\frac{61075}{399219}$, ou à peu près de $\frac{3}{20}$.

(558.) Si on veut que le Vaisseau n'ait pas plus de force pour

porter

porter la voile qu'il n'en avoit auparavant, on divisera le moment 61075 par 15, distance de la superficie de l'eau au centre du lest qu'il faudra retrancher, & le quotient 4071 $\frac{2}{3}$ exprimera le nombre des quintaux qu'il faut retrancher. Dans ce cas, le Vaisseau, en conservant la même force pour porter la voile, aura sa batterie plus élevée de 8 pouces au-dessus de la surface de l'eau.

(559.) On peut faire le calcul de la même maniere, en supposant qu'on allonge le Vaisseau dans quelqu'une de ses parties. Supposons, par exemple, qu'on l'allonge de 10 pieds dans son milieu, en faisant, dans cet espace de 10 pieds, tous les couples égaux au maître couple; alors, comme l'aire du maître couple qui est submergée dans le fluide, est de 620 pieds quarrés, le volume submergé sur la longueur de 10 pieds, sera de 6200 pieds cubiques, qui équivalent à un poids de 3952 quintaux. Le poids du bois qui entrera de plus dans la construction de cette longueur, sera de 1800 quintaux; son centre de gravité sera élevé à peu près de 11 pieds au-dessus de la face supérieure de la quille, ou abaissé de 7 pieds au-dessous de la superficie de l'eau; & celui du volume ajouté étant abaissé de 8 pieds au-dessous de la même superficie, il y a une différence d'un pied, laquelle étant multipliée par 1800, donnera 1800 de moment; c'est l'expression de la diminution de force pour porter la voile qui résulte du poids du bois. Retranchant maintenant les 1800 quintaux ci-dessus du poids entier 3952, il restera 2152 quintaux, lesquels expriment la quantité de lest qu'on doit ajouter. Multipliant cette même quantité par 7, distance à laquelle on le suppose placé au-dessous du centre du volume ajouté, on aura 15064 pour le moment dont la force pour porter la voile est augmentée. Donc en retranchant de ce moment le moment 1800, qui est négatif, il restera 13264 pour l'expression du moment réel dont la force pour porter la voile est augmentée. En outre, si nous nous servons de la méthode exposée dans l'*Art.* 151, pour trouver la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, nous trouverons que le produit de cette hauteur, par le même volume, doit augmenter, dans le cas dont s'agit ici, à peu près de $\frac{1}{7}$, ou de 65391. Ce moment étant ajouté à celui de 13264 qu'on a trouvé ci-dessus, on aura une somme de 77655: par conséquent, la force du Vaisseau pour porter la voile sera augmentée de $\frac{77655}{399219}$, ou, à fort peu près de $\frac{1}{5}$. Ceci fait voir combien on augmente la Stabilité du Vaisseau, en faisant un certain nombre de couples égaux au maître couple; car, dans le cas de l'*Article* précédent, où l'on a augmenté proportionnellement toute la longueur du Vaisseau

de $\frac{1}{10}$, ou de 15 pieds, il n'en a résulté que $\frac{3}{20}$ d'augmentation dans la Stabilité, tandis que dans celui où la longueur a été seulement augmentée de 10 pieds, la Stabilité a été augmentée des $\frac{4}{20}$; & si l'allongement avoit été fait de 15 pieds, la Stabilité eût été augmentée des $\frac{6}{20}$, quantité double de celle de l'*Article* précédent.

(560.) Si on vouloit que le Vaisseau, après avoir été augmenté de 10 pieds en couples égaux au maître couple, n'eût, pour porter la voile, que la même force qu'il avoit auparavant, on diviseroit les 77655 de moment par 15, distance de la superficie de l'eau au centre du lest qu'il faudra retrancher, & le quotient 5177 sera le nombre de quintaux de lest à retrancher. Dans ce cas, le Vaisseau, en conservant la même force pour porter la voile, aura sa batterie plus élevée au-dessus de l'eau d'environ 11 pouces. Il faut remarquer, dans ce cas, que le Vaisseau ne portant, dans son premier état (*161.*), que 4935 quintaux de lest, ce nombre étant joint aux 1800 quintaux, qui (559.) ont été auparavant ajoutés, le total sera de 6735, duquel retranchant 5177, il restera seulement 1558; c'est la quantité de lest avec laquelle le Vaisseau naviguera, en portant la voile avec la même force qu'auparavant.

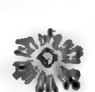
(561.) Par la même méthode, on résout également le cas dans lequel on voudroit augmenter la largeur du Vaisseau; mais, comme on suppose qu'alors on augmente l'appareil dans la même proportion, il est nécessaire d'avoir égard à cette circonstance qui diminue beaucoup la Stabilité. Supposons donc que l'augmentation de la largeur soit de $\frac{1}{10}$, & que l'augmentation du bois qui en résulte soit dans la même proportion, le centre de gravité de cette quantité de bois ajouté étant le même que celui de la coque : mais, comme cette variation n'altere en rien le centre de volume, la Stabilité qui résultera de l'augmentation du bois & du lest, sera, comme dans le cas de l'augmentation de la longueur (557.), de 10763. Le produit de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de volume, par le même volume, est, dans ce cas, comme les cubes des largeurs (153.), ou comme 1000 est à 1331, & l'augmentation sera, par conséquent, comme 1000 est à 331 : donc le produit 503125 augmentera maintenant de 166534. Ajoutant à cette augmentation les quantités 10763, & 399219, la somme sera de 566753. Divisant ensuite cette somme par 1331, & le nombre 399219 par 1000, ces deux diviseurs exprimant la raison des cubes des largeurs, ou les moments des apppareils, on trouve enfin que la force du Vaisseau pour porter la voile avant l'augmentation de la largeur, est à la même force après cette augmen-

tation, comme 399219 eſt à 433145 : d'où l'on conclura que l'augmentation de cette force eſt à peu près de $\frac{17}{100}$.

(562.) On peut, ſans augmenter la largeur principale du Vaiſſeau, ou ſa plus grande largeur au maître couple, augmenter toutes les largeurs des autres couples. Dans ce cas, comme les Marins ſont dans l'uſage de regler leur appareil ſur la largeur du maître couple, il reſtera toujours le même, & cependant la Stabilité augmentera beaucoup. Si nous ſuppoſions, par exemple, qu'on eût donné au Vaiſſeau des largeurs telles, qu'il en réſultât une augmentation de la moitié de celle du cas précédent, ou qui fût la moitié de 167534, différence de 566753 à 399219, la force pour porter la voile, ou la Stabilité, avant l'augmentation des largeurs, ſeroit à la même Stabilité après cette augmentation, comme 5 eſt à 7, à fort peu près : & l'augmentation de cette force ſeroit de $\frac{2}{7}$; quantité double de la plus grande que nous ayons trouvée précédemment.

(563.) On voit, d'après cela, combien il importe pour obtenir une bonne Stabilité, que le Vaiſſeau ait une largeur ſuffiſante dans ſes extrêmités de poupe & de proue. Nous avons fait voir auſſi dans l'*Article* 393, que ſi le corps du Vaiſſeau étoit compoſé de deux priſmes triangulaires, il prendroit plus de 4 fois davantage d'inclinaiſon qu'un autre Vaiſſeau de la forme d'un parallélipipede rectangle, ces deux Vaiſſeaux étant cependant de la même longueur & largeur, & du même volume ; cette très-grande différence vient des plus grandes largeurs du parallélipipede à ſes extrêmités.

(564.) Enfin, en examinant tout ce qui eſt relatif à la Stabilité, ou à la force du Vaiſſeau pour porter la voile, il eſt eſſentiel de conſidérer un cas qui mérite la plus ſérieuſe attention ; c'eſt celui où le vent étant fort, le Vaiſſeau vient à *coëffer.* Nous avons démontré, dans l'*Article* 390, que ſi la vîteſſe du vent étoit de 60 pieds par ſeconde, le corps du Vaiſſeau pouvoit s'incliner de 35 degrés, & que l'eau pouvoit arriver un pied plus haut que les ſeuillets des ſabords de la ſeconde batterie. Il eſt donc abſolument néceſſaire de prendre toutes ſes précautions pour prévenir cet accident, qui peut avoir les ſuites les plus dangereuſes, parce que le Vaiſſeau étant dans cet état, l'effort, même médiocre, d'un coup de mer pourroit occaſionner ſa perte totale.



CHAPITRE IV.

De la Marche & du Rumb de vent que ſuivent les Vaiſſeaux.

Planc. IX. (565.) Nous avons examiné fort en détail ce qui regarde la marche, ou le mouvement progreſſif des Vaiſſeaux (*Liv. IV, Chap. I.*). Nous avons conſidéré ce mouvement comme compoſé de deux actions, l'une directe, ou dans le ſens de la quille, & l'autre latérale, ou perpendiculaire à la premiere. Nous avons diſtingué les produits de ces deux actions, & celle qui en eſt compoſée, en nommant l'une, vîteſſe directe, la ſeconde, vîteſſe latérale, & la troiſieme, vîteſſe oblique; & outre ces trois vîteſſes, nous en avons conſidéré une autre, qui eſt celle avec laquelle le Vaiſſeau s'éleve, ou gagne dans le vent; vîteſſe dont la connoiſſance n'eſt pas moins eſſentielle que celle des trois autres. De toutes ces vîteſſes, nous n'avons calculé que la premiere, parce qu'étant une fois connue, on en conclud facilement les deux autres. Mais, comme la formule qui la détermine eſt extrêmement compliquée (343.), ce qui la rend difficile à être entendue & expliquée avec la clarté qui conviendroit, nous nous contentons ici de tâcher de la faire entendre par une conſtruction géométrique.

Fig. 53. (566.) Suppoſons que *QA* repréſente la quille du Vaiſſeau, *VE* la vergue, *VIE* la voile, & *IC* la direction du vent. Par les extrêmités *V* & *E* de la voile, ſoit mené les deux tangentes *VB*, *EB*, & la ligne *BD* qui diviſe l'angle *VBE* en deux parties égales; ayant enſuite tiré une ligne quelconque *FO* perpendiculaire à la quille *QA*, on prendra ſur cette ligne les parties *GO*, *GH*, dans la raiſon des quantités conſtantes, qui, multipliées par les vîteſſes latérale & directe, donnent les réſiſtances correſpondantes latérale & directe. Or, on a calculé ces quantités dans le *Chapitre V du Livre II*, & l'on a trouvé (187.), pour le Vaiſſeau de 60 canons, qu'elles étoient 3316 & 294. Ainſi, pour ce Vaiſſeau, on aura *GO* eſt à *GH*, comme 3316 eſt à 294, & la même proportion aura lieu pour tout autre Vaiſſeau qui lui ſera ſemblable. Du point *H* ſoit abaiſſé la ligne *HK* perpendiculaire ſur *BD*, laquelle coupera la quille en *M*; par ce point, tirant la ligne *OML*, & enſuite la ligne *CLF* qui lui ſoit perpendiculaire, cette derniere ligne ſera le Rumb de vent que ſuivra le Vaiſſeau.

(567.) Maintenant, pour trouver sa vîtesse, on formera sur *GO* & *GH* les deux triangles rectangles *GNO*, *GPH*; de sorte que *GN* soit parallele à *KH*; ensuite sur *VE* prolongée, on prendra *CR* égale à *GN*, & on abaissera sur *CI* & sur *CQ* les perpendiculaires *RS*, *RT*. Cela fait, on prendra *TX* égale à *GP*, l'on fera *GU* telle que cette droite soit à *GO* comme la vingtieme partie du nombre des pieds quarrés de la surface de la voilure qui est déployée (280), diminuée dans la raison de l'arc au sinus de la moitié de l'angle *ZBE*, est à la quantité constante, qu'on a dit être de 3316 pour le Vaisseau de 60 canons. De plus, soit tiré *UH*, & soit formé en *O* l'angle *GOW* égal à *GUH*; & faisant enfin *XY* égal à *GW*, cette construction donnera *YR* est à *RS*, comme la vîtesse du vent est à la vîtesse directe du Vaisseau. De cette sorte, ayant tiré la ligne *YS*, si l'on prend *Ya* égale au nombre de pieds que le vent parcourt dans une seconde, & si l'on tire *ab* parallele à *RS*, la droite *ab* exprimera le nombre de pieds que le Vaisseau parcourra directement, aussi dans une seconde, c'est-à-dire, suivant la direction *CQ* de la quille. Prenant donc ensuite sur *CQ* la partie *Cd* égale à *ab*, & élevant la perpendiculaire *de*, la partie *Ce* sera la vîtesse oblique, & *de* sera la vîtesse latérale du Vaisseau.

(568.) Si du point *C* on éleve la ligne *Cf* perpendiculaire à la direction *JC* du vent; & si l'on abaisse sur cette ligne la perpendiculaire *ef*, alors *fe* exprimera la quantité dont le Vaisseau gagne dans le vent.

(569.) Cette construction peut aussi servir pour déterminer les avantages qui peuvent résulter de la variation de quelques-unes des quantités, lignes, ou angles dont elle dépend. Si les deux lignes *YR* & *RS* ne varioient pas, comme il paroît au premier coup d'œil qu'elles ne devroient pas varier, la quantité & la disposition de l'appareil étant les mêmes, les vîtesses du Vaisseau seroient comme celles du vent: mais le vent venant à augmenter, la courbure des voiles déjà plus grande sous le vent augmentera à l'égard de celle qui a lieu dans la partie du vent; & par conséquent, la direction *DB* tombera plus sous le vent. L'angle *QDB*, & son égal *NGO* augmenteront, ce qui diminuera *GN*, & son égale *CR*; & quoique cette diminution ne fasse pas varier la raison de *SR* à *RX*, parce que ces deux droites diminuent proportionnellement, cependant comme la quantité *XY* demeure constante, il s'ensuit que la raison de *SR* à *RY* qui est celle dans laquelle doivent être les vîtesses du Vaisseau & du vent,

doit néceſſairement devenir plus petite. Cette différence peut être diminuée en ayant ſoin de diminuer, autant qu'il ſera poſſible, la courbure de la voile, laquelle dépend beaucoup de ſa largeur & de la qualité de la toile dont elle eſt faite.

(570.) Si on augmente la quantité de voilure, *GU* augmentera dans la même raiſon, & *GW*, ou ſon égale *XY* diminuera dans la raiſon inverſe de celle ſuivant laquelle doit augmenter la raiſon de *SR* à *RY*, ou la raiſon des vîteſſes du Vaiſſeau & du vent; mais comme *RS* demeure conſtante, les vîteſſes du Vaiſſeau ſeront en raiſon inverſe des *RY*. Si nous ſuppoſons, par exemple, que les trois lignes *SR*, *RX*, & *XY*, ſont entr'elles comme 3, 5, & 4, comme elles le ſont en effet, à peu près, lorſque le Vaiſſeau va à la bouline avec tout ſon appareil, en diminuant *XY* de $\frac{1}{8}$, diminution qui équivaut à l'augmentation de voilure des deux perroquets, *XY* ſera comme $\frac{7}{2}$, & la vîteſſe du Vaiſdans le premier cas ſera à ſa vîteſſe dans le ſecond, comme 8 $\frac{1}{2}$ eſt à 9, ou comme 17 eſt à 18: de ſorte que ſur chaque 17 milles il y aura un mille d'augmentation, la voilure étant augmentée de $\frac{1}{8}$.

(571.) La variation de l'angle que forme la vergue avec la quille, eſt celle qui affecte plus ſenſiblement la vîteſſe du Vaiſſeau. On a traité cet objet d'une maniere fort étendue, dans le *Chapitre II du Livre IV*, & on a démontré les avantages qu'on peut tirer de la diſpoſition des voiles; de ſorte que ces avantages peuvent être tels que les Bâtiments parviennent enfin à marcher plus vîte que le vent. En effet, ſi au lieu de diſpoſer l'appareil de façon que les vergues forment l'angle *QCE* de 40°, comme le diſpoſent les Marins dans le cas où l'on cingle à la bouline, on le diſpoſoit de maniere que cet angle fût ſeulement de 28 à 29°, on voit bien, en ſuivant les regles preſcrites, que *SR* devient plus grand dans la ſeconde diſpoſition, & que *RY* devient plus petite; par conſéquent, la vîteſſe du Vaiſſeau doit auſſi devenir beaucoup plus grande à l'égard de celle du vent. On pourroit croire, par la même raiſon, qu'en diminuant encore davantage cet angle, la vîteſſe du Bâtiment iroit toujours en augmentant; mais cependant il n'en eſt pas ainſi: cette augmentation a une limite ou un *maximum*, paſſé lequel la marche diminue. Car il eſt clair que ſi la droite *DB* parvient à être perpendiculaire à la quille *QA*, *GN* coïncidera avec la même quille, que même elle s'évanouira, le point *N* tombant ſur le point *G*, & de même le point *R* ſur *C*, ce qui rend *SR* égale à *zéro*; &

quoique la droite RX s'évanouisse en même temps, XY demeure constante, & la relation de SR à RY, ou de la vîtesse du Bâtiment à celle du vent est infiniment petite. PLANC. IX.

(572.) On a trouvé (364.) que ce *maximum* avoit lieu pour le Vaisseau de 60 canons, lorsque l'angle QCE est de 28° 47', dans le cas où ce Vaisseau cingle à la bouline, avec tout son appareil déployé; & on a dit au même endroit, qu'on ne pouvoit obtenir ce *maximum*, à cause que les haubans & l'étai ne permettent pas de faire cet angle QCE beaucoup moindre que de 40°. Dans les Bâtiments à voiles latines, on peut, sans le moindre embarras, former cet angle de la grandeur nécessaire; &, dans le cas du vent largue, il est évident qu'on peut aussi le former dans les Vaisseaux. Dans la supposition que la direction du vent forme avec la quille un angle ouvert par la poupe de 46°, nous avons trouvé (363.) qu'avec 17680 pieds quarrés de voilure, l'angle QCE doit être de 50° 11', tandis que les Marins le forment de 70°; d'où l'on a conclu que la vîtesse du Vaisseau, dans le cas de la meilleure disposition, est à la vîtesse qui résulte de la pratique des Marins, comme 71 est à 64, c'est-à-dire qu'elle est presque de $\frac{1}{7}$ plus grande. FIG. 55.

(573.) Cette disposition avantageuse des angles n'est pas cependant constante, comme l'ont cru jusqu'à présent les Géometres; elle dépend de la quantité de voilure qui est déployée. Car on a vu, dans le même *Article* 363, que dans le même cas de vent largue, le Vaisseau naviguant avec seulement la grande voile & la misaine; c'est-à-dire, ne portant que 5200 pieds quarrés de voilure, on a vu, dis-je, que cet angle doit être de 56° 21', au lieu 50° 11'; & le Vaisseau cinglant à la bouline (364.), il doit être de 40° 42', comme le font à peu près les Marins; de sorte que *plus la quantité de voile déployée est grande, plus l'angle que forme la vergue avec la quille doit être petit.*

(574.) Cet angle dépend encore de la relation entre GO & GH (361.); de sorte que *plus* GH *sera petit à l'égard de* GO, *plus l'angle que forme la vergue avec la quille doit être petit; & par consequent, plus le Bâtiment sera fin, ou plus la relation entre les quantités constantes qui, multipliées par les vîtesses directe & latérale, expriment les résistances directe & latérale, sera petite, plus aussi cet angle sera petit.* Les vergues d'un Chebec doivent, par conséquent, former avec sa quille un angle plus petit que celles d'un Vaisseau; & les vergues d'une Galere, ou d'une Goëlette * doivent encore former un angle plus petit que celles d'un Chebec.

* En Espagnol *Gelota*.

(575.) Le même angle doit également diminuer (361.) lorsque la différence entre les angles *QCE* & le complément de *BDQ* qui résulte de la courbure plus ou moins grande de la voile, diminue; de sorte que *moins la courbure de la voile sera grande du côté sous le vent à l'égard de la courbure du côté du vent, plus cet angle doit être petit.* Ainsi, cet angle doit dépendre encore de la qualité & de la tension de la voile. Toutes ces considérations font qu'il est difficile de donner une solution aussi simple & aussi facile pour la pratique qu'il seroit à desirer. Le plus court sera de suivre le calcul tel qu'on l'a exposé depuis l'*Art.* 360 jusqu'à l'*Art.* 364.

(576.) Dans l'analyse que nous faisons de tout ce qui concerne la marche du Vaisseau, il est nécessaire que nous ayons égard à la nature de sa construction; c'est-à-dire, à la raison dans laquelle se trouvent les lignes *GO* & *GH*, qui est celle des quantités constantes qui, multipliées par les vîtesses correspondantes, expriment les résistances latérale & directe. Supposons que *GH* devienne plus petite; dans ce cas, l'angle *GUH*, & son égal *GOW*, seront aussi plus petits; de sorte que *GW*, ou son égale *XV*, sera toujours comme *GH*. Ainsi, à mesure que *GH* diminue à l'égard de *GO*, *YR* diminuera pareillement à l'égard de *RS*; & par conséquent, la raison de *SR* à *RY*, laquelle est celle des vîtesses du Vaisseau & du vent, deviendra plus grande. La droite *XT* égale à *GP* doit également diminuer; donc, par ces deux raisons réunies, la relation de *SR* à *RY* doit devenir plus grande. La droite entiere *TY* diminue donc dans la même raison que *GH*; & comme *SR* demeure constante, les vîtesses des Vaisseaux seront dans la raison inverse des *RY*, quantités qui dépendent de la constante *RT*, & des *TY*, qui sont comme les *GH*. D'après cela, il faut conclure que, si, dans le Vaisseau de 60 canons, pour lequel nous avons trouvé que *GO* est à *GH*, comme 3316 est à 294, & dans lequel *RT* est à peu près égale à *TY*, nous augmentons la longueur de $\frac{1}{10}$, la ligne *GH* sera aussi plus petite de $\frac{1}{10}$, sans aucune différence sensible: donc la premiere vîtesse sera à la seconde, comme 2 moins $\frac{1}{10}$ est à 2, ou comme 19 est à 20: de sorte que, pour chaque 19 milles, le Vaisseau parcourra un mille de plus. Si, en considération de l'augmentation de la longueur, & par conséquent de l'augmentation de la capacité, on jugeoit à propos de retrancher une certaine partie du lest pour que la force du Vaisseau pour porter la voile fût la même qu'auparavant l'augmentation de la longueur; alors *GH* diminueroit encore de quelque chose; mais on retireroit très-peu d'avantage de cette derniere opération, attendu qu'on

a démontré (356.) que le Vaisseau étant calé de 6 pouces de plus ou de moins, il n'en résulte que $\frac{1}{100}$ de différence dans sa vitesse, ce qui équivaut à $\frac{1}{[illegible]}$ de milles par heure ; quantité absolument négligeable. C'est pour cette raison, & d'un autre côté, parce que le défaut de stabilité peut être très-préjudiciable, qu'on a dit que le Vaisseau doit être toujours submergé de toute la quantité qui est nécessaire pour lui procurer une stabilité suffisante.

(577.) Non-seulement la marche du Vaisseau varie, par les changements qui arrivent à la raison de *GO* à *GH*; mais la même chose arrive encore, en partie, lorsque ces quantités diminuent, quoiqu'elles conservent entre elles la même raison ; parce qu'alors non-seulement les autres quantités diminuent dans la même raison, mais encore parce que *GW* varie dans la raison doublée de cette raison, comme on peut le voir dans l'*Art.* 357.

(578.) De la combinaison de ces trois quantités, la longueur, la largeur & le creux, on a déduit (358.) que, conservant au Vaisseau la même capacité, plus la longueur sera grande, & les deux autres dimensions petites, plus la vitesse sera grande. Mais si on conserve la même longueur, & qu'on augmente une des deux autres dimensions, en diminuant l'autre à proportion, le Navire d'une plus grande largeur, & d'un moindre creux, marchera avec plus de vitesse, d'un vent largue ; & celui d'une moindre largeur, & d'un plus grand creux, marchera mieux avec des vents près : bien entendu qu'on suppose, dans les deux cas, les appareils proportionnels aux largeurs. Cette théorie a été confirmée bien des fois par la pratique.

(579.) L'expérience n'a pas moins confirmé ce que nous avons démontré dans l'*Art.* 359, & que nous avons déduit des résistances qu'éprouvent les carenes des Vaisseaux, à raison de ce que le fluide cesse d'être de niveau ; & nous avons fait voir (359.) que cet effet est plus grand dans les petits Vaisseaux à proportion que dans les grands. Ainsi, il résulte delà que, quoique sans cette circonstance, les petits Vaisseaux dussent être meilleurs voiliers, cependant ils le sont moins, à mesure que la vitesse, & par conséquent la dénivellation, augmente, & par conséquent, dans les bâtiments semblables & semblablement disposés, les petits marcheront mieux avec un petit vent, & les grands avec un vent violent.

(580.) Enfin, la marche du Vaisseau dépend aussi de la courbure plus ou moins grande de la voile du côté sous le vent, à l'égard de celle qu'elle a du côté du vent ; parce que plus cette courbure sera grande, plus aussi l'angle *BDQ* le sera, de même que son égal *NGO*; *GN* & son égale *CR* deviendront plus petites : & quoique *RS* & *RX* diminuent, dans la même raison, *XY* demeurera constante, & par conséquent, la raison de *SR* à *RY*, ou des vitesses du Vaisseau &

PLANC. IX. du vent, sera plus petite. Il paroît que c'est de ce principe que provient la différence que les Marins ont observée entre les effets que produisent les voiles hautes & les basses, les premieres produisant un plus grand effet que les secondes. Car, comme on ne porte les voiles hautes qu'avec des vents foibles, leurs courbures, dans ces cas, sont moindres, & par conséquent, leurs effets sont plus grands; au contraire, les basses voiles, ou les voiles majeures, qu'on porte par des vents très-violents, prennent des courbures très-considérables, & ne peuvent produire des effets analogues à ceux qu'elles produiroient par des vents foibles: mais, en supposant les circonstances les mêmes, ou que le temps soit le même, alors des voiles égales, & disposées de la même maniere, produisent des effets égaux, à moins qu'en vertu de leur qualité différente, elles ne prennent aussi des courbures differentes.

(581.) Quoique, dans tout ce qu'on vient de dire, on ait examiné & analysé tous les résultats qui peuvent naître de la variation des différentes quantités qui concourent à la détermination de la vîtesse, ou de la marche du Vaisseau; il nous paroît cependant qu'il ne peut manquer d'être très-intéressant pour les Marins de connoître quel est le vent qui doit faire cingler le Vaisseau avec la plus grande vîtesse. Car, quoique la pratique ait fait connoître que c'est le vent largue qui produit cet effet, on a cru, & l'on croit encore, que cela vient de ce qu'on peut employer un plus grand nombre de voiles lorsqu'on navigue vent largue, que naviguant vent arriere; & l'on étoit loin d'imaginer que la même chose arrivoit en faisant servir utilement les mêmes voiles dans l'un & l'autre cas, comme nous l'avons démontré ci-devant (365 & 366.). Nous avons donné, dans ces deux FIG. 55. *Art.*, une nouvelle formule pour trouver l'angle *JCA* que la direction du vent doit faire avec la quille, pour que le Vaisseau marche avec la plus grande vîtesse qu'il est possible, laquelle fournit la construction suivante. FIG. 53 & 55. Sur un triangle rectangle quelconque *GNO* soit pris *Hg* égal *WG* plus *GH*, & des points *H* & *g* soit tiré les droites *Hh*, *gb* paralleles à *GN*; ayant ensuite décrit le demi-cercle *hkO*, soit tiré *hk*, & l'on aura l'angle *bhk* égal à l'angle *ACJ*. L'angle *JCE* que la vergue *VE* doit former avec la direction *JC*, doit être droit, pour que le Vaisseau acquiere la plus grande vîtesse possible.

(582.) Cette direction est donc variable, quoique dans le même Vaisseau, parce qu'elle dépend de *WG*, qui est en raison inverse de la quantité de voiles que le Vaisseau porte déployée. A mesure que cette quantité augmente, les quantités *GW* & *Hg* diminuent, & l'angle *Ohk*, ou son égal *ACJ*, devient plus grand. Au contraire, en diminuant de voile, *GW* & *Hg* augmentent, & les angles diminuent jusqu'à ce que le point *g* tombant sur *O*, ils s'évanouissent, & le vent arriere est alors le plus avantageux. Nous

avons trouvé (367.), pour le Vaisseau de 60 canons, qu'avec 17680 pieds quarrés de voilure, qui sont la seule étendue utile, naviguant vent largue, nous avons trouvé, dis-je, que l'angle *ACJ* doit être de 41° 56'; & le même Vaisseau portant seulement une voilure de 8934 pieds quarrés*, on a vu que cet angle devient zéro, & que c'est alors le vent arriere qui est le plus avantageux. On a dit encore dans l'*Article* 350, qu'en naviguant vent arriere, le Vaisseau peut porter utilement 12950 pieds quarrés de voilure. Si on vouloit naviguer avec cette voilure, en employant l'angle *ACJ* le plus avantageux qui lui correspond, on trouveroit cet angle de 32° pour le même Vaisseau de 60 canons; & l'augmentation de vîtesse qui résulteroit de l'emploi, cet angle ne seroit que de $\frac{1}{72}$. Mais, si la différence est si petite dans un Vaisseau; il n'en est pas de même dans une Embarcation plus fine, comme une Galere, ou un Chebec, parce que, dans ces Bâtiments, la plus grande partie de la voilure entiere sert dans l'un & l'autre cas; & d'ailleurs, l'angle *ACJ* s'ouvre davantage, parce que la voilure est, à proportion, en plus grande quantité.

(583.) Cet angle dépend encore de la relation entre *GO* & *GH*; car à mesure que *GH* devient moindre, *GW* & *Gg* le deviennent aussi, & par conséquent l'angle *Ohk*, & son égal *ACJ* deviennent plus grands. Ainsi, l'angle le plus avantageux dans un Chebec est plus grand que dans un Vaisseau; & dans une Galere il est encore plus grand que dans un Chebec. Nous avons trouvé cet angle pour le Chebec (368.) de 63° 19', & nous avons vu qu'en l'employant, la vîtesse du Chebec est à celle du vent, comme 163 est à 100; c'est-à-dire que la vîtesse de cette Embarcation est égale à celle du vent plus environ ses deux tiers; de sorte que, si la vîtesse du vent étoit de 15 pieds par seconde, celle du Chebec seroit de 24 pieds $\frac{45}{100}$, ce qui fait 14 milles $\frac{67}{100}$ par heure.

(584.) La marche des Vaisseaux pour s'élever vers l'origine du vent, ou leur vîtesse pour gagner au vent, dépend principalement de la vîtesse directe (355.), & par conséquent, de toutes les circonstances qui la produisent & peuvent la modifier, comme nous l'avons vu ci-dessus. Cependant les angles les plus avantageux que les vergues & le vent doivent former avec la quille, sont susceptibles de quelque différence, & même cette différence est quelquefois considérable; car il est nécessaire d'avoir égard à la dérive, de laquelle dépend également la quantité dont le Vaisseau gagne au vent. Nous avons donné, dans l'*Art.* 371, les formules pour déterminer ces angles; mais elles sont si compliquées, que, même dans le calcul, nous n'avons pas jugé convena-

* On trouve dans l'original 8065 pieds quarrés; mais c'est sans doute une faute, car cela n'est pas conforme à l'*Article* 367, auquel l'Auteur renvoie. Cette même différence se trouve dans le Discours Préliminaire, *Tome I*, mais nous l'avons rectifiée.

ble de les réduire à une seule, comme il est d'usage de le faire, pour la facilité des applications. Nous nous sommes contentés de les appliquer à différents cas pour le Vaisseau de 60 canons ; d'abord, en supposant que le vent est foible, & que le Vaisseau porte beaucoup de voile ; ensuite au cas où il porte peu de voile, & que le vent est fort ; & enfin à celui où le Vaisseau porte peu de voile, & où le vent est foible ; & on a vu, dans tous ces cas, que les angles avantageux avec lesquels le Vaisseau gagne au vent le plus qu'il est possible, ne sont point les mêmes. Le Vaisseau portant toute sa voilure qui est de 23050 pieds quarrés, & le vent étant foible, on a trouvé que l'angle que doit former la quille avec le vent, est de 56°, & celui que doivent former les vergues avec la quille, de 30° 33'. Lorsque le Vaisseau porte seulement ses deux basses voiles, ou que sa voilure est réduite à 6130 pieds quarrés, & que le vent est fort, ces angles doivent être de 84° 44' & de 82° 14'. Avec cette même voilure, le vent étant foible, ils sont de 66° 13', & de 47° 20'. Comme les angles de ce dernier cas approchent beaucoup de ceux qu'emploient généralement les Marins, on voit évidemment combien ils sont loin, dans tous les autres, de jouir des avantages que la Géométrie leur offre.

(585.) Il suit de ce principe, que l'un & l'autre angle doivent augmenter à mesure que le vent augmente, & que les voiles diminuent. Celui que la direction du vent forme avec la quille, augmente depuis 56° jusqu'à 84° 44'; & celui que la quille forme avec les vergues, augmente depuis 30° 33' jusqu'à 82° 14'. On prendra donc une valeur moyenne dans les autres cas, qui sont aussi les cas intermédiaires ; ou bien, si l'on veut une plus grande exactitude, on aura recours aux formules, particuliérement lorsque le Vaisseau, pour lequel on fait le calcul, est d'une construction très-différente ; car cette circonstance influe beaucoup sur la valeur des quantités. Si on applique le calcul à la formule de l'*Art.* 360, on trouvera que l'angle que doivent former les vergues avec la quille, pour que le Vaisseau marche avec le plus de vîtesse qu'il est possible, est de 26° 55', celui de la quille & du vent étant supposé de 56° ; par conséquent, l'angle qui fait gagner au vent le plus qu'il est possible, n'est pas celui qui fait faire au Vaisseau le plus de chemin. C'est aussi ce que démontrent les formules particulieres par lesquelles on détermine ces angles. Dans le cas présent, où la différence est le moins sensible, on la trouve de 3° 38'.

(586.) Enfin, nous avons vu, dans l'*Art.* 376, qu'en employant les angles avantageux avec toutes les voiles & peu de vent, la quantité dont le Vaisseau gagnera au vent, est à celle dont il gagne dans les

mêmes circonstances, sa voilure étant disposée selon l'usage ordinaire des Marins, comme 164 à 125, ce qui est près d'un tiers de plus, & démontre la nécessité de ne pas négliger un avantage aussi considérable. Il est vrai que, dans les Vaisseaux, il est difficile qu'on puisse former des angles aussi aigus que l'exige le cas où l'on porte beaucoup de voiles : mais dans les bâtiments à voiles latines, il n'y a aucune difficulté. Dans les Vaisseaux même, en faisant usage de drosses, & prenant le parti de lâcher les haubans de l'avant, ce qui peut se faire sans aucun risque, lorsque le vent est foible; circonstance qui est précisément celle où ce brassage extrême est nécessaire, on pourroit amener les basses vergues au point d'être très-proches de former les angles requis : quant aux autres vergues, on y parvient sans aucune difficulté.

(587.) Outre ces attentions, qui sont les principales, il en est une qu'il est absolument nécessaire que les Marins aient présente à l'esprit; c'est de tenir le Gouvernail, autant qu'il est possible, dans une situation toujours parallele à la route que suit le Vaisseau. Car, dans toute autre position, le Gouvernail ne peut manquer de retarder beaucoup le sillage.

CHAPITRE V.

Du Gouvernement, ou du Manege, du Vaisseau.

(588.) LE Gouvernail est seulement une des puissances qui concourent au Manege ou au Gouvernement du Vaisseau, quoiqu'assez ordinairement il soit regardé comme l'unique. Nous avons donné la théorie de cette Machine, dans le *Chap. II* du *Liv. III*, & nous avons trouvé quelque différence entre nos résultats & ceux que les Géometres ont déterminés jusqu'à présent; à cause que nous nous sommes fondés sur d'autres principes. Nous avons donné, dans l'*Art. 290*, la formule de la force que fait le Gouvernail dans la direction perpendiculaire à la quille, qui est seulement celle qui contribue au Manege; & l'on a vu, par cette formule, que *plus la vitesse du Vaisseau sera grande, plus la surface du Gouvernail sera étendue, & plus la quête de l'étambot sera petite, plus la puissance du Gouvernail sera grande*, en observant toutefois que le Gouvernail faisant des angles égaux avec la quille, tant du côté de babord que du côté de tribord, *la force du Gouvernail pour faire arriver le Vaisseau est toujours plus grande que celle pour le faire venir au vent.* Ces connoissances avoient déjà été données par les Géometres qui nous ont précédés; mais il n'en est pas de même à l'égard de l'angle que le Gouvernail doit former avec la

quille, pour qu'il produise la plus grande force qu'il est possible; car ils ont déterminé cet angle de 54° 44′, tandis que, dans l'*Art.* 293, nous l'avons trouvé de 45°, dans le cas où la dérive est nulle; de 45° moins la dérive, lorsqu'il s'agit d'arriver; & de 45° plus la dérive, dans le cas où il faut venir au vent. Ces différents objets ont été démontrés dans le *Chapitre* cité, auquel nous renvoyons. Malgré cela, nous avons dit, dans l'*Art.* 296, qu'il ne convient nullement de chercher à faire former ces angles au Gouvernail, non seulement à cause que cela est peu nécessaire, vu le peu d'avantage de ces angles sur ceux dont les Marins font usage, mais aussi pour éviter les inconvénients qu'il y auroit à accourcir la barre du Gouvernail, ce qui seroit cependant absolument nécessaire pour parvenir à les former.

(589.) Nous avons fait voir également (298.) combien il importoit, pour augmenter la puissance du Gouvernail, que sa figure approchât, autant qu'il est possible, de celle d'un triangle, ainsi que l'expérience l'avoit déjà fait découvrir aux Marins. Cette particularité n'avoit encore été nullement remarquée, & il est bien étonnant qu'une pratique dépourvue de lumieres soit parvenue à donner une véritable connoissance sur cet objet, si long-temps avant la théorie.

(590.) Il est nécessaire que la distance horisontale du Gouvernail au centre de gravité du Vaisseau, qui est le point sur lequel il tourne, entre en considération pour trouver l'expression de la force de cette Machine; c'est ce que les formules de l'*Art.* 297 manifestent à la simple inspection, parce que c'est du moment de cette force que dépend l'efficacité de l'action qu'elle produit: ainsi, plus le Gouvernail sera éloigné du centre de gravité du Vaisseau, plus son action sera grande. Mais, comme dans toute cette distance, & même dans toute l'étendue de la carene du Vaisseau, les résistances des eaux sur les côtés, ainsi que d'autres forces, produisent une action considérable, il est nécessaire, pour parvenir à une connoissance parfaite du Manege & du Gouvernement du Vaisseau, de considérer le concours de toutes ces forces.

(591.) Ces forces, outre celle du Gouvernail, dont on ne doit pas employer l'action pour le Manege sans une nécessité bien absolue, se réduisent (400.), pour l'ordinaire, à deux, la force du courant des eaux sur le côté du Vaisseau, & celle des voiles. La premiere se décompose en deux autres, l'une qui agit directement, ou parallélement à la quille, & l'autre latérale, qui agit perpendiculairement & du côté sous le vent. Mais, comme la premiere de ces forces agit également de l'un & de l'autre côté du Vaisseau, elle ne peut contribuer en rien pour le Gouvernement: ainsi, il reste seulement la seconde, dont nous avons trouvé le centre éloigné

vers la poupe du centre de gravité du Vaiſſeau de 60 canons (223.), de 11 pieds ¼. La force des voiles ſe décompoſe pareillement en force directe, & en force latérale, ou perpendiculaire à la quille, toutes les deux oppoſées à celles que produit le courant des eaux. Les deux forces directes ſe font parfaitement équilibre, auſſi-tôt que le Vaiſſeau a acquis toute ſa marche; c'eſt-à-dire, dès que ſon mouvement progreſſif eſt devenu uniforme; mais les deux latérales ne peuvent ſe faire mutuellement équilibre, ſi elles ne concourent pas dans le même point. Lorſque cela n'arrive pas, comme ces deux forces ſont égales, celle qui ſe trouve plus éloignée du centre de gravité du Vaiſſeau, ſurmonte l'autre, & oblige le Vaiſſeau à tourner. Ainſi, *EAF* repréſentant la carene du Navire, les forces des eaux étant ſuppoſées réunies en *A*, & agiſſant ſuivant la direction *IG*, la droite *DG* repréſentera leur force directe, & *HG* leur force latérale, ou perpendiculaire à la quille. Si les forces des voiles ſe réuniſſoient de même en *G*, leur force directe, ou ſuivant *GD*, & leur force latérale, ou ſuivant *GH*, feroient équilibre à celles des eaux : mais ſi, au contraire, les forces des voiles ſe réuniſſent plus à la poupe, comme en *L*, le point *C* étant le centre de gravité, le Vaiſſeau arrivera, parce que les forces des eaux réunies en *G*, & agiſſant ſuivant *HG*, auront un plus grand moment que celles des voiles réunies en *L*. Ainſi, *pour que le Manege, ou le Gouvernement, ſoit parfait, ou pour que le Vaiſſeau demeure conſtamment dirigé ſur le même rumb de vent, il eſt néceſſaire que les forces des voiles ſe réuniſſent ſur un point de la ligne* GI, *& que la réſultante de ces forces ſoit dirigée ſuivant cette même ligne.*

PLANC. IX.

FIG.

(592.) D'après cette conſidération, il y a eu des Géometres (*a*) qui ont regardé le point *G* comme celui où il convenoit, & où il étoit avantageux de placer le mât, lorſqu'il n'y en a qu'un; & en conſéquence, ils ont recommandé de l'y placer : & lorſqu'il y en a pluſieurs, ils ont preſcrit de placer, dans ce point, le centre de toutes les forces qu'ils produiſent. Ils étoient convaincus, ſans doute, que ce point de réunion ne varie point, tant que la place & la diſpoſition des voiles reſte la même; mais, pour ſe convaincre du contraire, & s'éclairer parfaitement ſur ce point, il ne faut que relire le *Chapitre IV du Livre IV*, depuis *l'Article* 397 juſqu'à l'*Art.* 404, où ce ſujet eſt traité ſans aucun calcul, & avec tout le détail néceſſaire. Nous avons vu, dans cet endroit, que *B* étant le point où ſe réuniſſent les forces des voi-

(*a*) *Jean Bernoulli, Nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, Chap. 12, §§. 1, 2, & 3. Johannis Bernoulli, Opera omnia, Tomus ſecundus. M. *Bouguer, Traité du Navire*, Liv. III, Sect. III, Chap. I, page 473.

les, lorsque le Vaisseau est droit, & que les voiles sont planes, ce point se transporte en *D*, à cause de la courbure qu'elles prennent ; & que ce même point passe de *D* en *K*, à cause de l'inclinaison que prend le corps du Vaisseau : de sorte que, par ces deux causes réunies, ce point se transporte de *B* en *K*. Ainsi, *pour que le Vaisseau Gouverne bien, ou qu'il soit susceptible d'un Manege parfait, le point* K *doit tomber sur* I, *ou le point* L *sur* G : *si* L *est plus vers la proue que* G, *le Navire arrive* ; *&* *au contraire, le Navire vient au vent, si* L *est plus vers la poupe que* G. Mais comme ces différentes translations du centre où se réunissent les forces des voiles, dépendent de leur courbure, & de l'inclinaison du Vaisseau ; & que la courbure des voiles, ainsi que l'inclinaison du Vaisseau, dépend de la force plus ou moins grande du vent ; il s'ensuit évidemment que le Manege du Vaisseau dépend aussi de la force du vent, quoique la situation du point *B* demeure la même. Ainsi, *le vent venant à augmenter, le transport du centre des voiles est plus grand, & le Vaisseau vient au vent :* au contraire, *le Vaisseau arrive, si le vent diminue :* c'est ce que sçavent tous les Marins instruits par l'expérience seule. Non-seulement on éprouve de la variation dans le transport du centre des voiles, à cause de l'augmentation, ou de la diminution du vent, mais encore par le choc des lames. Une lame quelconque d'une grandeur suffisante, venant à faire incliner le Vaisseau dans le roulis, plus qu'il ne l'étoit auparavant, alors les point *K* & *L* s'éloignent davantage du point *B*, & il faut, de toute nécessité, que le Vaisseau vienne au vent ; au contraire, il arrivera dans le retour, ou lorsqu'il se redressera pour prendre sa premiere situation ; & comme les lames se succedent continuellement, les mouvements du Vaisseau, pour venir au vent & pour arriver, doivent aussi être continuels ; & l'on est, par conséquent, obligé d'y remédier continuellement au moyen du Gouvernail. Ainsi, quoique les voiles, & même le vent, n'éprouvent aucune variation, le Manege ou le Gouvernement du Vaisseau ne peut cependant manquer d'être variable, & d'exiger que le Gouvernail soit dans un mouvement continuel, ce qui demande beaucoup de soin, & plus encore d'expérience, qui, en pareil cas, est le meilleur guide qu'on puisse suivre.

(593) Nous avons dit que le transport du point *B* au point *K*, dépend de la courbure plus ou moins grande de la voile, & de l'inclinaison du Vaisseau. Or, comme les voiles sont susceptibles de prendre une plus grande courbure, à proportion de leur largeur ; il s'ensuit que *plus les voiles auront de largeur, ou plus elles*

elles auront d'envergure, plus le Navire aura de propension à venir au vent.

(594.) Pareillement, plus la hauteur du centre commun de toutes les voiles sera grande, & moins le Vaisseau sera chargé de lest, plus il prendra d'inclinaison; ainsi on peut établir que *plus le guindant, ou la hauteur des mâts, sera grand, & moins on aura embarqué de lest, plus le Vaisseau aura de propension à venir au vent*; & de ces deux principes il résulte, en général, que *plus les voiles d'un Vaisseau seront grandes, plus il aura de disposition à venir au vent.*

(595.) Maintenant, *si l'on conserve les voiles d'une même surface, en faisant seulement varier leurs dimensions, le changement qui en résultera dans le Manege sera peu considérable*; parce que si on augmente le guindant, & qu'à proportion on diminue l'envergure, ce que le premier changement produit pour faire venir au vent, le second le produit pour faire arriver; & ces deux effets se compensent sensiblement l'un l'autre.

(596.) Toutes ces variations dépendent uniquement du transport accidentel, du point B en K, ou en I; mais en quelque point de la droite EF que se trouve le point B, où se réunissent les forces de toutes les voiles, c'est-à-dire, en quelque point que se trouve leur centre, le Vaisseau étant droit, le même transport aura lieu: & par conséquent, plus ce centre se trouvera vers la poupe, plus le Vaisseau aura de disposition à venir au vent; c'est encore ce que sçavent très-bien les Marins. La situation de ce point dépend de la distribution des mâts, & de la grandeur des voiles que chacun d'eux porte; de même que de la quantité de voiles qui sont déferlées ou serrées. Ainsi, dans cette distribution & combinaison des parties, il faut procéder de maniere qu'en variant la disposition & la quantité des voiles, on puisse faire reculer le point B vers l'arriere, ou le faire avancer vers l'avant, de façon que le point K se maintienne constamment sur I, ou à peu près, & cela dans tous les cas possibles; c'est-à-dire, soit qu'on porte peu ou beaucoup de voiles, que le vent soit foible ou violent, soit qu'il soit nécessaire de venir beaucoup au vent, ou de n'y venir que d'une petite quantité.

(597.) Ceci doit, par conséquent, résulter des valeurs que peuvent avoir les droites DB, BC, CG, GD, & DI. Pour le Vaisseau de 60 canons, naviguant avec toutes ses voiles, on a (276 & 419.), $DB = 13$ pieds $\frac{84}{100}$, & (285.), $BC = 12$: donc D tombera entre C & G, & DC sera $= 1$ pied $\frac{84}{100}$. Retranchant cette quantité de $GC = 11$ pieds $\frac{1}{2}$, (223.), il reste $GD = 9$ pieds $\frac{66}{100}$. Mais comme l'angle DIG a été trouvé, pour ce même cas, le Vaisseau allant à la bouline de 31 à 32 degrés (276.), sa tangente est à peu près de $\frac{60}{100}$: & selon les principes de la Trigonométrie, DG étant à DI comme cette

tangente eſt au rayon ; il s'enſuit qu'on aura DI, en diviſant DG par $\frac{62}{100}$, ce qui donnera $DI = 15$ pieds $\frac{1}{5}$, à peu près. Ainſi, pour que le Manege ſoit parfait dans ce cas, ou qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'employer l'action du Gouvernail, il faut que DK ſoit de 15 pieds $\frac{3}{5}$, ou que la force du vent ſoit telle quelle faſſe incliner le Vaiſſeau juſqu'à porter le point K à 15 pieds $\frac{3}{5}$ du point D. Mais ce même point K eſt (282.), élevé au-deſſus du centre de gravité de 70 pieds $\frac{1}{4}$: donc l'in-
Fig. 47. clinaiſon DCK doit être de $\frac{15\frac{3}{5}}{70\frac{1}{4}}$, ou l'angle DCK à peu près de 12° $\frac{1}{4}$. Nous avons trouvé, dans l'*Art.* 419, que ce cas arrive, lorſque la vîteſſe du vent eſt de 18 pieds $\frac{1}{4}$ par ſeconde : donc, ſi la vîteſſe du vent augmente, le Vaiſſeau viendra au vent, & il ſera néceſſaire d'avoir recours au Gouvernail pour y apporter remede ; & ſi, au contraire, elle diminue, le Vaiſſeau arrivera, & le ſecours du Gouvernail ſera encore néceſſaire.

(598.) Naviguant avec les deux baſſes voiles, les deux huniers avec
Fig. 48. tous les ris pris, l'artimon & le faux foc, on a $BC = 11$, & $BD = 17\frac{15}{100}$; ce qui donne $GD = 4\frac{92}{100}$. Et l'angle DIG étant de 40° moins 21° qui (352.) réſultent de la courbure des voiles, cet angle eſt donc de 19°, dont la tangente eſt $\frac{344}{1000}$; par conſéquent, DI eſt à peu près de 14 pieds $\frac{1}{3}$; ainſi, DK doit avoir cette grandeur, pour que le Gouvernement ſoit parfait, & qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'employer l'action du Gouvernail. La hauteur du centre des voiles au-deſſus du centre de gravité du Vaiſſeau, eſt (228.), dans ce cas, de 56 pieds $\frac{1}{4}$: donc l'inclinaiſon du Vaiſſeau devra être de $\frac{14\frac{1}{3}}{56\frac{1}{4}}$, ou à peu près de 14° 14′, pour que l'équilibre ſoit bien établi, ou que le Manege ſoit parfait. Nous avons trouvé, dans l'*Art.* 420, que ce cas arrive lorſque la vîteſſe du vent eſt d'environ 29 pieds par ſeconde.

(599.) Le Vaiſſeau reſtant ſeulement ſur ſes deux baſſes voiles, on a (421.), $BC = 16\frac{15}{100}$, BD eſt comme ci-deſſus de $17\frac{15}{100}$; ce qui donne GD de 10 pieds $\frac{7}{100}$, & DI, d'après la même ſuppoſition que l'angle $DIG = 19°$, eſt de 29 pieds $\frac{1}{3}$; quantité exorbitante, & dont jamais le point K ne pourra parvenir à s'éloigner du point D ; ce qui prouve qu'avec cet appareil il eſt impoſſible que le Vaiſſeau vienne au vent par lui-même. En effet, nous avons vu, dans l'*Art.* 421, que pour que cela pût avoir lieu, il faudroit que le vent parcourût 240 pieds par ſeconde ; vîteſſe énorme, & qui ne pourroit s'effectuer ſans mettre les voiles en pieces, ou même ſans une deſtruction totale des mâts & des vergues. En bordant l'artimon, nous avons vu, dans le même *Art.* 421, que le point D tomberoit à la poupe du centre de gravité C

du Vaiſſeau ; dans ce cas, le Vaiſſeau viendroit donc continuellement au vent, mais on pourroit rétablir l'équilibre en mettant le faux foc.

(600.) Conſervant ſeulement la grande voile, le point *B* (422.), tombe à 12 pieds $\frac{71}{100}$ à la poupe du centre *C*, & le point *D* à 17 pieds $\frac{58}{100}$ auſſi à la poupe de *B* ; le point *D* tombera donc à 30 pieds $\frac{29}{100}$ à la poupe du centre de gravité *C*. Retranchant de cette quantité les 11 pieds $\frac{1}{2}$, dont le point *G* eſt éloigné de *C*, il reſtera 18 pieds $\frac{79}{100}$, dont le point *D* tombera à la poupe de *G*, par conſéquent, le Vaiſſeau tendra à venir au vent avec une très-grande force ; propriété qui eſt très-eſſentielle dans ce cas, parce que les lames qui le choquent à la proue, l'obligent à arriver beaucoup.

(601.) On voit que, dans tous ces cas, le Vaiſſeau peut tendre de lui-même à arriver ou à venir au vent, ſelon la vîteſſe du vent : il nous reſte ſeulement de ſçavoir ſi le Gouvernail eſt capable de remédier à ces irrégularités. Le cas dans lequel il y auroit plus a en douter eſt, ſans contredit, le premier, parce que, dans ce cas, la vîteſſe du vent peut être très-petite, & par conſéquent *DK* peut l'être auſſi ; mais on a levé ce doute dans l'*Art.* 423, en faiſant voir que la force du Gouvernail eſt plus que ſuffiſante pour produire cet effet, particuliérement ſi le vent a une action ſuffiſante pour rendre ſenſible la courbure des voiles.

(602.) On a également developpé, dans les *Art.* 424, 425 & 426, les cas où l'on navigue vent arriere, & vent largue, & l'on a fait voir que la force du Gouvernail eſt exceſſive à l'égard des autres forces : par conſéquent, une très-petite obliquité du Gouvernail ſuffit pour obliger le Vaiſſeau à tourner ; c'eſt ce qui fait que le Manege du Vaiſſeau eſt fort délicat dans ces cas, & particuliérement vent arriere.

(603.) L'emplacement des mâts, ainſi que la diſpoſition des voiles dans le Vaiſſeau de 60 canons, nous a donné $CB = 12$ pieds, lorſqu'elles ſont toutes déployées (285.) ; par conſéquent, cette diſpoſition étoit très-bonne : mais cette quantité doit dépendre, comme nous l'avons vu, de *CG*, diſtance du centre des réſiſtances latérales, au centre de gravité du Vaiſſeau. Plus *CG* ſera petite, moins le Vaiſſeau aura de force pour arriver ; & par conſéquent, plus *CB* doit être grande, & de la longueur de cette diſtance dépend auſſi la même action : ainſi, *GB* doit ſe maintenir conſtante, c'eſt-à-dire, toujours la même ; & comme nous avons trouvé *CG* de 11 pieds $\frac{1}{2}$, il s'enſuit que dans le Vaiſſeau de 60 canons, *GB*, ou la diſtance du centre de la voilure à celui des réſiſtances latérales, doit être conſtamment de 23 pieds $\frac{1}{2}$: il en eſt de même à proportion dans les autres Vaiſſeaux.

(604.) La ſituation du centre *G* des réſiſtances, dépend non-ſeule-

ment de la figure de la carene du Vaiſſeau, mais auſſi de la relation & de la grandeur des élancements de poupe & de proue, c'eſt-à-dire, de la quête de l'étambot & de l'élançement de l'étrave, comme on peut le voir dans le *Chapitre VII, du Livre II:* de ſorte que plus l'élancement de l'étrave ſera petit, par rapport à la quête de l'étambot, plus le point *G* ſera avancé vers la proue, & plus le Vaiſſeau aura de propenſion à venir au vent, à moins qu'on n'ait ſoin de faire avancer le point *B*, ou le centre de la voilure, d'une même quantité vers la proue (*a*).

(*605.*) Le point *G* change de ſituation lorſqu'on ſurcharge le Vaiſſeau, parce que le centre des réſiſtances latérales de la partie du côté qui ſe ſubmerge de nouveau dans le fluide, eſt plus à la proue que le point *G*: par conſéquent, le nouveau centre des réſiſtances qui en réſultera, doit être auſſi plus à la proue que ce point. Delà il ſuit qu'un Vaiſſeau dont on augmente la charge doit être plus diſpoſé à venir au vent, lorſque le centre de gravité ne s'eſt pas abaiſſé par l'augmentation de la charge, & que par-là la ſtabilité du Vaiſſeau n'eſt pas augmentée. Si, au contraire, le centre de gravité s'eſt élevé par l'augmentation de la charge, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'augmentation de la charge s'eſt faite par les hauts, le Vaiſſeau ſera alors plus diſpoſé à venir au vent par deux raiſons; l'une à cauſe que le point *G* aura paſſé plus à la proue, & l'autre à cauſe que la ſtabilité du Vaiſſeau ſe trouvera diminuée.

(*606.*) La ſituation du point *G* varie encore, lorſque l'inclinaiſon du Vaiſſeau, dans le ſens de ſa longueur, vient à varier, ou, ce qui eſt la même choſe, lorſque l'inclinaiſon de la quille à l'égard de l'horiſon, ſouffre quelque changement. Car (224.), nous avons vu que les 11 pieds $\frac{1}{4}$ que nous avons trouvés pour la diſtance de *G* à *C*, viennent de la ſuppoſition qu'on a faite que le Vaiſſeau eſt *calé* de 2 pieds plus à la poupe qu'à la proue; & que ſi la quille étoit *horiſontale*, cette diſtance *CG* ſeroit ſeulement de 9 pieds $\frac{1}{4}$. Le Vaiſſeau étant moins calé à la poupe ſera, par conſéquent, plus diſpoſé à venir au vent. L'expérience a encore manifeſté ce fait aux Marins, & ils ſe ſervent de cette connoiſſance pour corriger les défauts dans leſquels tombent quelques Conſtructeurs, en proportionnant mal les élancements, ou la diſtance *CB* du centre de la voilure au centre de gravité du Vaiſſeau.

(*607.*) Pour procéder avec certitude ſur ce point, on aura préſent

(*a*) M. *Olivier*, Ingénieur-Conſtructeur du Département de Breſt, à conſtruit des Vaiſſeaux ſans donner aucun élancement à l'étrave, & cela dans la vue de les rendre meilleurs bouliniers; mais l'expérience ne tarda pas à faire voir le grand défaut de cette conſtruction; c'eſt ce qui eſt évident par notre théorie.

à l'esprit que, selon ce qu'on a exposé (276.), le Vaisseau allant à la bouline avec toutes ses voiles, & avec un vent de 18 à 20 pieds de vîtesse par seconde, l'angle *DIG* est de 31 à 32 degrés, & sa tangente de $\frac{61}{100}$, ce qui donne *DG* des $\frac{61}{100}$ de *DI*. Mais ayant de même *DG* égale *GB* moins *BD*, & *BD* étant égale aux $\frac{172}{1000}$ de la largeur des voiles prise à la hauteur de leur centre de gravité (276.), *DG* sera égale à $\frac{61}{100}$ *DI* plus $\frac{172}{1000}$ de la largeur des voiles à la hauteur de leur centre de gravité. Ainsi, on pourra, sans erreur sensible, prendre *GB* des $\frac{2}{3}$ de l'inclinaison *DI* que le Navire peut prendre dans un cas semblable, plus $\frac{1}{6}$ de la largeur des voiles à la hauteur de leur centre de gravité. Pour le Vaisseau de 60 canons, on a trouvé (597), la premiere quantité *DI* de 15 pieds $\frac{2}{7}$, dont les $\frac{2}{3}$ sont de 10 pieds $\frac{4}{21}$: & la seconde (419) de 80 pieds, dont le $\frac{1}{6}$ est 13 pieds $\frac{1}{3}$, ce nombre ajouté aux 10 pieds $\frac{4}{21}$ donne 23 pieds $\frac{11}{21}$, pour la valeur de *GB*. Le point *C*, centre de gravité du Vaisseau, se trouve, comme on l'a enseigné dans le *Chapitre II du Livre II*, *Article* 140: & la distance *CG*, comme on l'a exposé dans le *Chapitre VII du Livre II*.

(608.) Tout ceci se réduit cependant à avoir seulement déterminé les distances respectives que doivent avoir les voiles entre elles; & l'emplacement des mâts n'est point encore déterminé. Pour cela il est nécessaire de s'occuper d'abord de la situation du grand mât; & comme il est nécessaire que le Vaisseau soit fort ardent avec la grande voile seule, on pourra placer ce mât au centre *G* des résistances latérales, ou à fort peu près. Car, comme la courbure que prend la voile, dans ce cas, reculera son centre de force à la distance de (422.) 17 pieds $\frac{11}{100}$, le Vaisseau viendra au vent avec un moment qui sera exprimé par le produit de 17 $\frac{11}{100}$ par la force que fait la voile. Ce moment pourra paroître un peu excessif; & c'est pour cela que le Vaisseau de 60 canons avoit son grand mât placé 4 pieds plus à la proue que le point *G*; mais, outre que, dans d'autres Vaisseaux, le grand mât est seulement de 1 pied $\frac{1}{2}$ plus avancé vers la proue que le point *G*, on doit considérer que plus le grand mât & le mât de misaine seront éloignés, plus il en résultera d'avantages pour que les voiles du premier dérobent moins le vent à celles du second; & cet avantage ne peut produire aucun inconvénient, tant qu'on conserve à *GB* sa valeur déterminée. Ayant une fois placé le grand mât, on portera le mât de misaine le plus à la proue qu'il sera possible. Quant au mât d'artimon, on l'avancera, ou on le reculera de ce qui sera nécessaire pour que *GB* conserve la valeur qu'on aura trouvée convenable.

CHAPITRE VI.

Du Roulis & du Tangage.

(609.) DE toutes les théories des mouvements du Vaisseau, la plus compliquée est sans contredit celle du Roulis & du Tangage. On peut se convaincre de cette vérité par la lecture du *Chap. V* du *Liv. IV*, où cette théorie est traitée d'une maniere très-étendue. C'est, sans doute, par cette raison que les Auteurs les plus célebres (*a*) se sont contentés de considérer le Roulis comme l'effet d'une action simple du Vaisseau, résultante d'une petite inclinaison qu'on lui feroit éprouver, la surface de l'eau se maintenant toujours parfaitement horisontale. Mais on voit bien qu'en considérant le Roulis sous cet aspect, il ne dépendroit aucunement de l'action de la lame, tandis que c'est la lame qui le produit, qui peut même l'augmenter & le diminuer. Cette supposition facilitoit beaucoup le calcul, &, pour n'avoir pas prévu ni apperçu les erreurs auxquelles elle conduisoit, on en a adopté les résultats, sans songer aux vices de la supposition. La conséquence qui en résulte est que le Vaisseau oscille comme le fait un pendule d'une longueur déterminée; & que ses balancements sont isochrones avec les oscillations du pendule, ou que chacun de ses Roulis se fait dans le temps que le pendule emploie à faire une oscillation. Or, comme ce temps ne dépend nullement de celui qu'emploie la lame à passer sous le Vaisseau, il s'ensuit que quelle que soit la grosseur de la lame, qu'elle soit grande ou petite, le Roulis sera toujours de la même durée, ce qui est évidemment faux, parce que le Vaisseau doit se redresser de l'inclinaison qu'il a été forcé de prendre par l'action de la lame, aussi-tôt qu'elle vient à lui manquer, ou à s'éloigner de lui; &, comme cela s'effectue en différents temps, selon la grandeur des lames, lesquelles courent avec des vitesses différentes, il s'ensuit nécessairement que les Roulis doivent aussi s'effectuer dans des temps fort différents entre eux.

(610.) Cependant, après le passage de la lame, le Vaisseau doit faire d'autres balancements, ou d'autres Roulis qui proviennent de l'inclinaison qu'il a déja prise, en vertu de cette premiere action, & c'est sans doute de ces Roulis, que les Auteurs cités ont voulu nous donner la théorie. Mais ces derniers, tant à cause de la résistance des eaux, qu'à cause de celle que le vent produit dans les voiles, sont

(*a*) *Léonard Euler*, *Scientia Navalis*, Tome I, Chapitre IV, Proposition 48. M. *Bouguer*, *Traité du Navire*, Livre II, Section III.

beaucoup plus petits, & les effets qu'ils produisent sont aussi beaucoup moindres à proportion : de sorte que ce sont les premiers Roulis que nous devons uniquement considérer, & auxquels nous devons porter toute notre attention, pour prévenir, autant qu'il est possible, les accidents funestes qui en résultent, & qui ne sont, malheureusement, que trop fréquents.

(611.) En outre, les mêmes Auteurs se sont également persuadés que la seule chose à considérer dans les Roulis étoit le temps dans lequel ils s'exécutent, attendu qu'ils doivent être plus doux, à proportion que les Vaisseaux y emploient plus de temps : mais quoique cela soit exactement vrai, lorsque les Roulis sont constamment de la même grandeur ; ce n'est plus la même chose dès que leur étendue varie. Si la durée d'un balancement est double de celle d'un autre, il suffit que l'étendue du premier soit également double de celle du second, pour que les vîtesses de l'un & de l'autre soient égales, & alors les effets du grand balancement sont beaucoup plus à redouter que ceux du petit. La principale attention qu'on doit avoir dans l'examen des Roulis, consiste dans les moments d'inertie qu'ils communiquent à toute la mâture & aux différentes parties du corps du Vaisseau ; car c'est à proportion de la valeur de ces moments que les mâts sont plus exposés à se rompre, & que les courbes des ponts de même que les autres pieces qui composent & qui lient le corps du Vaisseau sont plus exposées à se désunir.

(612.) Dans le *Chap. V du Liv. IV*, nous avons donné, dans toute son étendue, la théorie de cette action ; & nous avons distingué, dans le Vaisseau, deux especes de Roulis, de la considération desquels nous avons déduit la théorie du véritable. Le premier de ces Roulis est celui que le Vaisseau feroit de lui-même, & sans l'action de la lame, & qui provient seulement de l'action du Vaisseau lorsqu'il se remet de quelques inclinaisons qu'il auroit prise auparavant ; & le second est celui qu'il feroit, en vertu de la seule action de la lame, & sans avoir égard à toutes les altérations qui doivent résulter des moments avec lesquels agissent les différents poids dont le corps du Vaisseau est composé. Le temps de la durée de la premiere espece de Roulis est (434.), en raison directe sous doublée des moments avec lesquels toutes les parparties du Vaisseau agissent, & pareillement en raison inverse sous doublée du poids de tout le Vaisseau, & de la distance de son centre de gravité au métacentre. C'est aussi ce qu'ont conclu les Auteurs cités : & comme les moments deviennent plus grands à mesure que les poids sont plus éloignés de l'axe sur lequel tourne le corps du Vaisseau, ou sur lequel le Roulis s'effectue, & qu'ils croissent en raison doublée de cette distance ; il s'ensuit nécessairement que les temps

PLANC. IX. doivent être comme les distances des poids à l'axe. C'est pour cette raison qu'ils ont recommandé qu'on éloignât les différents poids de l'axe, le plus qu'il est possible; car de cette disposition il doit résulter des Roulis d'une plus grande durée; & en même temps d'une plus grande douceur, suivant leur maniere d'en concevoir l'action.

(613.) Le temps dans lequel doivent s'effectuer les Roulis de la seconde espece, qui sont causés par l'action seule de la lame, a été déterminé dans l'*Art.* 449; & dans l'*Art.* 450, nous avons donné une Table du temps dans lequel le Vaisseau de 60 canons qui nous à servi d'exemple, acheveroit ces especes de balancements. On voit, dans cette Table, que ces temps sont grands lorsque les lames sont petites, qu'ils diminuent jusqu'à un certain terme, à mesure que les lames augmentent, & qu'ensuite ils retournent à augmenter: de sorte que le Roulis causé par une lame de $\frac{1}{2}$ de pied de hauteur dure 5 secondes; que celui causé par une lame de 4 pieds de hauteur dure 2 secondes $\frac{54}{100}$, & celui que produit une lame de 64 pieds de hauteur dureroit 6 secondes $\frac{20}{100}$.

(614.) Ces temps, ainsi que ceux désignés dans l'*Art.* précédent pour la durée des Roulis de la premiere espece, ne sont point, comme nous l'avons dit, les véritables, dans lesquels les Vaisseaux exécutent leurs Roulis; ces vrais temps tiennent un milieu entre les uns & les autres, comme on l'a fait voir dans l'*Art.* 453, & on a donné leur véritable

FIG. 56. valeur dans l'*Art.* 457. La formule qu'on a donnée dans le même *Art.*, fait voir que, si AB représente le temps dans lequel le Vaisseau exécute son Roulis par lui-même, & la perpendiculaire AC, celui dans lequel il le feroit par l'action seule de la lame, en tirant la perpendiculaire AD sur l'hypotenuse BC, & menant AF égale & perpendiculaire à AD, cette formule fait voir, dis-je, que DF représentera le vrai temps dans lequel le Vaisseau accomplira son Roulis. Ainsi, le temps AB dans lequel le Vaisseau de 60 canons accomplira son Roulis par lui-même, ayant été trouvé (434.) de 2 secondes $\frac{4}{5}$, & celui AC qu'il emploiroit à faire le même balancement par l'action seule d'une lame de 64 pieds de hauteur, ou par une mer * qui conserve une élévation équivalente après le calme du vent qui l'a produite, étant de 6 secondes $\frac{1}{5}$. Si avec ces données on fait le calcul, on trouvera DF, c'est-à-dire le vrai temps dans lequel le Vaisseau accomplira son Roulis avec cette même lame de 3 secondes $\frac{3}{5}$.

(615.) Il est évident, par cette construction, que si AB augmente,

* Ce sont les lames de la seconde espece qu'on a considérés, *Tome I, Art.* 818, & *Tome II, Art.* 452. Les Espagnols les appellent *olas de leva*, ou *mares de leva*.

DF

DF augmentera aussi, & par conséquent, plus le temps dans lequel le Vaisseau achevera son Roulis par lui-même, sera grand, plus aussi la durée du véritable Roulis sera grande. Mais on doit cependant considérer que, selon la formule de l'*Art.* 459, la grandeur du Roulis sera comme le quarré de *CB*; de sorte que plus *AB* sera grande, plus aussi le Roulis sera grand: ainsi, si l'effet qui résulte de cette derniere augmentation étoit plus considérable que celui qui peut résulter de l'augmentation du temps, il ne conviendroit en aucune maniere de chercher à augmenter *AB*, afin de ne pas augmenter la grandeur du Roulis.

(616.) Pour trouver maintenant, d'après ces principes, quel est le Roulis qui peut être le moins préjudiciable, il est nécessaire de considérer l'action qu'il peut produire sur la mâture, parce que c'est, de toutes les parties du Vaisseau, celle qui est la plus exposée & qui souffre le plus. Il se présente ici deux cas très-distincts: l'un quand le temps *AB*, dans lequel le Vaisseau acheve son Roulis par lui-même, varie en conséquence de ce que les moments d'inertie auroient éprouvé quelque variation, soit pour avoir séparé davantage de l'axe de rotation les différents poids ou les différentes parties de la charge: & l'autre, quand le même temps *AB* varie, parce que la distance du centre de gravité au métacentre auroit souffert quelque altération.

(617.) Pour le premier cas, la formule donnée (461.), nous enseigne que les moments ou actions que souffrent les mâts sont, en raison inverse de *DE*, perpendiculaire à *AC*: de sorte que plus *DE* pourra être grande, plus l'action que souffrent les mâts sera petite. Mais comme l'angle *ADC* doit toujours être droit, & que par conséquent le point *D* doit toujours se trouver sur la demi-circonférence *ADC*; il s'ensuit que la plus grande *DE* sera le rayon, ou la moitié du diametre *AC*; & dans ce cas, *AB* est égale à *AC*. Donc, *pour que la mâture souffre le moins d'action qu'il est possible, le temps* AB, *dans lequel le Vaisseau acheveroit son Roulis par lui-même, doit être égal au temps* AC, *dans lequel il devroit l'achever, s'il étoit causé par la seule action de la lame. Dans ce même cas,* DF *sera aussi égal à* AC; *par conséquent, le vrai temps dans lequel le Vaisseau doit achever son Roulis, pour que la mâture souffre le moins d'action qu'il est possible, doit être aussi égal au temps dans lequel il l'acheveroit s'il étoit causé par la seule action de la lame.*

(618.) On est donc tombé dans une erreur très-grave, lorsqu'on a voulu, sans un plus ample examen, augmenter la durée du Roulis, en éloignant de l'axe de rotation, les différents poids qui composent la charge du Vaisseau. Cette durée doit avoir, pour seule & unique limite, le temps dans lequel il accompliroit son Roulis, s'il étoit uniquement causé par l'action seule de la lame: tout ce dont cette durée passera cette limite, sera

très-préjudiciable; & cela paroîtra encore beaucoup plus à craindre, si l'on considere que dans les grands Roulis la mâture éprouve, non-seulement l'action des moments d'inertie qui agissent sur elle, mais qu'elle éprouve encore l'action de son poids, laquelle croît à mesure que les inclinaisons deviennent plus grandes; de sorte que, pour plus de sûreté, il est prudent & nécessaire de régler la durée du Roulis, & de la fixer à quelque chose de moins que la limite assignée. Nous avons vu, dans les *Articles* 458 & 459, qu'en éloignant les poids de l'axe dans le Vaisseau de 60 canons, dans la raison de 15 à 21, ou de 5 à 7, la durée du Roulis a augmenté dans celle de 6 à 7, & sa grandeur dans celle de 949 à 1258, ou, à peu près, dans celle de 3 à 4; raison qui est excessivement plus grande. Si on recherche, pour les mêmes cas, les *actions* que souffrent les mâts avec une lame de 9 pieds de hauteur, la durée du Roulis que cette lame seule produiroit étant de 3″, on les trouvera comme on le voit ici.

Durée du Roulis que le Vaisseau fait de lui même.	*Rapport de l'action que souffre la mâture.*
$2''\ \frac{3}{4}$	. . . . . $\frac{1}{2,2320}$
3	. . . . . $\frac{1}{2,2500}$
$3''\ \frac{2538}{10000}$	. . . . . $\frac{1}{2,2353}$

On voit delà que l'action que souffrent les mâts, le Vaisseau achevant son Roulis par lui-même, dans le même temps qu'il l'acheveroit par la seule cause de la lame, est moindre que les deux autres actions, soit que le Vaisseau acheve son Roulis par lui-même, en moins ou en plus de temps qu'il ne le feroit par l'action seule de la lame. Mais il faut observer que ce dernier cas, c'est-à-dire, celui où le Vaisseau emploie plus de temps à balancer de lui-même, est le plus désavantageux de tous; car, comme nous l'avons dit ci-devant, l'action résultante du poids de la mâture devient alors plus grande, à cause de la plus grande inclinaison que prend le Vaisseau; & cette action se joint à celle des moments d'inertie; c'est pour cette raison que même la premiere action est *préférable* à la seconde: de sorte qu'on peut être assuré que pour les lames de 9 pieds de hauteur, le Vaisseau ne pourroit être mieux disposé.

(619.) Le temps dans lequel le Vaisseau doit produire son Roulis par lui-même, devant toujours être égal à celui dans lequel il le produiroit par l'action seule de la lame, & chaque lame devant produire un Roulis d'une durée différente, suivant sa hauteur, il s'ensuit que la durée du Roulis que le Vaisseau fait par lui-même, devroit aussi être variable, pour que la mâture souffrît la moindre action qu'il est possible: ou, ce qui est la même chose, pour obtenir l'avantage de cette moindre action, il faudroit changer la disposition de la charge pour chaque espece de lame; ce qui feroit très-risquable dans la pratique, & exigeroit un travail insur-

montable, & par conféquent impoffible. Ce parti feroit cependant celui qui produiroit le plus d'avantages; mais à fon défaut, voici la maniere dont il convient d'envifager cet objet. Comme les petites lames font peu dangereufes pour les Vaiffeaux, & méritent par-là peu de confidération, il fuffira de nous en tenir à confidérer celles qui, par leur grandeur, commencent déjà à être dangereufes, ou au moins à pouvoir caufer quelque préjudice, comme font les lames de 9 à 36 ou 40 pieds de hauteur. Or, par la feule action de ces lames, le Vaiffeau feroit des Roulis (450.), dont la durée feroit entre 3 & 5 fecondes; il conviendra donc de prendre une durée moyenne qui fera de 4 fecondes; puifque, comme on l'a dû voir, nous ne pouvons pas faire varier le temps de la durée du Roulis que le Vaiffeau feroit par lui-même, felon qu'il nous feroit avantageux. Nous avons vu, dans l'*Art.* 463, que pour faire enforte que le Vaiffeau de 60 canons acheve ainfi fes balancements dans 4 fecondes, il falloit éloigner les poids de l'axe dans la raifon de 15 à 22, c'eft-à-dire, au delà de ce que la largeur du Navire peut le permettre; mais fi nous nous rappellons, en outre, que nous avons vu (618.), dans les Roulis d'une grande étendue, que le propre poids de la mâture ajoute encore à l'action qu'elle fouffre, & contribue à l'expofer davantage; nous en conclurons que ceux dont la durée eft de 3 fecondes ½ feront les plus convenables, non-feulement pour le Vaiffeau de 60 canons, mais pour tous les Vaiffeaux en général, puifque les lames font les mêmes pour tous: comme, dans les petits Vaiffeaux, cela ne fera pas praticable, on tâchera d'y fuppléer en éloignant les parties de la charge de l'axe avec les attentions qu'on expofera ci-après.

(620.) Le fecond cas qui eft celui dans lequel le temps que le Vaiffeau emploie à produire fon Roulis par lui-même, varie, parce qu'on auroit fait quelque altération à la diftance de fon centre de gravité à fon métacentre, a été examiné dans l'*Art.* 464, & l'on y a démontré qu'à mefure qu'on augmente cette diftance, le travail que fupporte la mâture augmente auffi; & par conféquent, plus on pourra faire cette diftance petite, plus ce fera avantageux pour le foulagement de la mâture. Mais le travail de la mâture n'eft pas le feul inconvénient qui réfulte du Roulis, il en eft un autre auquel nous devons faire attention, & qui n'eft pas moins fâcheux, c'eft l'inondation qui réfulte des coups de mer; car les eaux s'élevent alors à une telle hauteur quels ont coutume de paffer par-deffus le corps du Vaiffeau. Ce fâcheux inconvénient n'a point été, jufqu'à préfent, confidéré théoriquement; & peut-être n'a-t-on pas cru qu'il eût aucune dépendance du Roulis. Cependant nous avons démontré, dans l'*Art.* 465, que les élévations des eaux fur le côté du Vaiffeau font comme les quarrés des temps dans lefquels s'accompliffent les Roulis, ou comme le quarré

de *AD*, ou *DF*; & c'eſt ici la raiſon la plus eſſentielle & la plus déterminante pour ne pas augmenter beaucoup *AB*, quoique ce parti nous ait été recommandé juſqu'ici par tous ceux qui nous ont donné des Préceptes. On a déterminé, dans le même *Art.*, la vraie hauteur à laquelle la lame doit s'élever ſur le côté du Vaiſſeau; & dans l'*Art.* 466, on a appliqué la formule à quelques exemples pris du Vaiſſeau de 60 canons. Dans le premier de ces exemples, où l'on ſuppoſe le Vaiſſeau dans ſon état d'arrimage ordinaire, on a trouvé que la lame ayant 36 pieds de hauteur, l'eau s'élevera ſur le côté de 12 pieds $\frac{1}{4}$. Dans le ſecond exemple, où l'on ſuppoſe que les poids ſont plus éloignés de l'axe de rotation dans la raiſon de 15 à 21, on a trouvé que les eaux s'éleveroient de 18 pieds $\frac{1}{3}$. Et dans le troiſieme enfin, où l'on ſuppoſe que la diſtance du centre de gravité au métacentre, eſt diminuée dans la raiſon de $9\frac{1}{4}$ à 6, on a trouvé que les eaux doivent s'élever de 16 pieds; ou, ce qui eſt la même choſe (458.), dans le premier cas où le Vaiſſeau acheveroit ſon Roulis dans 2 ſecondes $\frac{6}{7}$, les eaux s'éleveroient ſur le côté de 12 pieds $\frac{1}{4}$: dans le ſecond, où la durée du Roulis eſt de 3 ſecondes $\frac{1}{3}$, elles s'éleveroient de 18 pieds $\frac{1}{3}$: & dans le troiſieme enfin, où le Roulis s'accompliroit dans 3 ſecondes $\frac{11}{100}$, l'élévation des eaux ſeroit de 16 pieds.

(621.) Mais ces élévations des eaux qui paroiſſent ſi grandes, ne ſont pas encore les véritables, car on les auroit trouvées plus grandes, ſi, dans le calcul, on avoit eu égard à la dénivellation, ou à la plus grande hauteur qui réſulte de la vîteſſe avec laquelle les mêmes lames choquent le côté du Vaiſſeau. Il eſt vrai qu'on n'a pas non plus tenu compte de la diminution qui doit auſſi réſulter à raiſon de ce qu'elles le choquent obliquement: mais ayant égard à ces circonſtances, on a trouvé, dans l'*Art.* 467, que les véritables élévations des eaux ſeroient, dans le premier cas, de 15 pieds $\frac{1}{4}$: dans le ſecond, de 21 pieds $\frac{1}{3}$· & dans le troiſieme, de 19 pieds. Or, comme le côté du Vaiſſeau, dont il s'agit ici, n'a que 16 à 17 pieds de hauteur, au-deſſus de la ſurface de l'eau, il s'enſuit qu'il n'y a que dans le premier cas que les eaux ne paſſeront pas par-deſſus: dans le ſecond & troiſieme cas, elles ſurmonteront le corps du Vaiſſeau au moins de 2 & 4 pieds $\frac{1}{3}$. Nous devons donc conclure que ſi nous voulons éviter que la mer inonde à tout moment le corps du Vaiſſeau, nous ne devons pas même porter la durée du Roulis juſqu'à 3 ſecondes $\frac{1}{4}$, qui eſt celle à laquelle nous avons trouvé (619.) qu'il convenoit de fixer la durée du balancement que le Vaiſſeau feroit par lui-même, pour que la mâture fût le moins expoſée qu'il eſt poſſible.

(622.) Dans les petits Bâtiments, il eſt encore plus néceſſaire de chercher à ſe garantir de cet accident; car nous avons démontré, dans l'*Art.* 469, que les élévations des eaux ſur leur côté ſont plus grandes à propor-

tion que dans les Vaiſſeaux; ainſi, les petits bâtiments exigent que les temps dans leſquels ils accompliroient leurs Roulis par eux-mêmes, ſoient encore dans une moindre raiſon que la raiſon directe de leurs largeurs, & l'inverſe des diſtances de l'axe de rotation au métacentre; c'eſt-à-dire, que dans les petits Bâtiments, les différents poids qui compoſent la charge doivent être à proportion plus proches de l'axe que dans les Vaiſſeaux; principalement lorſque pour ces Bâtiments la diſtance de l'axe au métacentre eſt, à proportion, plus grande. On a donné pour exemple, dans le même *Art.* 469, une Frégate d'une conſtruction en tout ſemblable à celle du Vaiſſeau, & dont les dimenſions étoient la moitié des ſiennes; & l'on a trouvé que les eaux s'éleveroient de 10 pieds $\frac{67}{119}$ ſur les côtés de la Frégate, tandis qu'elles ne s'éleveroient que de 12 pieds $\frac{1}{2}$ ſur le côté du Vaiſſeau: de ſorte qu'elles paſſeroient de 2 pieds par-deſſus le bord de la Frégate, pendant qu'elles n'arriveroient pas au bord du Vaiſſeau, même lorſqu'elles s'éleveroient encore de 4 pieds de plus. Nous avons trouvé (471.), pour la Frégate de 22 canons, qui a 31 pieds $\frac{2}{3}$ de largeur, que les lames ayant 36 pieds de hauteur, les eaux s'éleveroient de 14 pieds ſur ſon côté, tandis que dans ſon milieu elle n'a que 11 pieds d'élévation au-deſſus de la ſurface de l'eau; & l'on a fait remarquer, à ce ſujet, que ſi cette Frégate éprouvoit de ſemblables inondations, que ne doit-on point craindre pour d'autres qui ſont conſtruites d'une maniere bien moins avantageuſe? Car quelques Conſtructeurs modernes leur donnent ſeulement 9 pieds, ou au plus 9 pieds $\frac{1}{2}$ d'élévation au-deſſus de l'eau, dans l'idée, diſent-ils, de les rendre meilleurs voilieres. Dans une tempête, & particuliérement avec des mers & des vents de travers, la propriété la plus eſſentielle un Vaiſſeau, eſt d'avoir une grande force pour porter la voile; car c'eſt de ſa grande ſtabilité que dépend le ſalut du Vaiſſeau.

(623.) Dans l'*Art.* 472, auquel on peut avoir recours, nous avons expoſé les funeſtes effets qui peuvent réſulter des troiſiemes Roulis, lorſque l'action d'une nouvelle lame concourt avec eux: il n'y a pas de précautions qu'on ne doive prendre pour prévenir cette fâcheuſe circonſtance; car le Vaiſſeau court alors le plus grand riſque de démâter: heureuſement elle eſt fort rare.

(624.) Nous avons dit (473.), que la théorie des balancements du Tangage, eſt fondée ſur les mêmes principes que celle des balancements du Roulis. La ſeule différence qu'on remarque dans le Tangage, dépend uniquement de la vîteſſe reſpective avec laquelle les lames choquent le corps du Vaiſſeau. Nous avons ſuppoſé, dans le Roulis, la vîteſſe latérale égale à zéro, parce qu'effectivement elle eſt ſi petite, qu'on peut la négliger ſans crainte d'erreur: mais c'eſt tout autre choſe dans le Tangage; lorſque la lame vient choquer par la proue, ou, comme diſent les Marins,

lorſque le Vaiſſeau prend la lame debout, la vîteſſe avec laquelle elle choque la proue, eſt la vîteſſe reſpective, laquelle eſt la ſomme de celle du Vaiſſeau, & de celle qu'avoit la lame; & lorſque la lame ſuit le Vaiſſeau & vient le choquer par la poupe, la vîteſſe reſpective avec laquelle ſe fait le choc, eſt la différence des mêmes vîteſſes. De-là il ſuit clairement, que non-ſeulement le temps dans lequel le Tangage s'effectue doit être plus petit à proportion que cette vîteſſe reſpective eſt plus grande, mais auſſi que les élévations de l'eau ſur le côté doivent être auſſi plus grandes à proportion.

(625.) Nous avons donné, dans l'*Art.* 473, la vraie meſure du temps dans lequel le Vaiſſeau doit accomplir ſon balancement de Tangage; & nous avons dit qu'il doit être plus petit, à meſure que le temps dans lequel le Vaiſſeau accompliroit ſon Tangage par la ſeule cauſe de la lame, (476.), eſt plus petit. Or ce dernier balancement ſe fait en d'autant moins de temps, à proportion, que la vîteſſe du Vaiſſeau eſt plus grande, en ſuppoſant que la lame choque le Vaiſſeau par la proue : donc *plus la vîteſſe du Vaiſſeau ſera grande, plus le temps de la durée du Tangage ſera petit.* Ce ſera tout le contraire ſi la lame choque le Vaiſſeau par la poupe; car dans ce cas la vîteſſe reſpective eſt moindre que celle de la lame même. On a trouvé, dans l'*Art.* 473, que le temps dans lequel le Vaiſſeau de 60 canons acheveroit ſon Tangage par lui-même, eſt de 2 ſecondes $\frac{76}{100}$: & dans l'*Art.* 475, que celui dans lequel il l'acheveroit par l'action ſeule d'une lame de 9 pieds de hauteur, eſt de 1 ſeconde $\frac{59}{100}$, le Vaiſſeau naviguant à la bouline avec 10 pieds de vîteſſe par ſeconde : & de-là nous avons conclu (476.), que le vrai temps dans lequel le Vaiſſeau produit ſon Tangage eſt de 1 ſeconde $\frac{89}{100}$.

(626.) On a trouvé (477.) la grandeur du Tangage, & l'on a vu qu'à *meſure que le temps dans lequel le Vaiſſeau accompliroit ſon Tangage par lui-même, ſera plus grand, plus auſſi le Tangage ſera grand;* & au contraire, que *le Tangage ſera d'autant plus petit, à proportion que le temps dans lequel le Vaiſſeau l'accompliroit par la ſeule action de la lame, ſera plus grand;* mais la durée de ce dernier balancement eſt (475.), plus grande à proportion que la vîteſſe du Navire eſt plus petite : donc *plus la vîteſſe du Vaiſſeau ſera petite, plus le Tangage ſera petit.* On doit conclure de-là, & de l'*Art.* précédent, combien il eſt important de modérer la vîteſſe du Vaiſſeau, pour prévenir les effets du Tangage : car non-ſeulement on parvient, par cette attention, à diminuer l'étendue de l'oſcillation, mais encore à en modérer la violence.

(627.) Nous avons déterminé, dans l'*Art.* 479, l'action que ſouffre la mâture, en conſéquence du balancement du Tangage; & nous avons dit que cette action eſt la moindre qu'il eſt poſſible, lorſque le temps dans

lequel le Vaisseau acheveroit son Tangage par lui-même, & celui dans lequel il l'acheveroit par la seule action de la lame, sont égaux : & comme le premier de ces deux temps (473.), se trouve plus grand que le second (475.), il s'ensuit qu'il est nécessaire de réduire le premier, en rapprochant, le plus qu'il est possible, les poids qui composent la charge du centre du Vaisseau; ou comme disent les Marins en allégeant les extrêmités. On peut aussi diminuer l'action que souffre la mâture, comme on l'a vu dans le même *Art.*, en diminuant la distance du centre de gravité du Vaisseau au métacentre; mais cet expédient seroit extrêmement préjudiciable, comme on le verra plus loin, lorsque nous traiterons de l'élévation des eaux à la proue. Enfin, on a démontré, dans l'*Art.* 480, que l'action que souffre la mâture est en raison directe doublée de la longueur des Vaisseaux : c'est pour cette raison qu'il est nécessaire de procéder avec la plus scrupuleuse circonspection dans la détermination de cette dimension, & l'on doit bien prendre garde à ne pas la faire trop longue, uniquement par le désir déplacé de procurer au Vaisseau une marche plus avantageuse, comme il arrive à quelques Constructeurs, & comme l'ont prétendu jusqu'ici les Géometres : cette attention est sur tout nécessaire lorsque les Bâtiments sont destinés à naviguer dans des mers très-orageuses, comme le sont les Vaisseaux.

(628.) Nous avons déterminé, dans l'*Art.* 481., la hauteur à laquelle les eaux s'éleveront sur le côté, & l'on a vu que cette hauteur dépendoit de deux quantités, l'une dans laquelle on n'a pas compris l'effet de la dénivellation des eaux, & qui provient seulement de la hauteur de la lame, de la valeur plus ou moins grande du moment d'inertie dont le corps du Vaisseau souffre l'action, & de la hauteur du métacentre au-dessus du centre de gravité. Plus les deux premieres quantités seront grandes, & plus la troisieme sera petite, plus les élévations des eaux sur le côté seront grandes; & ceci a également lieu à la proue & à la poupe, attendu qu'on n'y comprend pas l'effet des dénivellations, ou les effets résultants des vitesses respectives.

(629.) L'autre quantité dépend absolument des dénivellations ou des vitesses respectives, & elle est le quarré de deux parties, dans lesquelles elle se divise, l'une desquelles vient de la hauteur de la lame, & du cosinus de l'angle sous lequel elle choque la proue ou la poupe, & l'autre de la seule vitesse du Vaisseau. Le quarré de la somme des deux parties doit être ajouté à la premiere quantité, pour avoir les élévations des eaux à la proue; & on doit le soustraire pour avoir les mêmes élévations à la poupe, lorsque la lame court vers l'arriere, en fuyant la poupe. Nous avons trouvé, dans l'*Art.* 482, pour le Vaisseau de 60 canons, que la hauteur de la lame étant de 9 pieds, & le Vaisseau naviguant à la bouline avec une vi-

teſſe de 10 pieds par ſeconde; nous avons trouvé, dis-je, que la premiere quantité eſt de 5 pieds $\frac{46}{100}$, & la ſeconde de 3 pieds $\frac{59}{100}$; ainſi la hauteur des eaux à la proue ſera, dans ce cas, de 9 pieds $\frac{1}{10}$, & à la poupe de 1 pied $\frac{87}{100}$. Si la vîteſſe du Vaiſſeau eût été zéro, comme il arrive quand il eſt à l'ancre, la ſeconde partie de la ſeconde quantité ſe ſeroit évanouie; & l'élévation des eaux à la proue ſe reduiroit à 5 pieds $\frac{81}{100}$, & celle de la poupe ſeroit portée à 5 pieds $\frac{4}{100}$.

(630.) Si la lame, au lieu de courir de proue à poupe, couroit de poupe à proue, de façon qu'elle choquât d'abord la poupe, en fuyant ou en s'éloignant de la proue; dans ce cas, pour avoir l'élévation des eaux à la poupe, il faudroit ajouter à la premiere quantité le quarré de la différence des deux parties dans leſquelles ſe diviſe la ſeconde quantité; & l'en retrancher pour l'élévation des eaux à la proue : de ſorte que dans le cas & dans les circonſtances précédentes, les élévations des eaux à la poupe ſeroient de 5 pieds $\frac{12}{100}$; & celles à la proue de 5 pieds $\frac{10}{100}$.

(631.) De-là on doit conclure qu'il eſt néceſſaire de porter ſon attention à ſe garantir de préférence des trop grandes élévations des eaux à la proue, parce qu'elles ſont beaucoup plus grandes qu'à la poupe, toutes les fois que le Vaiſſeau marche. On diminue réguliérement cette élévation, en diminuant la vîteſſe du ſillage, ou en diminuant de voile à meſure que la mer, ou les lames deviennent plus groſſes : car ſi, dans le cas de l'*Art.* précédent, nous ſuppoſons la lame de 36 pieds de hauteur, & la vîteſſe du Vaiſſeau de 15 pieds par ſeconde, nous trouverons, comme dans l'*Article* 483, que l'élévation des eaux à la proue doit être de 20 pieds $\frac{4}{11}$; élévation qui eſt de 3 pieds plus grande que toute la hauteur du Vaiſſeau. Ceci manifeſte, comme nous l'avons dit dans le même *Art.*, l'impoſſibilité de porter, dans tous les temps, toutes les voiles dehors, comme l'a prétendu un Géometre (*a*). C'eſt auſſi ce que l'expérience a rendu très-évident pour les Marins; ils n'ont beſoin, à cet égard, d'aucune autre démonſtration. Pour ce qui concerne les élévations des eaux à la poupe, comme c'eſt le quarré de la différence des deux parties qu'on doit ajouter; il s'enſuit que plus on déployera de voile, plus cette différence ſera petite; & par conſéquent les élévations des eaux à la poupe ſeront, dans ce cas, d'autant moins grandes. De-là il ſuit qu'étant obligé d'arriver vent arriere, & de ſuivre ainſi la direction du vent & des lames, on doit porter autant de voile qu'il eſt poſſible, ſi l'on veut éviter les dommages, & même les accidents que les coups de mer contre la poupe occaſionnent le plus ſouvent.

(632.) On peut, & même on doit prévenir les grandes élévations des eaux à la proue, par la diminution de la premiere quantité dans les actions

(*a*) M. *Bouguer. De la Mâture des Vaiſſeaux*, Sect. II, Concluſion, page 118.

relatives

relatives à la proue, quoique cela les faſſe augmenter en même temps pour la poupe; car par là on corrige en partie la grande différence qui réſulte à raiſon de la ſeconde quantité, qui, dans le premier cas, eſt le quarré de la ſomme des deux parties, tandis que, dans le ſecond, elle eſt ſeulement le quarré de leur différence. Par la formule donnée, *Art.* 481, on voit qu'on remplit cet objet en augmentant la diſtance du centre de gravité du Vaiſſeau au métacentre, ce qui eſt préciſément tout le contraire de ce qu'il conviendroit de faire pour diminuer le travail de la mâture, comme nous l'avons dit dans l'*Art.* 627. D'après cela, il eſt donc néceſſaire d'augmenter cette diſtance pour le temps où la proue du Vaiſſeau s'éleve, & de la diminuer pour celui où la lame ſouleve la poupe. Mais cette augmentation dépend, comme nous l'avons vu dans le *Chap. III* du *Liv. II* des plus grandes largeurs des renflements de la proue dans le voiſinage de la flottaiſon: donc, pour obtenir cet effet, il eſt néceſſaire de renfler la proue aux environs de la ligne de flottaiſon, & de rendre, au contraire, la poupe plus fine, c'eſt-à-dire, lui donner plus de façons. Si donc, conformément à cette regle, nous ſuppoſons la premiere quantité (629.) 5 pieds $\frac{46}{100}$, diminuée de 1 pied $\frac{1}{2}$ pour la proue; & augmentée de la même quantité 1 pied $\frac{1}{2}$ pour la poupe, les élévations des eaux à la proue seront, dans ce cas, de 7 pieds $\frac{11}{100}$, & celles à la poupe de 7 pieds $\frac{33}{100}$: d'où l'on voit que malgré la grande différence qu'on ſuppoſe entre les pleins de la proue & de la poupe, les eaux, dans le cas dont il eſt queſtion, doivent encore s'élever quelque choſe de plus à la proue qu'à la poupe.

(633.) De tout ce que nous venons de dire, il ſuit évidemment qu'il eſt d'une néceſſité abſolue que dans tout Bâtiment la moitié de l'avant ſoit plus pleine, ou moins fine que la moitié de l'arriere; mais malgré cela, il eſt néceſſaire de procéder avec beaucoup de circonſpection dans l'obſervation de cette regle, pour éviter de tomber dans le vice oppoſé. Car ſi cette différence, entre les pleins de l'avant & de l'arriere, eſt néceſſaire dans le cas où le Vaiſſeau eſt ſous voile, & qu'il cingle, il n'en eſt pas de même dans celui du repos; alors non-ſeulement cette différence n'eſt pas néceſſaire, mais elle devient même préjudiciable: l'élévation des eaux dans ce cas, & dans les circonſtances précédentes, ſeroit à la poupe de 7 pieds $\frac{18}{100}$, tandis qu'à la proue elle ſeroit ſeulement de 4 pieds $\frac{18}{100}$. C'eſt par cette raiſon que les poupes des Vaiſſeaux ont tant à ſouffrir, & ſont ſi expoſées, lorſqu'ils ſont battus par les groſſes mers qui ſubſiſtent après le calme d'une tempête, ou que le peu de vent qui reſte eſt trop foible pour donner de la viteſſe au Vaiſſeau. La même choſe arrive pour la proue, lorſque les Vaiſſeaux ſont à l'ancre dans une Rade, la proue ſe trouvant alors expoſée directement au choc de très-groſſes mers. Il ſeroit à déſirer, dans ces deux cas, que le corps du Vaiſſeau ne fût pas plus ample dans ſa

moitié de l'avant que dans celle de l'arriere ; mais malheureusement on ne peut concilier cet avantage avec celui qu'on obtiendra de cette disposition pour le cas où le Vaisseau est sous voile, & qu'il cingle, surtout avec de grandes vîtesses : par conséquent, il est nécessaire, comme nous l'avons dit, d'employer cette différence entre les pleins de l'avant & de l'arriere avec circonspection, en ayant égard à l'espece de Bâtiment qu'on a en vue de construire, & de la faire plus grande dans ceux qui sont destinés à naviguer dans des mers sujettes à des grandes agitations.

(634.) Enfin, nous terminerons ce que nous avons à dire du Tangage, en rappellant les objets auxquels il est nécessaire d'avoir égard, pour l'adoucir, & en conséquence pour diminuer l'action que souffre la mâture. Ces objets consistent dans ce que nous avons recommandé dans l'*Art.* 486, relativement à la figure que doivent avoir les couples des extrêmités du Vaisseau : car toutes les fois que ces couples ont de grandes concavités, ou qu'ils sont très-taillés dans leurs fonds, & qu'ils s'élargissent tout d'un coup vers la flottaison, les coups que donnent les extrêmités du Vaisseau lorsqu'elles retombent sur l'eau, sont alors très violents; ce qui, comme nous l'avons dit dans le même *Article*, produit de très-grands moments d'inertie dans la mâture.

Fin du Tome Second.

TABLE ALPHABÉTIQUE ET RAISONNÉE

Des Matieres contenues dans ce second Volume.

N. B. Les Renvois indiquent les *Articles*, & non les *Pages*, à moins qu'on ne l'exprime.

Description

que

Fin de la Table des Matieres.

Fautes à corriger dans quelques Exemplaires de ce second Volume.

PAGE 12, *mettez* 15 à l'*alinea*.

Pag. 34, PLANC. III. *lisez* PLANC. V.

Pag. 48, *ligne derniere*: mettez ** pour indiquer le renvoi à la note.

Page 51, *ligne* 5 en montant: écrivez $\frac{19}{40}$.

Pag. 59, *à la marge*: *Projection longitudinale*, lisez, *Projection horisontale*.

Pag. 84, *lig.* 7: en montant: de prisme, *lisez* de ce prisme.

Pag. 101, *lig.* 7. *mettez un* S après les deux parentheses qui terminent cette ligne, qui doit se terminer ainsi $+ d^3 + k^3))$ s.

Pag. 102, *lig.* 3: écrivez 160, à l'*alinea*.

Pag. 113, *lig.* 7. en: montant $^1\ u^2\ a \sin \theta$), *lisez* $\frac{1}{64}\ u^2\ a \sin \theta$).

Pag. 117, Tab. II. premiere colonne *lig.* 7 en montant: 24 & 57, *lisez* 24 & 27.

Pag. 155, *lig.* 16: à, très peu près, mettez la virgule avant la préposition à.

Pag. 184, *lig.* 9: moment de l'élévation, *lisez* moment & l'élévation.

Pag. 190, *lig.* 6. $mu\ (\frac{1}{3} ba \frac{}{2}$ . . . *lisez* $mu\ (\frac{1}{3} ba^{\frac{1}{2}}$ . . .

Pag. 208, *lig.* 16, en montant, $\frac{}{3}$, *lisez* $\frac{1}{3}$.

Pag. 237, *mettez* 360. au commencement du Chapitre.

Pag. 242, *lig.* 7. en montant $G = \frac{}{10}$ $G = \frac{9}{10}$

Pag. 260, *lig. derniere*, $e^3 c$, *lisez* $\int e^3 c$.

Pag. 320, *lig.* 4: 1 pouce $\frac{1}{2}$ dans le vaisseau, *lisez* 1 pouce $\frac{1}{2}$. Dans le vaisseau.

Table des matieres, *page* 14, *à la réclame*: dessus, *lisez* volume.

De l'Imprimerie d'AUGUSTIN-JEAN MALASSIS, Imprimeur de l'Amirauté, & de la Ville & Police

*Supplément à la Note ** de la page 137.*

Pour s'assurer d'une maniere encore plus convainquante, que la *quantité DH* doit être plus grande pendant la rétrogradation, à égale distance de l'origine des x, on remarquera que quand même on supposeroit, avec l'Auteur, *Art.* 284, la dureté D sensiblement constante, l'amplitude H de l'impression, lorsque les corps ne sont pas parfaitement élastiques, est nécessairement plus grande dans la rétrogradation, ou le choc réfléchi, à égale distance de l'origine des x, à cause que les particules ne peuvent pas se trouver alors dans leur premiere situation. Ainsi le produit DH est nécessairement plus grand, &c. &c.

Fautes à corriger dans quelques Exemplaires de ce premier Volume.

Page 11, *lig.* 15, en montant : *lisez* 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde.
Page 12, *lig.* 16 : *lisez* $\frac{1}{3}$ anglais.
Page 13, *lig.* 12 : *lisez* & non le $\frac{1}{4}$.
Page 47, *lig.* 2, en montant : *lisez* $\frac{2}{3}$.
Page 61, *lig.* 15, en montant : $u = \frac{}{t}$, *lisez* $u = \frac{a}{t}$.
Page 68, *lig.* 7 : des espaces AG, EH, *lisez* des espaces suivant AG, EH.
Page 69, *lig.* 8 & 9 : on a $\frac{2Av^2}{a}$; $a - \frac{Vb}{v}$), *lisez* on a $b^2 = \frac{2Av^2}{a}\left(a - \frac{Vb}{v}\right)$
Ibid. lig. 10 : *ôtez la parenthese.*
*Ibid. Note ** : mettez le signe = après la citation de l'article* 36.
Ibid, *lig.* 13, en montant $\int \frac{dt}{A} \int madt$) *lisez* $\int \left(\frac{dt}{A} \int madt \right)$
Page 72, *lig.* 11, en montant : 1 *m* & *n*, *lisez* 1, *m* & *n*.
Page 73, *lig.* 10 : produiroit, *lisez* produiroient.
Page 74, *lig.* 9, en montant : *FH*, *lisez* *Fh*.
Page 81, *lig.* 13 : $dW = \frac{dt + \beta dt + \gamma dt + \&c}{M}$, *lisez* $= \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&c}{M}$
Page 98 : *mettez* 163 *à la place de* 164, *& vice versa.*
Page 108, *au folio il y a* 106 *pour* 108.
Page 111, *lig.* 11 : $\frac{L'^2 l}{p}$, *lisez* $\frac{L^2 l}{p}$
Page 126, *lig.* 16 : ce ce l'on vient, *lisez* ce que l'on vient.
Page 142, *lig.* 11 : *le dénominateur* $DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)$ *doit être* $(DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B))^2$
Page 144, *Note*, *lig.* 13 : *ouvrez la parenthese après le signe = de la seconde valeur de x.*
Page 222, *lig.* 19 : horiontale, *lisez* horisontale.
Page 230, *lig.* 9, en montant : $\pm \frac{1}{8} u \sin)^2$, *lisez* $\pm \frac{1}{8} u \sin \theta)^4$.
Page 231, *lig.* 5, en montant : $a^{\frac{1}{2}} \pm$ &c... *lisez* $a^{\frac{1}{2}} \pm$ ...
Page 251, *lig.* 5 : $\frac{7}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \ldots$ *lisez* $\frac{1}{6} a^2 \sin \omega . \sin \theta + \ldots$;
Page 261, *à la fin de la ligne* 7 : $\sqrt{y^2 + a^2} + H$, *lisez* $\sqrt{y^2 - a^2} + H$.
Page 264, *lig.* 4, rgit, *lisez* agit. *Lig.* 5 : aésistance, *lisez* résistance.
Page 268, *lig.* 3, en montant (641), *lisez* (651).
Page 269, *lig.* 13 : $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}}$ ... *lisez* $\frac{1}{2} mc D^{\frac{1}{2}}$ ...
Ibid. lig. 19 : $\frac{1}{3} mc D^{\frac{1}{2}}$ *au sin* θ, *lisez* $\frac{1}{2} mc D^{\frac{1}{2}}$ *au sin* θ.
Page 270, *lig.* 6 : *mcu*.... *lisez* $\frac{1}{3}$ *mcu*.
Page 272, *lig.* 9 : $+ a^{\frac{3}{2}} u \sin \Delta$, *lisez* $+ \frac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} u \sin \Delta$.

Page 273, *lig.* 3, en montant : *mettez une barre à la seconde fraction.*

Page 283, *ligne derniere de la Note* : *sin* $\Theta - sin\, \theta$), *lisez* u (*sin* $\Theta +$ *sin* θ) :

Page 292, *lig.* 14, en montant : $D^{\frac{1}{2}} + \frac{}{16} u$, *lisez* $D^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{16} u$.

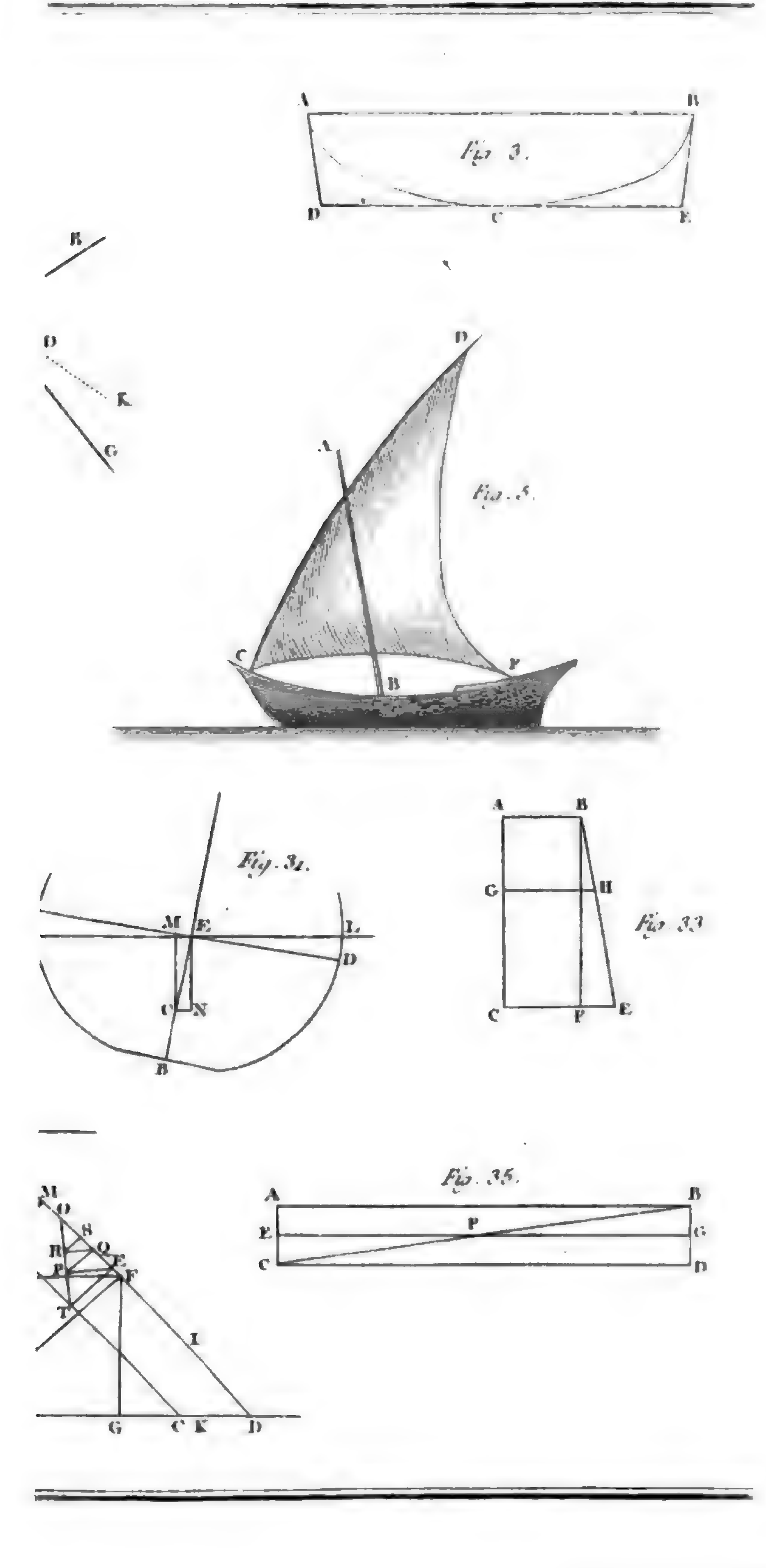
Page 304, *lig.* 13, *au dénominateur du second terme* : $)e^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}$

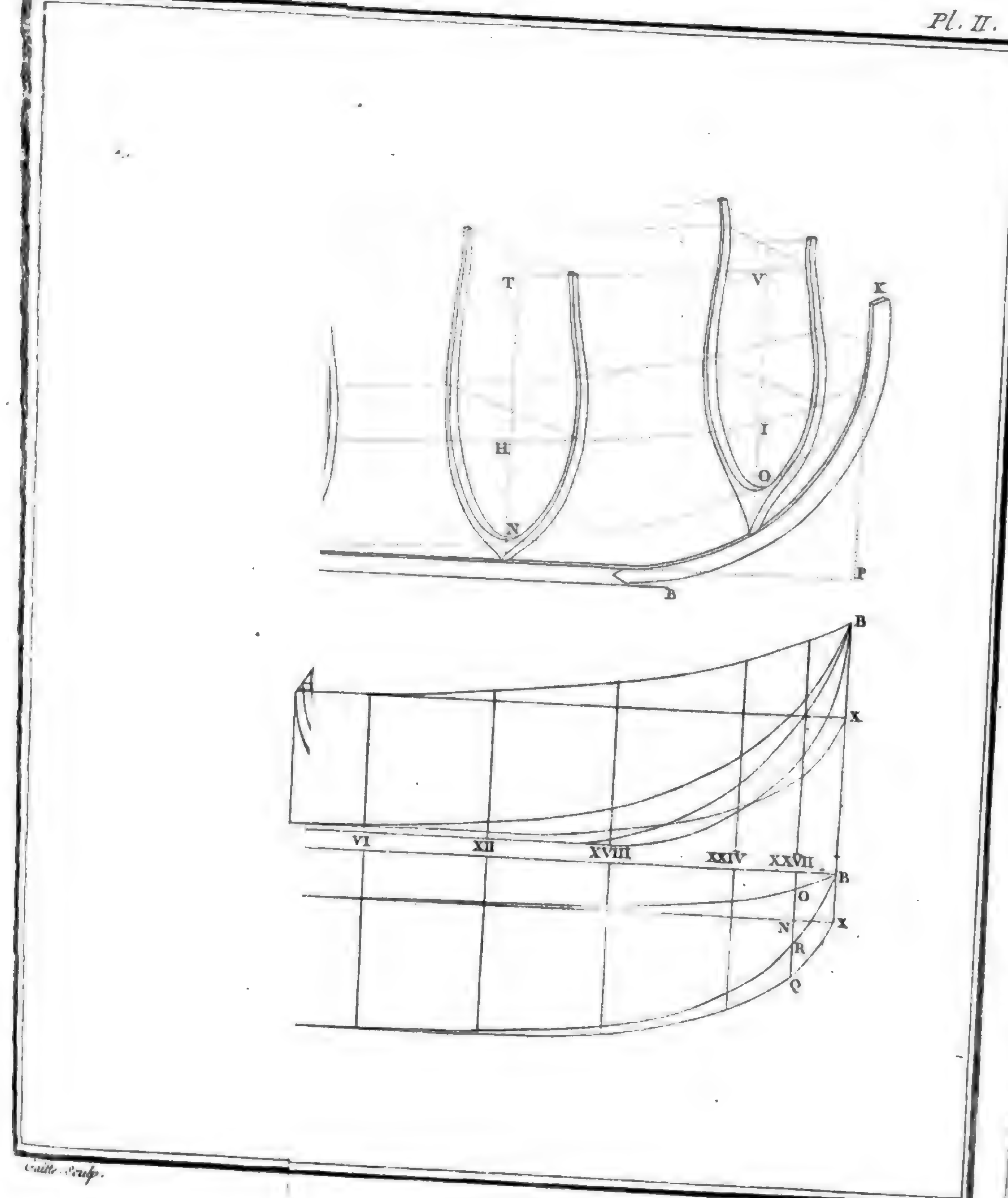
Page 315, *Note*, *lig.* 14, en montant : ($A + gA +$, *lisez* ($hA + gA +$ &c.

Page 320, *lig.* 17 : ne soit pas beaucoup, *lisez* ne soit beaucoup.

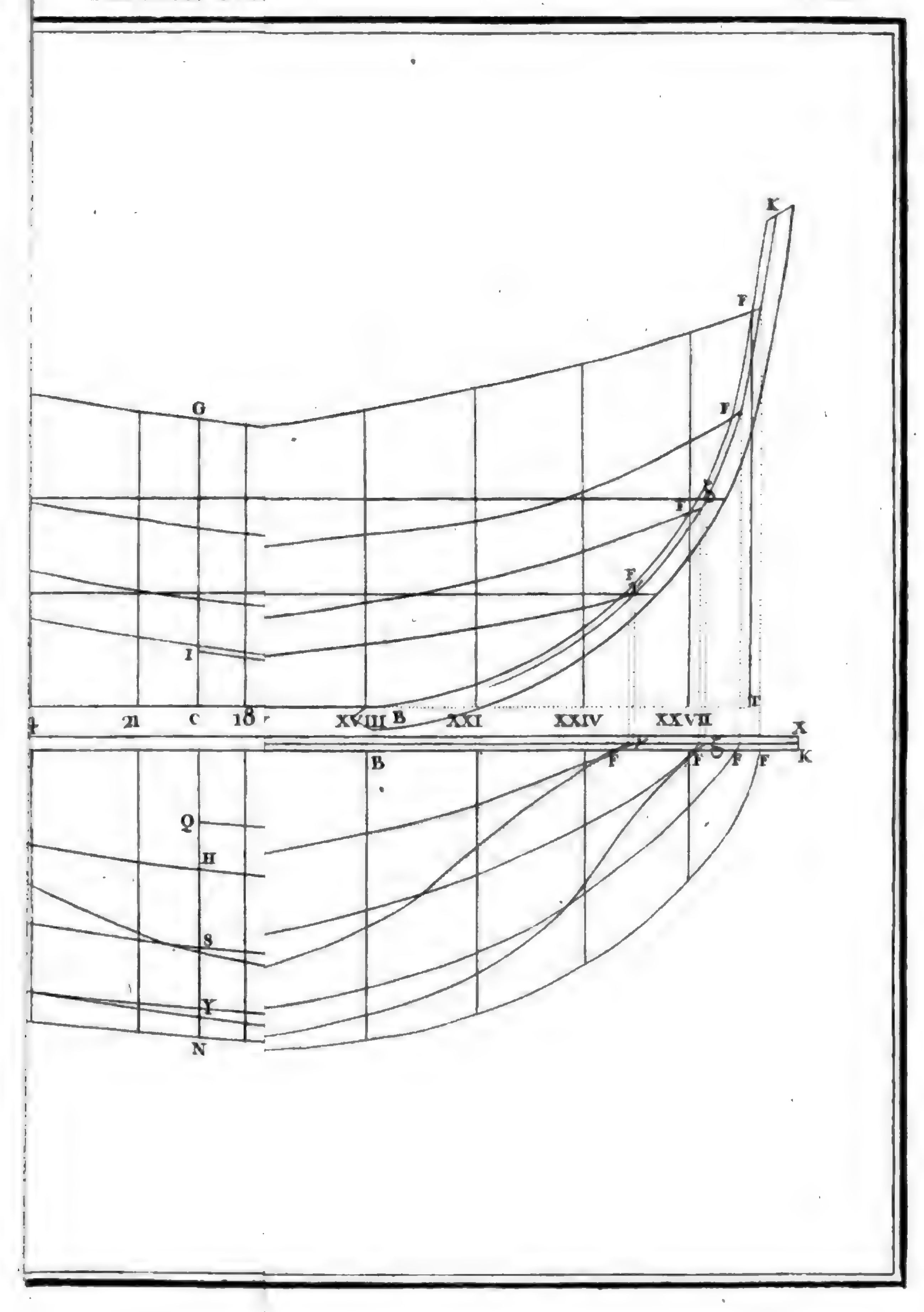
Page 329, *ligne derniere* : concevable, *lisez* convenable.

Page 368, *lig.* 9, en montant : $t = \sqrt{\left(\frac{S}{KPt}\right)}$, *lisez* $t = \sqrt{\left(\frac{S}{KPl}\right)}$.


A
B
Fig. 3.
D
C
E
B
D
K
G
D
A
Fig. 5.
C
F
B
Fig. 34.
M
E
L
D
O
N
B
A
B
G
H
Fig. 33
C
F
E
M
O
S
R
Q
P
E
F
T
I
G
C
K
D
Fig. 35.
A
B
E
P
G
C
D

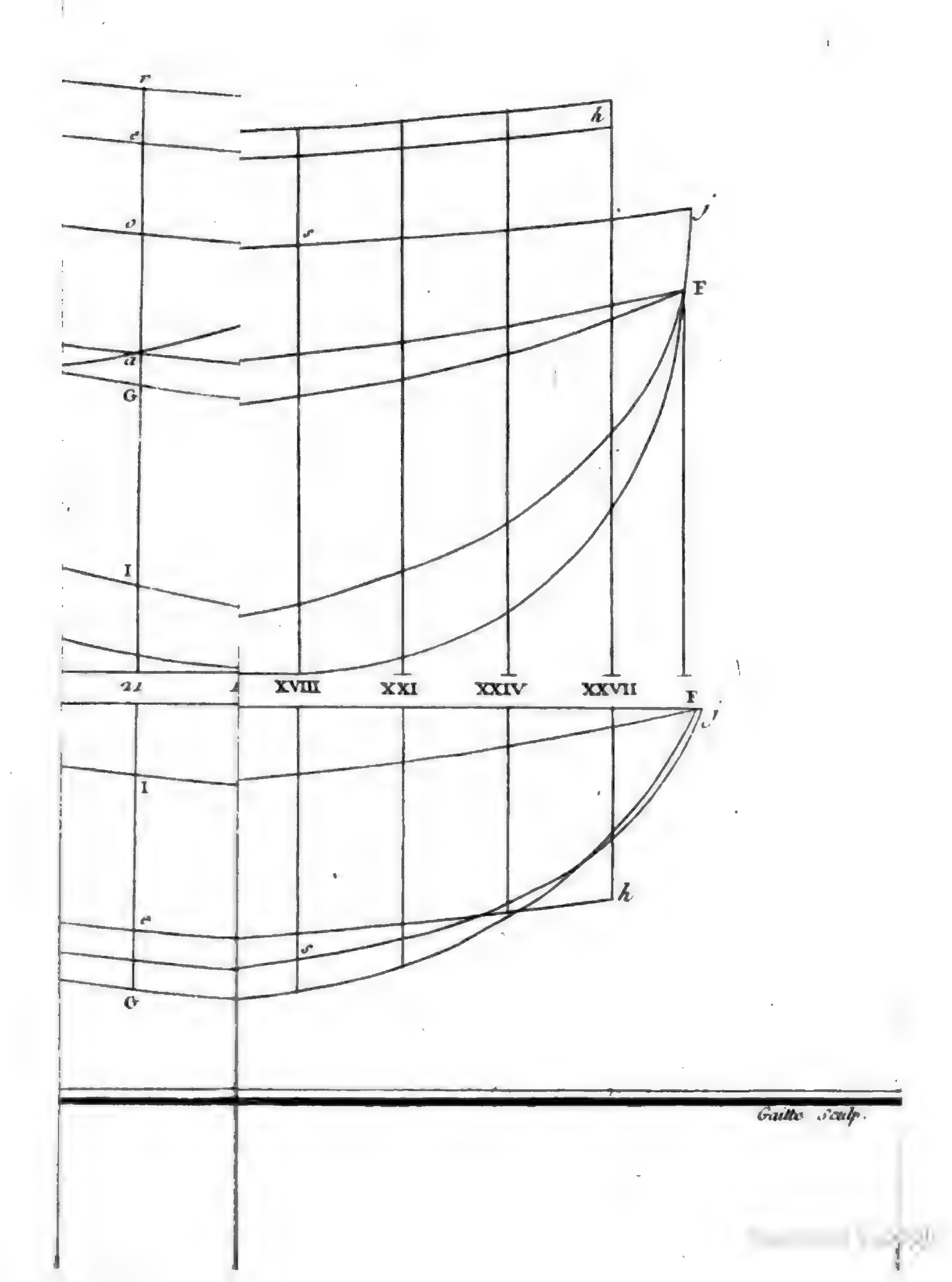


Caille Sculp.

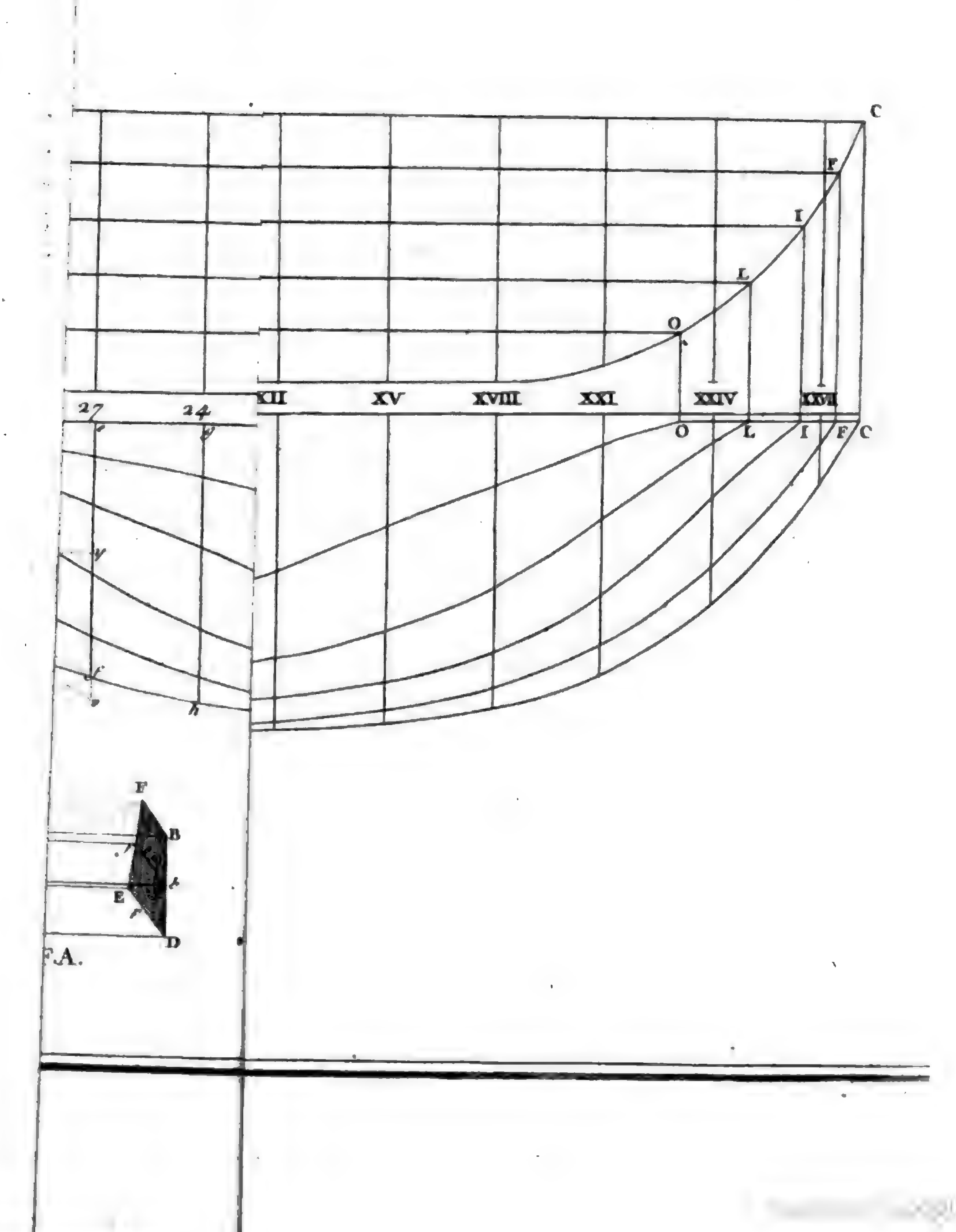

K
F
G
F
F
F
I
T
21
C
18
XVIII
B
XXI
XXIV
XXVII
X
K
B
F
F
F
F
Q
H
S
Y
N

h
F
i
θ
λ
18
15
XXI
XXIV
XXVII
e
F
h

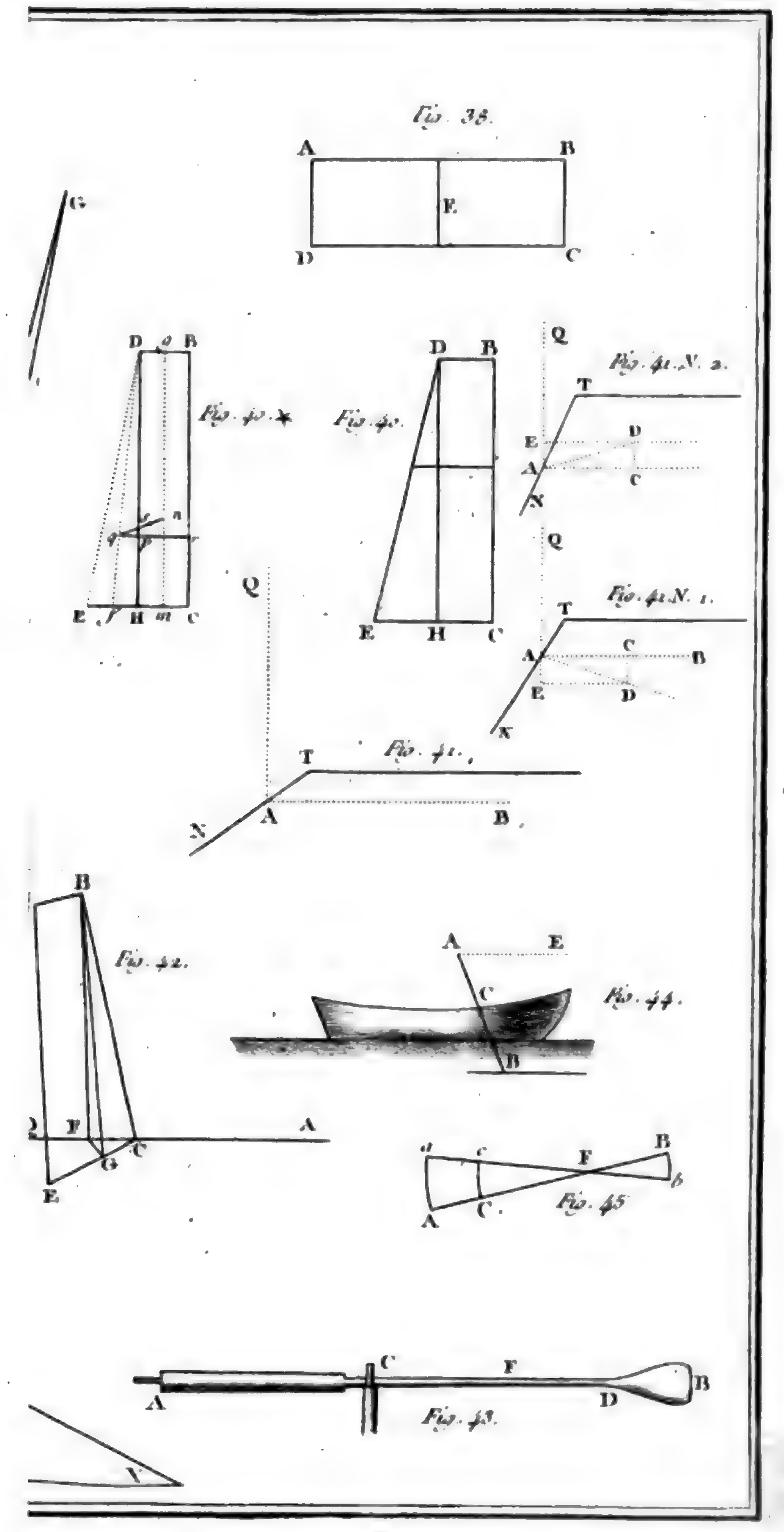
R
F
σ
φ
λ
ω
G
21
XVIII
XXI
XXIV
XXVII
P
C
G
D
B
A

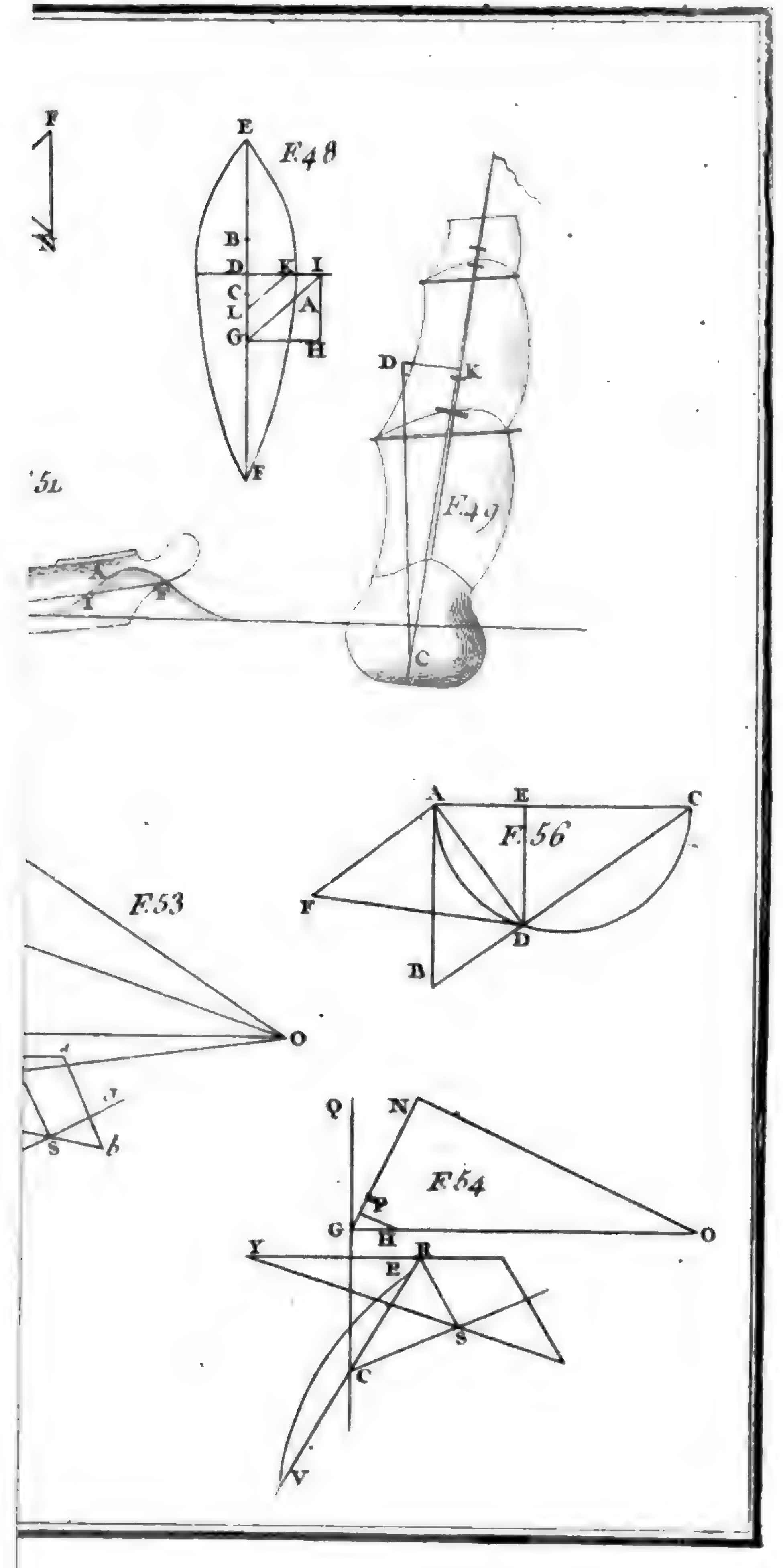


Gaitte Sculp.



C
F
I
L
O
XII
XV
XVIII
XXI
XXIV
XXVII
27
24
O
L
I
F
C
F
B
E
D
F.A.


Fig. 38.
A
B
E
D
C
G
D
o
B
Fig. 40.*
E
f
H
m
C
D
B
Fig. 40.
E
H
C
Q
Fig. 41. N. 2.
T
E
D
A
C
N
Q
Fig. 41. N. 1.
T
A
C
B
E
D
N
Q
T
Fig. 41.
N
A
B
B
Fig. 42.
F
A
G
C
E
A
E
C
Fig. 44.
B
d
c
F
B
b
A
C
Fig. 45
C
F
B
A
D
Fig. 43.


F
N
E
F. 48
B
D
K
I
C
L
A
G
H
F
D
K
F. 49
C
F. 56
A
E
C
F
D
B
F. 53
O
S
b
Q
N
F. 54
P
G
H
O
Y
R
E
S
C
V

